Devoir surveillé 1

Samedi 23 septembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Carpe Diem : profitez du jour présent mes amis, que votre vie soit extraordinaire."
John Keating [Le cercle des poètes disparus]

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

CQFR

Ce qu'il faut retenir des copies : Quelques remarques générales :

- Pas d'abréviations ! Pas de IV pour "initialisation vérifiée", ni HDR pour "hypothèse de récurrence"...
  Sont acceptées : càd et ssi.
  Est tolérée : SCE (après avoir écrit au moins une fois "système complet d'évènements".)
- Le soin porté aux copies est souvent trop négligé. Attention aux ratures, aux coups de blanco...
- On pense à changer de page (pas de feuille) à chaque nouvel exercice.
- On dit "f décroissante sur [intervalle de $\mathbb{R}$]". En particulier : ~~"f est décroissante"~~ et ~~"f est décroissante sur $\mathbb{N}$"~~.

Exercice 1 (ESC 2000 E)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. **1.a.** Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   Le discriminant de la fonction $x \longmapsto x^2+x+1$ est strictement négatif ; par conséquent :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 \neq 0$$
   Conclusion : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

   1.b. Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les limites obtenues.

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
     $$f(x) = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$
     D'où on déduit, par opérations :
     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

✓ Rigueur !
Expression non valable si $x = 0$... D'où la quantification.
On peut également écrire "Soit x suffisamment proche de $-\infty$ ou $+\infty$."

   - La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
     Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
     $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$
     D'où :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

   - La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

✍ Rédaction
Voici la phrase type !

   1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathscr{T}_0$.
   On a : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
   Conclusion : $\mathscr{T}_0$ a pour équation réduite $y = x$.

Confusion d'objets !
$\mathscr{T}_0$ est une droite !!

   1.d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}_0$.
   Pour cela étudions, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - x$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{x^2+x+1} - x \\ &= \frac{x - x(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} \\ &= \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$
   D'où :

➠ Réflexe !
Pour étudier le signe d'une expression, on cherche à la simplifier et à la factoriser.
Si on n'y arrive pas, ou si le signe n'est pas simple à déterminer (de façon directe ou en résolvant une inéquation), alors on peut éventuellement faire une étude de fonction.
Remettre le nez dans la carte mentale dédiée à l'étude de signe.

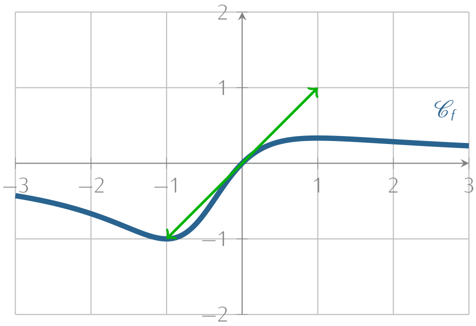
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Conclusion : $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}_0$ sur $]-\infty;-1[$,
$\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{T}_0$ sur $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$,
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}_0$ se rencontrent en les points de coordonnées $(-1;-1)$ et $(0;0)$.

1.e. En utilisant les résultats précédents, représenter, dans un repère judicieusement choisi, l'allure de $\mathscr{C}_f$.

Petite remarque
On choisit un repère orthonormé, même s'il tasse légèrement la courbe sur $[-1;1]$, c'est tout de même plus habituel !

Important !
On pense à faire apparaître $\mathscr{T}_0$, qui nous aide à représenter $\mathscr{C}_f$.



2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

2.a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

On a :

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \frac{1}{\frac{1}{p}+1+p}$$

Or $p > 0$, donc :

$$\frac{1}{p}+1+p \geq 1+p > 0$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{\frac{1}{p}+1+p} \leq \frac{1}{1+p}$$

Conclusion : $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

➠Réflexe !
Pour comparer simplement 2 fractions :
• si elles ont même dénominateur, on compare les numérateurs,
• si elles ont même numérateur, on compare les dénominateurs.

♣ Méthode !
Bien évidemment, deux autres méthodes possibles pour cette question (à tester si question non réussie) :
• raisonner par équivalences,
• étudier le signe de $f\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1}$...

