

•••• EXERCICE 1 - RÉOLUTION D'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' - y = -2e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
7. $y' + y = \frac{1 + x \ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$
8. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
9. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
10. $y' - 4y = e^{2x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
11. $y' - 4y = e^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^{4x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
12. $y' + y = 2xe^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

•••• EXERCICE 2 - RÉOLUTION D'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 1.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^{-x}$, avec $P \in \mathbb{R}_1[X]$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto P(x)e^x$, avec $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

•••• EXERCICE 3 - SOLUTION PARTICULIÈRE D'UNE EDL2

Notons (E) l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Soit y une solution de (E). On pose $z : t \mapsto y(t)e^t$.
 - 2.a. Donner une équation différentielle vérifiée par z .
 - 2.b. Déterminer alors l'expression de z .
 - 2.c. Donner alors une solution particulière de (E).
3. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

•••• EXERCICE 4 - CHANGEMENT D'INCONNUE

On considère le problème de Cauchy :

$$(E) : \begin{cases} y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Procédons par analyse-synthèse pour le résoudre.

1. **Analyse.** Soit y une solution du problème de Cauchy (E). On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) > 0$ et on pose $z = \sqrt{y}$.
 - 1.a. Vérifier que $2z' + 2z = x + 1$.
 - 1.b. En déduire les candidats-solutions possibles pour z , puis pour y .
2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles des solutions du problème de Cauchy (E)?

●●● EXERCICE 5 - CHANGEMENT D'INCONNUE

Résoudre le problème de Cauchy (E) : $\begin{cases} xy' - xe^{-\frac{y}{x}} - y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]e^{-1}; +\infty[; \mathbb{R})$, en posant $z : x \mapsto \frac{1}{x}y(x)$.

●●● EXERCICE 6 - TRANSFORMATION PAR CHANGEMENT DE VARIABLE

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$.

1. Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2. **Analyse.** Soit y une solution de (E). On pose $z : t \mapsto y(e^t)$.
 - 2.a. Justifier que z est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} puis déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$.
 - 2.b. En déduire que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera.
Indication : on pourra poser le changement de variable $x = e^t$ dans (E).
 - 2.c. En déduire z .
 - 2.d. Conclure sur les candidats-solutions de (E).
3. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
4. Conclure.

●●● EXERCICE 7 - MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et posons $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir :

$$(f \text{ est solution de (E)}) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x})$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●● EXERCICE 8 - MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{e^{-x}}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' - y = 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et posons $f : x \mapsto \lambda(x)e^x$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ' pour que f soit solution de (E).
3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

●●● EXERCICE 9 - EDL1 NORMALISÉE À COEFFICIENT NON CONSTANT (CAS GÉNÉRAL)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . On considère l'équation (E) : $y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et on note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E).

1. Justifier que a possède des primitives sur I . On notera A l'une d'elles.
2. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_H) est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)} / \lambda \in \mathbb{R}\}$, où A désigne une primitive de a sur I .
3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p .
Établir que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$: f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$.
4. Soient maintenant $\lambda \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E).
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
6. En déduire le théorème sur le problème de Cauchy associé à une EDL1.
7. **Applications.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

7.a. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$

7.b. $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

●●● EXERCICE 10 - SYSTÈME DIFFÉRENTIEL HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

1. **Algèbre linéaire.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

1.a. Déterminer le rang de $f - 6\text{id}$. En déduire la dimension puis une base de $\ker(f - 6\text{id})$.

1.b. Posons $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi que $U = AV - 2V$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.b.i. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.b.ii. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T .

1.b.iii. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible. On ne cherchera pas à calculer P^{-1} , mais on admettra que

$$A = PTP^{-1}.$$

2. Système différentiel.

On considère le système différentiel suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note, pour tout réel t , $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

2.a. Vérifier que pour tout réel t : $X'(t) = AX(t)$.

2.b. On note, pour tout réel t , $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on admet que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y'(t) = TY(t)$.

2.c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{2t}$ est solution de l'équation différentielle $f' = 2f + ce^{2t}$.

2.d. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $Y(t)$ en fonction de t .

2.e. Montrer alors qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) = 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{cases}$$

2.f. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(x_0 - y_0) \right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ y(t) = \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \frac{1}{2}(y_0 - z_0) \right) e^{2t} + \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0 \right) e^{6t} \\ z(t) = \left((x_0 - y_0)t + z_0 \right) e^{2t} \end{cases}$$

2.g. Que dire si $x(0) = y(0)$?

●●● EXERCICE 11 - EDL3 HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y''' + 2y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 ; y''(0) = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On note, pour tout réel x , $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ et $Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Y'(x) = AY(x)$.

2. Diagonalisation de A .

2.a. Déterminer les réels λ de sorte que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

2.b. Pour chaque valeur de λ trouvée à la question précédente, déterminer une base de $\ker(A - \lambda I_3)$. On prendra, si possible, des matrices colonnes dont la première composante vaut 1.

2.c. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

2.d. Calculer $P^{-1}AP$. On notera D la matrice obtenue.

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Z(x) = P^{-1}Y(x)$ et $Z'(x) = P^{-1}Y'(x)$. On admet qu'il existe trois fonctions u, v, w , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ,

telles que pour tout réel x : $Z(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix}$ et $Z'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \\ w'(x) \end{pmatrix}$.

3.a. Déterminer $Z(0)$.

3.b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Y'(x) = AY(x) \iff Z'(x) = DZ(x)$$

3.c. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$.

4. Conclure sur le problème de Cauchy initial.

●●● EXERCICE 12 - ÉQUATION FONCTIONNELLE

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y) \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} vérifiant la relation (★).

1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?

Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que f n'est pas la fonction constante nulle.

1.b. Déterminer $f(0)$.

1.c. Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f .

1.e. Conclure sur les candidats-solutions.

2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème?

3. Conclure.

••• EXERCICE 13 - ÉQUATION FONCTIONNELLE

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 ; f(0) = -4 \quad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Considérons f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} vérifiant les relations (★). Posons $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.

1.a. Montrer que g est constante sur \mathbb{R} .

1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f .

1.c. Conclure sur les candidats-solutions.

2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème?

3. Conclure.

•••• EXERCICE 14 - COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'UNE ED NON LINÉAIRE

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$. Déterminer les limites de y et y' en $+\infty$.