Exercices du chapitre 23
Graphes

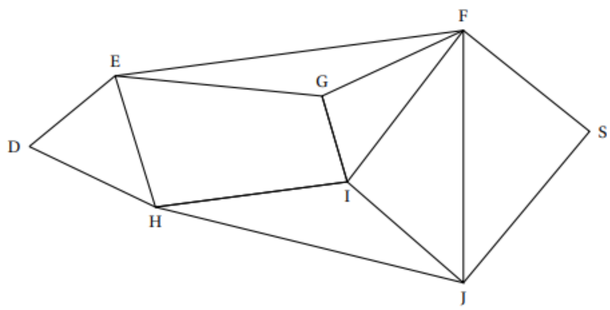
N'hésitez pas à me signaler toute coquille ou erreur.

●○○○ Exercice 1 - Vrai / faux

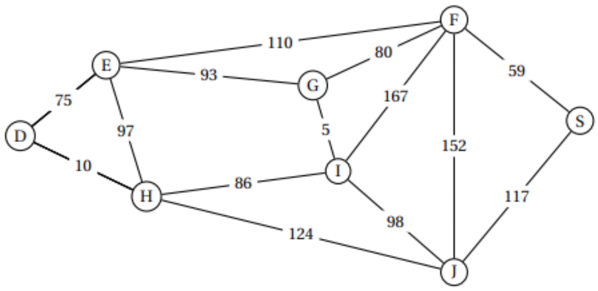
1. Un graphe est non connexe si, et seulement si, il a au moins un sommet isolé.
2. Dans un groupe de vingt enfants, il est impossible que sept d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, neuf d'entre eux en aient exactement 4, et quatre d'entre eux exactement 5.
3. Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours au moins deux sommets de même degré.
4. Soient $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre n et M sa matrice d'adjacence. Si le coefficient (i,j) de la matrice $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{M}^k$ vaut 2, alors il existe exactement deux chaînes simples reliant les sommets i et j.
5. Il existe des graphes connexes dans lesquels tous les sommets ont un degré d'intermédiarité nul.
6. Si un sommet a un degré plus élevé qu'un autre, alors il a nécessairement une meilleure centralité d'intermédiarité.

●○○○ Exercice 2 - Cyclisme

Un club cycliste se prépare pour une compétition. Le graphe ci-dessous représente l'ensemble des routes empruntables le jour de la compétition.



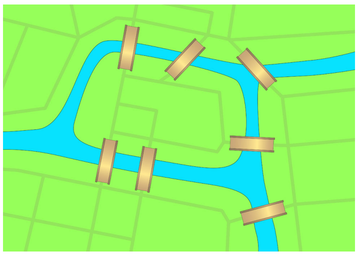
1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule ? Si oui, en donner un.
3. Existe-t-il un trajet permettant de parcourir toutes les routes une fois et une seule avec le même point de départ et d'arrivée ? Si oui, en donner un.
4. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe, notée M.
5. On donne : $\mathrm{M}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 11 & 8 & 10 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 11 & 8 & 8 & 6 & 12 & 11 & 7 \\ 3 & 8 & 8 & 4 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 12 & 9 & 10 & 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 11 & 6 & 6 & 9 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
   Un cycliste souhaite aller du point D au point F en empruntant seulement 3 routes. Combien d'itinéraires différents sont possibles ? Les donner tous.
6. Sur le graphe ci-dessous, on a indiqué le temps, en minute, mis par un des cyclistes pour parcourir chacune des routes.



En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le trajet qu'il doit emprunter pour relier D à S en un temps minimal.

●●○○ Exercice 3 - Les ponts de Königsberg

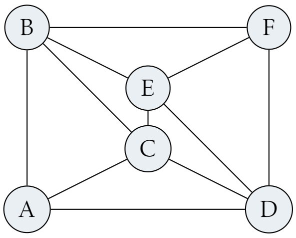
Voici un schéma de la ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) :



Peut-on tranquillement se balader dans Königsberg, en passant une et une seule fois par chaque pont, tout en revenant à son point de départ ?