2.b. En déduire par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  On sait que $u_0 = 1$, d'où le résultat.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$.
  Par hypothèse de récurrence, on a :
  $$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
  D'où, par stricte croissance de f sur $[0;1]$, licite car $\frac{1}{n+1} \leq 1$:
  $$f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
  Autrement dit :
  $$0 < u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$
  Or, d'après la question précédente, licite car $n+1 \in \mathbb{N}^*$, on a :
  $$f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$$
  D'où, par transitivité :
  $$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

2.c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Important !
Le théorème d'encadrement permet de conclure sur la convergence et la valeur de la limite, en même temps. Il n'est pas nécessaire de justifier au préalable la convergence par un autre argument.

2.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **2.b.**, $u_n \neq 0$. Et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} &= \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n} \\ &= u_n + 1 + \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

2.e. En déduire, en utilisant le résultat de la question **2.b.** : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Pourquoi ?
On pense à une récurrence parce-que la question précédente établit un lien entre u_n et u_{n+1}.

Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:

  D'une part :

  $$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

  D'où :

  $$\frac{1}{u_1} = 3$$

  Et :

  $$1 + 1 + \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 3$$

  L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et montrons $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leq n + 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

  On sait que :
  - ◇ d'après la question **2.b.** :

    $$u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

  - ◇ par hypothèse de récurrence :

    $$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

  D'où, en sommant :

  $$u_n + \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

  Autrement dit, d'après la question précédente :

  $$\frac{1}{u_{n+1}} \leq n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2.f. **2.f.i.** Justifier que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$: $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$.

Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sur $[k-1; k]$ (puisque $k \geq 2$), on a :

$$\forall x \in [k-1; k],\ \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k - 1 \leq k$ (les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[k-1; k]$) on obtient :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$: $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$.

2.f.ii. En déduire : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![2; +\infty[\![, \ \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

D'où, en sommant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx$$

Et ainsi, d'après la relation de Chasles, licite car $n \geq 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx &= \left[\ln(x) \right]_1^n \\ &= \ln(n) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.

2.g. Déduire des questions précédentes : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ n+1 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$.

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

- D'après la question **2.b.** :

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{u_n} \geq n+1$$

- D'après la question **2.e.** :

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

Et ainsi, d'après la question précédente :

$$\frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$$

✘ Attention !
Lé résultat précédent porte sur $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$...

Conclusion : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ n+1 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$.

2.h. Conclure en donnant un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$ puis déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$.

- D'après la question précédente, on obtient :

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ 1+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{nu_n} \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{\ln(n)}{n}$$

Or, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1$$

D'où :

$$\frac{1}{nu_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$$

Et ainsi :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Important !
Bien sûr que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$... mais on a aussi $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+43}$, $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-n^2}+3n^2}{3n^2+7n}$... Et $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, qui est tout de même l'équivalent le plus simple, non ?

- On a ainsi :
  - ◇ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0\ \ ;\ \ \dfrac{1}{n} > 0$,
  - ◇ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$,
  - ◇ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

  Par critère d'équivalence sur les séries à terme général positif, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

☞ **Rappel...**
Une série et toutes ses troncatures ont même nature.

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Exercice 2 (EDHEC 2009 E)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X; Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z > k]) &= \mathbb{P}\big([X > k] \cap [Y > k]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \mathbb{P}([X > k])\mathbb{P}([Y > k]) && X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}\\ &= \big(\mathbb{P}([X > k])\big)^2\end{aligned}$$

Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

Ainsi, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$, la série $\sum\limits_{i \geq k+1} \mathbb{P}([X = i])$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X > k]) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i])\\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1}p && \text{changement d'indice } j = k - (n+1)\\ &= p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+n}\\ &= pq^n \frac{1}{1-q} && p = 1 - q\\ &= q^n\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z > k]) &= \Big(1 - \big(1 - q^k\big)\Big)^2\\ &= \big(q^2\big)^k\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}([Z > k]) = q^{2k}$.

1.b. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a :

$$[Z \geq k] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Or, les évènements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ sont incompatibles, d'où :

$$\mathbb{P}([Z \geq k]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z \geq k]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

Mais, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. En particulier, Z est à valeurs entières, donc

$$[Z \geq k] = [Z > k-1]$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$.

1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

- On a déjà justifié : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) && \text{question 1.a., licite car } k-1, k \in \mathbb{N}\ (k \in \mathbb{N}^*)\\ &= q^{2k-2} - q^{2k}\\ &= q^{2k-2}(1 - q^2)\\ &= \big(q^2\big)^{k-1}(1 - q^2)\\ &= \big(1 - (1 - q^2)\big)^{k-1}(1 - q^2)\end{aligned}$$

On obtient en particulier : $\mathbb{P}([Z = k]) \neq 0$, et donc $[Z = k] \neq \varnothing$. Ce qui prouve que $\mathbb{N}^* \subset Z(\Omega)$.