●●○○ Exercice 4

On considère le graphe suivant :



1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ?
3. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?
4. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer les centralités de proximité et d'intermédiarité de E et F.

●●○○ Exercice 5 - Connexité 1

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre $2p$ tel que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p.
Démontrer que $\mathcal{G}$ est connexe.

●●●○ Exercice 6 - Connexité 2

Démontrer que dans un graphe simple connexe dont tout sommet est de degré pair, la suppression d'une arête ne détruit pas la connexité du graphe.

●●●○ Exercice 7 - Graphe régulier

On dit qu'un graphe est **régulier** lorsqu'il est simple et que tous ses sommets ont même degré.
Dans cet exercice, on s'intéresse aux graphes réguliers dont les sommets sont de degré 3.

1. Que dire de l'ordre d'un tel graphe ?
2. Démontrer que pour tout $p \in [\![2;+\infty[\![$, il existe un graphe régulier d'ordre $2p$ dont les sommets sont de degré 3.

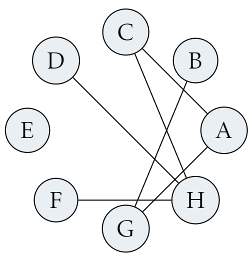
●●●○ Exercice 8 - Graphe aléatoire d'Erdös-Renyi

Toutes les variables aléatoires de l'exercice seront définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $p \in]0;1[$. Pour construire un graphe aléatoire non orienté d'Erdös-Renyi, on se donne :

- un ensemble de sommet $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$,
- une famille de variables aléatoires $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ indépendantes suivant toute la même loi de Bernoulli de paramètre p,
- des arêtes telles que pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $s_i - s_j$ est une arête du graphe si, et seulement si, $A_{i,j} = 1$.
  Autrement dit, chaque arête possible entre les sommets de $\mathcal{G}$ apparaît avec une probabilité p, de façon indépendante des autres arêtes.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{G}_n$ un tel graphe aléatoire d'ordre n.

1. **Exemple.** Dans le cas $n = 8$ et $p = 0,2$, on a obtenu le graphe suivant :



Ce graphe est-il connexe ? Si non, combien possède-t-il de composantes connexes ?

2. Quel est le nombre maximal d'arêtes que peut posséder $\mathcal{G}_n$?
3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def listeAdj(S,p)` qui renvoie la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe aléatoire ayant S pour liste de sommets.
4. On pose $X_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} A_{i,j}$.
   - **4.a.** Quelle est la loi suivie par X_n ?
   - **4.b.** Interpréter les valeurs prises par X_n dans le contexte de l'exercice.
   - **4.c.** Rappeler $\mathbb{E}(X_n)$, puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note D_k la variable aléatoire égale au degré du sommet s_k. Déterminer la loi de D_k.
6. On note I_n la variable aléatoire égale au nombre de sommets isolés de $\mathcal{G}_n$. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note $I_{n,k}$ la variable aléatoire égale à 1 si s_k est isolé, 0 sinon.
   - **6.a.** Quelle est la loi de $I_{n,k}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$?
   - **6.b.** Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^{n} I_{n,k}$. En déduire $\mathbb{E}(I_n)$.
   - **6.c.** Montrer que $I_n^2 = \sum_{k=1}^{n} I_{n,k} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} I_{n,i}I_{n,j}$.
   - **6.d.** Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i < j$. Justifier que $\mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{2n-3}$.
     En déduire que $\mathbb{E}(I_n^2) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$.
     - Deux méthodes pour justifier cette probabilité :
       - Puisque $\mathbb{P}([I_{n,i} = 1]) \neq 0$, on a :

$$\mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = \mathbb{P}([I_{n,i} = 1])\mathbb{P}_{[I_{n,i}=1]}([I_{n,j} = 1])$$