Petite remarque
A ce stade, l'inclusion réciproque n'est pas établie, et cette inclusion est suffisante : elle sert essentiellement à la quantification en n qui suit...

Petite remarque
On ne tarde pas trop sur l'inclusion réciproque ; qui n'est même pas vraiment nécessaire...

Conclusion : Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1 + X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$

2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction **Python** suivante.

```
1 import numpy.random as rd
2 def mystere(p):
3     n=1
4     while rd.random()<1-p:
5         n=n+1
6     return n
```

La variable `n` débute à 1 puis est incrémentée à chaque répétition de la boucle `while`. On sait que la commande `rd.random()` renvoie un réel aléatoire de $]0;1[$; par conséquent, les lignes 4 et 5 modélisent des répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont l'échec est de probabilité $1 - p$, donc le succès de probabilité p, tant qu'on obtient un échec. A la fin du programme, la variable `n` sera égale au nombre de répétitions nécessaires à l'obtention du premier succès dans cette répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.

Conclusion : la fonction `mystere` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

2.b. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel p de $]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T.
Ce programme pourra utiliser la fonction `mystere` précédente et on rappelle qu'en **Python**, l'exécution de `a%b` renvoie le reste de la division euclidienne de `a` par `b`.

```
def simulT(p):
    X=mystere(p)
    if X%2==0: #cad si X est pair
        return X/2
    else :
        return (1+X)/2
```

☞ Pour info...
On pourrait aussi rapidement démontrer que $T = \left\lfloor \dfrac{1+X}{2} \right\rfloor$ et utiliser cette expression pour simuler une réalisation de T.

2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.
Montrons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

Autrement dit :
Montrons :
$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \in \mathbb{N}^*$$

- **Si $X(\omega)$ est pair :**
Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il existe alors un entier naturel non nul k (que l'on considère ensuite) tel que $X(\omega) = 2k$. Ainsi :
$$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{X(\omega)}{2} \\ &= k \end{aligned}$$
D'où, puisque $k \neq 0$: $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.
- **Si $X(\omega)$ est impair :**
Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il existe alors un entier naturel k (que l'on considère ensuite) tel que $X(\omega) = 2k + 1$. Ainsi :
$$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{1 + X(\omega)}{2} \\ &= k + 1 \end{aligned}$$
D'où, puisque $k \in \mathbb{N}$: $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas : $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

Conclusion : T prend des valeurs entières positives non nulles.

2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Autrement dit :
Montrons :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k \in T(\Omega)$$
Autrement dit, montrons :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists \omega \in \Omega \ /\ k = T(\omega)$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $k \in T(\Omega)$.
On a $2k \in \mathbb{N}^*$, et puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, il existe $\omega \in \Omega$ (que l'on considère ensuite) tel que $2k = X(\omega)$.
Mais, dans ce cas :
$$\begin{aligned} T(\omega) &= \frac{X(\omega)}{2} \\ &= k \end{aligned}$$
Par conséquent : $k \in T(\Omega)$.

- On vient d'établir : $\mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$. Or, à la question précédente, on a établi : $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Conclusion : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a immédiatement :

$$[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]$$

- ◇ On a déjà, d'après les questions 1.c. et 2.c. : $T(\Omega) = \mathbb{N}^* = Z(\Omega)$.
  ◇ Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T = k]) & = & \mathbb{P}\big([X = 2k] \cup [X = 2k - 1]\big) & \\ & = & \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k - 1]) & [X = 2k] \text{ et } [X = 2k-1] \text{ sont incompatibles} \\ & = & pq^{2k-1} + pq^{2k-2} & 2k, 2k-1 \in \mathbb{N}^* \\ & = & q^{2k-2}p(q+1) & \\ & = & \left(q^2\right)^{k-1}(1-q)(1+q) & p = 1 - q \\ & = & \left(q^2\right)^{k-1}(1-q^2) & \\ & = & \mathbb{P}([Z = k]) & \end{array}$$

Conclusion : T suit la même loi que Z.

Exercice 3 (Ecricome 1996 E)

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les solutions sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation :

$$(E_n) : \ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) + x$, définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

Partie 1 : existence des solutions de (E_n)

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_*^+$.

- Par opérations, on a immédiatement :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- La fonction f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}_*^+$.

D'où :

x	0		$+\infty$
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1.b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$ et donner le tableau de variations de f^{-1}.

On sait que :

- f est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, comme somme de deux fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}_*^+$;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

D'après le théorème de bijection, f est donc bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $f(\mathbb{R}_*^+) = \mathbb{R}$ et :

☞ Rappel...
La continuité permet d'assurer que $f(\mathbb{R}_*^+)$ est bien un intervalle (l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle : c'est une formulation du TVI).

x	$-\infty$		$+\infty$
f^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

1.c. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une solution et une seule notée x_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier $n \in \mathbb{R}$ et, comme f est bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}$, n possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_*^+$ par f.

Conclusion : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une solution et une seule notée x_n.

2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante et que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

Commençons par remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(x_n) = n$$

D'où, f étant bijective :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ x_n = f^{-1}(n)$$

- Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$n < n+1$$

Autrement dit :

$$f(x_n) < f(x_{n+1})$$

Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :

Petite remarque
On peut aussi appliquer f^{-1}, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à $n < n+1$.

$$x_n < x_{n+1}$$

Par conséquent : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Important !
On remet le nez dans les suites implicites et on se souvient qu'il en existe deux types...

- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$$

Autrement dit :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$$

Conclusion : la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

3. Donner la valeur de x_1.

On remarque que $f(1) = 1$. Or, x_1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 1$.

Conclusion : $x_1 = 1$.

4. **4.a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) < x$.

La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_*^+$; donc sa courbe représentative est partout en dessous de toutes ses tangentes et en particulier de sa tangente en 1, d'équation réduite $y = x - 1$.
D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) \leq x - 1$$

Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ x - 1 < x$$

Conclusion : par transitivité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) < x$.

4.b. Prouver que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $$f(x_n) = n$$

- $$\begin{aligned} f\left(\frac{n}{2}\right) &= \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} && \text{question précédente, licite car } \frac{n}{2} \in \mathbb{R}_*^+ \\ &\leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \\ &\leq n \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(n) &= \ln(n) + n && n \geq 1, \text{ donc } \ln(n) \geq 0 \\ &\geq n \end{aligned}$$

D'où :

$$f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n)$$

Et, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_*^+$, on obtient :

$$\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.

➟Réflexe !
On compare les images pour obtenir un encadrement sur les antécédents : c'est toujours ainsi pour les suites implicites.

Petite remarque
Stricte croissance de f pour "désappliquer" f ou croissance de f^{-1} : les deux arguments sont valables.

5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **suite_x(n)** renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
1  import numpy as np
2
3  def suite_x(n):
4      a = ......
5      b = ......
6      while b-a>10**(-3):
7          m = ......
8          if np.log(m)+m ......
9              b=m
10         elif np.log(m)+m ......
11             a=m
12         else :
13             ......
14     return (a+b)/2
```