On sait déjà que $\mathbb{P}([I_{n,i} = 1]) = (1-p)^{n-1}$.
De plus, sachant l'évènement $[I_{n,i} = 1]$ réalisé (c'est à dire sachant que le sommet s_i est isolé), l'évènement $[I_{n,j} = 1]$ est réalisé si, et seulement si, le sommet s_j est isolé ; si, et seulement si, s_j n'est adjacent à aucun des $n-2$ autres sommets s_i étant isolé).
Par indépendance des évènements $\left(\text{"}s_j \text{ est adjacent à } s_k\text{"}\right)_{k\neq i,j}$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{[I_{n,i}=1]}([I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{n-2}$$

$$\boxed{\textbf{Conclusion : } \mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{2n-3}.}$$

       - L'évènement $[I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]$ est réalisé si, et seulement si, les sommets s_i et s_j sont tous deux isolés.
Ainsi :

$$\begin{aligned}[I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1] &= \left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[A_{k,i} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{n}[A_{i,k} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j-1}[A_{k,j} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{k=j+1}^{n}[A_{j,k} = 0]\right) \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[A_{k,i} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{n}[A_{i,k} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{j-1}[A_{k,j} = 0]\right) \cap \left(\bigcap_{k=j+1}^{n}[A_{j,k} = 0]\right)\end{aligned}$$

1∗⚠ pasind, 2foislammeVA...

On a maintenant une intersection d'évènements mutuellement indépendantes (par indépendance mutuelle des variables aléatoires A_i, j), tous de même probabilité égale à $(1-p)$. Ces évènements sont au nombre de : $i-1+(n-i)+j-2+(n-j) = 2n-3$.

$$\boxed{\textbf{Conclusion : } \mathbb{P}([I_{n,i} = 1] \cap [I_{n,j} = 1]) = (1-p)^{2n-3}.}$$

7. On suppose désormais que $p = p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, avec $c > 0$ et $c \neq 1$.
   - **7.a.** **7.a.i.** Écrire une fonction `Python` d'en-tête `I(liste)` qui prend un argument la liste des listes d'adjacence d'un graphe, et renvoie le nombre de sommets isolés de ce graphe.

```
def I(liste):
    isoles=0
    for k in range(n):
        if liste[k]==[]:
            isoles+=1
    return isoles
```

7.a.ii. On souhaite estimer l'influence de la valeur de c sur le nombre de sommets isolés. En exécutant le script suivant

```
liste2c=[0.3,0.5,0.7,1.3,1.5,1.7]
n=1000
res=[]

for c in liste2c:
    s=0
    for k in range(200):
        if I(listeAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n))==0:
            s+=1
    res.append(s/200)
print(res)
```

on obtient la liste `[0.0, 0.0, 0.0, 0.91, 0.975, 0.99]`.
Quelles conjectures peut-on faire lorsque $c<1$ et $c>1$?
Commençons déjà par expliquer les lignes de ce programme...
En ligne 1 : on crée une liste de différentes valeurs de c.
Ligne 4 : pour chaque valeur de cette liste...
Lignes 7-8-9 : on répète 200 fois la même chose :

- générer un graphe aléatoire d'ordre 1000 (n=1000) avec la commande `listeAdj(range(1,n+1),c*np.log(n)/n` où $p = c\dfrac{\ln(n)}{n}$
- si ce graphe ne contient aucun sommet isolé, on incrémente un compteur s

A la fin de la boucle de la ligne 7, la variable s contient donc le nombre de graphes, parmi les 200, qui n'ont aucun sommet isolé.
On ajoute ensuite, à la liste `res`, la fréquence de graphes ne contenant pas de sommet isolé sur ces 200.
Et on fait de même pour les autres valeurs de c.

Petite remarque
Le passage de la fréquence observée à la probabilité théorique est ensuite basé sur la loi faible des grands nombres...

Conclusion : on peut penser que :

- si $c<1$, alors, quand n est grand, la probabilité que le graphe ne possède aucun sommet isolé est proche de 0 ; autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n=0])=0$
- si $c>1$, alors, quand n est grand, la probabilité que le graphe ne possède aucun sommet isolé est proche de 1 ; autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n=0])=1$

7.b. Résultats probabilistes préliminaires. Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs discrètes positives admettant une espérance $\mathbb{E}(Y)$. Soit a un réel strictement positif.
Considérons la variable aléatoire Z définie par :

$$\forall \omega\in\Omega,\ Z(\omega)=\begin{cases} a & \text{si } Y(\omega)\geq a\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

7.b.i. Déterminer $Z(\Omega)$.
$Z(\Omega)=\{0;a\}$.

7.b.ii. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
Puisque $Z(\Omega)$ est fini, Z possède une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= 0\mathbb{P}([Z=0])+a\mathbb{P}([Z=a])\\ &= a\mathbb{P}([Y\geq a])\end{aligned}$$

7.b.iii. Établir : $Z\leq Y$.
Il s'agit de montrer que : $\forall\omega\in\Omega,\ Z(\omega)\leq Y(\omega)$.
Soit $\omega\in\Omega$.

- Si $\omega\in[Y\geq a]$, alors $Y(\omega)\geq a$. Mais, dans ce cas, $Z(\omega)=a$. D'où : $Z(\omega)\leq Y(\omega)$.
- Sinon, on a $\omega\in[Y<a]$. Dans ce cas, $Y(\omega)<a$ et $Z(\omega)=0$. Mais Y est à valeurs positives, d'où : $Z(\omega)\leq Y(\omega)$.

Par conséquent, dans tous les cas, $Z(\omega)\leq Y(\omega)$.

Conclusion : $Z\leq Y$.

7.b.iv. Démontrer alors l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}([Y\geq a])\leq\frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

On a :

$$Z\leq Y$$

D'où, par croissance de l'espérance (Z et Y possèdent toutes deux une espérance) :

$$\mathbb{E}(Z)\leq\mathbb{E}(Y)$$

D'après la question 7(b)ii, en divisant par $a>0$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}([Y\geq a])\leq\frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([Y\geq a])\leq\dfrac{\mathbb{E}(Y)}{a}$.

7.b.v. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, valable pour toute variable aléatoire X admettant une variance et tout réel strictement positif α :

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\alpha)\leq\frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

Soit X une variable aléatoire admettant une variance (X admet donc également une espérance). On rappelle que, par définition : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)$. Ceci nous incite à utiliser l'inégalité de Markov avec $Y=\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$ qui est bien une variable aléatoire à valeurs positives.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}_*^+$. On a ainsi, d'après l'inégalité de Markov appliquée à $Y=\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2$, avec $a=\alpha^2>0$:

$$\mathbb{P}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\geq\alpha^2\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)}{\alpha^2}$$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\geq\alpha^2\right)\leq\frac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$$

Or, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$, on a :

$$\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\geq\alpha^2 \iff \sqrt{\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2}\geq\sqrt{\alpha^2}$$

Et comme $\alpha > 0$, on a $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$. D'où :

$$\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \geq \alpha^2 \iff \left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq \alpha^2$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 \geq \alpha^2\right) = \mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}(X)\right| \geq \alpha^2\right)$$

Conclusion : pour toute variable aléatoire X admettant une variance, et pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\alpha^2}$.

7.c. **7.c.i.** Montrer que $(1-p_n)^{n-1} \sim (1-p_n)^n$ puis que $(1-p_n)^n \sim \dfrac{1}{n^c}$.

7.c.ii. A l'aide de l'inégalité de Markov, déterminer alors les limites de $\mathbb{P}([I_n \geq 1])$ puis $\mathbb{P}([I_n = 0])$ lorsque $n \to +\infty$ dans le cas où $c > 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire I_n, à valeurs positives, et avec $a = 1$ strictement positif, on a :

$$\mathbb{P}([I_n \geq 1]) \leq \mathbb{E}(I_n)$$

Or, d'après la question 6(b) : $\mathbb{E}(I_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.
Mais, d'après la question précédente : $(1-p_n)^{n-1} \sim \dfrac{1}{n^c}$.
D'où, par produit (voir DM5 pour les propriétés sur $\sim$) :

$$\mathbb{E}(I_n) \sim \frac{1}{n^{c-1}}$$

Et comme $c > 1$, on a $c - 1 > 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{c-1}} = 0$.

Conclusion : par théorème d'encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n \geq 1]) = 0$.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left([I_n \geq 1], [I_n = 0]\right)$ est un système complet d'évènements...

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n = 0]) = 0$.

7.c.iii. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}([I_n = 0]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$. En déduire que si $c < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n = 0]) = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à I_n, qui est finie donc possède une variance, avec $a = \mathbb{E}(I_n) > 0$. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(\left|I_n - \mathbb{E}(I_n)\right| \geq \mathbb{E}(I_n^2)\right) \leq \frac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$$

Pour prouver le résultat, il suffit alors d'établir :

$$\mathbb{P}([I_n = 0]) \leq \mathbb{P}\left(\left|I_n - \mathbb{E}(I_n)\right| \geq \mathbb{E}(I_n)\right)$$

Première idée : a-t-on $[I_n = 0] \subset \left[\left|I_n - \mathbb{E}(I_n)\right| \geq \mathbb{E}(I_n)\right]$?
Réponse : oui ! En effet, soit $\omega \in [I_n = 0]$. On a alors : $\left|I_n(\omega) - \mathbb{E}(I_n)\right| = \left|0 - \mathbb{E}(I_n)\right| = \mathbb{E}(I_n) \geq \mathbb{E}(I_n)$. D'où $\omega \in \left[\left|I_n - \mathbb{E}(I_n)\right| \geq \mathbb{E}(I_n)\right]$, ce qui prouve l'inclusion et donc l'inégalité des probabilités.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([I_n = 0]) \leq \dfrac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2}$

- D'après la formule de Koenig-Huygens, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2} &= \frac{\mathbb{E}(I_n^2)}{\mathbb{E}(I_n)^2} - 1 \\
&= \frac{n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}}{n^2(1-p_n)^{2n-2}} - 1 \\
&= \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} + \frac{n-1}{n(1-p_n)} - 1
\end{aligned}$$

$1 * questions 6(b) et 6(d)$

Or :

◇ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{n(1-p_n)^{n-1}} = 1$

◇ d'après la question 7(c)i : $n(1-p_n)^{n-1} \sim \dfrac{1}{n^{c-1}} = n^{1-c}$. Et comme $c < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-c} = +\infty$, et par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-p_n)^{n-1} = +\infty$.
Par opération :

$$lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(1-p_n)^{n-1}} = 0$$

On a finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(I_n)}{\mathbb{E}(I_n)^2} = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([I_n = 0]) = 0$.

7.c.iv. Les conjectures faites à la question 7(a)ii sont-elles valides ?
Bien entendu !

Remarques

R 1. On a donc démontré que lorsque n est grand, si $p < \dfrac{\ln(n)}{n}$, alors le graphe contient presque-sûrement des sommets isolés... alors que si

$p > \dfrac{\ln(n)}{n}$, le graphe ne contient presque-sûrement aucun sommet isolé.

R 2. Et dans le cas $p = \dfrac{\ln(n)}{n}$? Si p_n est de la forme $\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{c}{n} + \dfrac{\epsilon(n)}{n}$ (avec $\epsilon(n) \to 0$), Erdös et Rényi ont établi que la suite de variables aléatoires (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre e^{-c}. Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([\mathrm{I}_n = 0]) = e^{-e^{-c}}$.

R 3. Invitation très forte à s'amuser avec le programme Python que je joins également...