```
1  import numpy as np
2
3  def suite_x(n):
4      a=n/2
5      b=n
6      while b-a>10**(-3):
7          m=(a+b)/2
8          if np.log(m)+m>n:
9              b=m
10         elif np.log(m)+m<n:
11             a=m
12         else :
13             a,b=m,m
14     return (a+b)/2
```

Important !
On s'aide éventuellement d'un schéma pour ne pas se tromper en lignes 8 et 10... La fonction $x \longmapsto x + \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$...

Partie 2 : obtention d'un développement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

6. A l'aide du résultat de la question **4.b.**, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **4.b.** :

$$\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$$

D'où, par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$$

Puisque $n > 0$, on a ainsi :

$$\ln(n) - \ln(2) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$$

Et, puisque $n > 0$:

$$\frac{\ln(n)-\ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

On a ainsi établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

Or par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. D'où, par opération : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$.

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$.

- Ensuite, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = n - \ln(x_n)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$$

Ainsi, d'après ce qui précède :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$$

> **Conclusion :** $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

➟Réflexe !
On revient toujours à la définition en cas de manque d'inspiration sur une suite implicite...

7. On pose, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$.

7.a. Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n - x_n}{\ln(n)} - 1 \\ &= \frac{n - x_n - \ln(n)}{\ln(n)} \qquad \ln(x_n) + x_n = n \\ &= \frac{\ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.

7.b. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$?

D'après la question précédente : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. D'où ;

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$$

Et ainsi, par continuité de ln en 1 :

Petite remarque
Continuité de ln en 1 ou composition de limites : les deux arguments sont valables.

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = \ln(1) = 0$$

D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n - x_n}{\ln(n)} = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$$

> **Conclusion :** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

7.c. Prouver alors successivement :

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1 \quad ; \quad u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

- On a, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - x_n}{\ln(n)} \quad \ln(x_n) + x_n = n \\ &= \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$$

Petite remarque
On peut aussi utiliser l'encadrement de la question 4.b..

> **Conclusion :** $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

- On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} - 1 = 0$$

Ainsi, par un équivalent usuel :

$$\ln\left(1 + \frac{x_n}{n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1$$

> **Conclusion :** $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1$.

- D'après ce qui précède et la question 7.a., on obtient :

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{x_n}{n} - 1}{\ln(n)}$$

Or, d'après ce qui précède :

$$\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(x_n)$$

D'où :

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{x_n}{n} - 1}{\ln(x_n)}$$

Autrement dit :

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{x_n - n}{n}}{\ln(x_n)}$$

Et comme, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, $\ln(x_n) + x_n = n$, on obtient :

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{-\ln(x_n)}{n}}{\ln(x_n)}$$

> **Conclusion :** $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$.

8. En déduire que :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

D'après la question précédente :

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

Autrement dit :

$$u_n - 1 = \frac{-1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Autrement dit :

$$\frac{n - x_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et donc :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Important !
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$
- On travaille sur cette écriture car elle autorise les sommes, contrairement aux équivalents.

> **Conclusion :** $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Exercice 4 (EDHEC 2016 E)

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $]0,1[$.

1. 1.a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;x]$. On a, par changement d'indice $i = k-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} t^{i} \\ &= \frac{1-t^n}{1-t} \quad t \neq 1\text{, car } x \in [0;1[\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0;x]$, $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.

1.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in [0;x],\ \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$$

D'où, en intégrant de 0 à x, licite car la fonction $t \longmapsto \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$ est polynomiale donc continue sur le segment $[0;x]$, on obtient :

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on a :

- d'une part :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} dt &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt \quad \forall k \in [\![1;n]\!],\ k-1 \neq -1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

- d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= \big[-\ln(1-t)\big]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

1.c. Établir par encadrement que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;x]$. On a :

$$0 \leq t \leq x$$

D'où :

$$0 \geq -t \geq -x$$

Et ainsi :

$$\underbrace{0 < 1-x}_{\text{car } x<1} \leq 1-t \leq 1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{1-t} \geq 1$$

✍ **Rédaction**

On peut se contenter d'un "licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0;x]$".

✓ **Rigueur !**

Si on avait $k=0$, il faudrait primitiver $t \longmapsto \frac{1}{t}$, qui se primitive autrement !

➠ **Réflexe !**

Pour encadrer une intégrale (resp. une somme), on cherche à encadrer l'intégrande (resp. le terme général)...

En particulier :

$$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

Or $t^n \geq 0$, d'où :

$$\frac{t^n}{1-x} \geq \frac{t^n}{1-t} \geq 0$$

On a donc établi :

$$\forall t \in [0; x], \quad \frac{t^n}{1-x} \geq \frac{t^n}{1-t} \geq 0$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $x > 0$:

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \geq 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt &= \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt \\ &= \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

On a finalement établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Or $x \in]0; 1[$, donc par opérations : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.

> **Conclusion :** par théorème d'encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

1.d. En déduire que la série $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ est convergente et que l'on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

D'après la question **1.b.** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Et d'après la question précédente :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

> **Conclusion :** la série $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ est convergente et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

★ Classique ! ★
Le résultat établi dans cette question 1. ainsi que la démarche mise en place sont classiques ; il faut s'entraîner autant que nécessaire.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geq m, \ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

Raisonnons par récurrence...

☞ Pour info...
On peut également faire sans... Voir ECG1 - Chapitre 8 - Exercice 5

- **Initialisation.** Pour $q = m$:
  On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} &= \binom{m}{m} \\ &= 1 \\ &= \binom{m+1}{m+1} \end{aligned}$$

  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $q \in [\![m; +\infty[\![$.

  Supposons que $\sum\limits_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$ et montrons que $\sum\limits_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \binom{q+2}{m+1}$.

  On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} &= \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} && \text{formule du triangle de Pascal} \\ &= \binom{q+2}{m+1} \end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall q \geq m,\ \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.

3. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

3.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que $S_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$ puis démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}\big([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k-j]\big)$$

Autrement dit : On doit démontrer : $\forall \omega \in \Omega,\ S_n(\omega) \in [\![n;+\infty[\![$

- Soit $\omega \in \Omega$.
  - Remarquons déjà que $S_n(\omega)$ est une somme d'entiers positifs non nuls, donc $S_n(\omega) \in \mathbb{N}^*$.
  - Ensuite, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $X_k(\Omega) = \mathbb{N}^*$. D'où :
  $$\forall k \in [\![1;n]\!],\ X(\omega) \geq 1$$
  Et ainsi, en sommant :
  $$S_n(\omega) \geq n$$

  Par conséquent :
  $$\forall \omega \in \Omega,\ S_n(\omega) \in [\![n;+\infty[\![$$

Petite remarque Question volontairement sur-rédigée...

Conclusion : $S_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$.

- Soit ensuite $k \in [\![n+1;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales avec $\big([S_n = j]\big)_{j\in[\![n;+\infty[\![}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{j\geq n} \mathbb{P}\big([S_{n+1} = k] \cap [S_n = j]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{n+1} = k]) &= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_{n+1} = k] \cap [S_n = j]\big) \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\big([S_n + X_{n+1} = k] \cap [S_n = j]\big) \\
&= \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_{n+1} = k-j] \cap [S_n = j]\big) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}\big([X_{n+1} = k-j] \cap [S_n = j]\big)
\end{aligned}$$

$X_{n+1}(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $[X_{n+1} = k-j] = \varnothing$ si $k-j \leq 0$, cad si $j \geq k$ et décomposition licite car $k \geq n+1$

Conclusion : $\forall k \in [\![n+1;+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}\big([S_n = j] \cap [X_{n+1} = k-j]\big)$.

3.b. En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

✘ Attention ! Attention à la quantification sur k ici ! Il ne peut pas être quantifié avant la récurrence puisque son ensemble d'appartenance dépend de n...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  $S_1 = X_1$ et $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(x)$, d'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}([S_1 = k]) &= x(1-x)^{k-1} \\
  &= \binom{k-1}{0} x^1 (1-x)^{k-1}
  \end{aligned}$$
  L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons : $\forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$.

  Montrons : $\forall k \in [\![n+1,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_{n+1} = k]) = \binom{k-1}{n} x^{n+1} (1-x)^{k-n-1}$.

Soit $k \in [\![n+1;+\infty[\![$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) &= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}\big([S_n=j]\cap[X_{n+1}=k-j]\big) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \mathbb{P}([S_n=j])\mathbb{P}([X_{n+1}=k-j]) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{k-1}{n-1} x^n(1-x)^{j-n}\mathbb{P}([X_{n+1}=k-j]) \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{k-1}{n-1} x^n(1-x)^{j-n}x(1-x)^{k-j-1} \\
&= \sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\sum_{j=n}^{k-1} \binom{j-1}{n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\sum_{i=n-1}^{k-2} \binom{i}{n-1} \\
&= x^{n+1}(1-x)^{k-n-1}\binom{k-1}{n}
\end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $X_1+\dots+X_n$ (cad S_n) et X_{n+1} sont indépendantes

hypothèse de récurrence, licite car $j \geq n$

$X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{G}(x)$

$i = j-1$

question 2., licite car $n-1 \in \mathbb{N}$ et $k-2 \geq n-1$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![n,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n=k]) = \binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$.

3.c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3.a., on a déjà $S_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$. Et, d'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ [S_n=k] \neq \varnothing$$

D'où :

$$S_n(\Omega) = [\![n;+\infty[\![$$

Ainsi, la famille $\big([S_n=k]\big)_{k\in[\![n;+\infty[\![}$ est un système complet d'évènements et donc, la série $\sum\limits_{k\geq n}\mathbb{P}([S_n=k])$ est convergente de somme égale à 1.
D'après la question précédente, on a ainsi :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n} = 1$$

Et puisque $x \neq 0$, on divise par x^n...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$.

Petite remarque
La justification du fait que $S_n(\Omega) = [\![n;+\infty[\![$ n'est pas exigible et n'est pas nécessaire pour mentionner que $\big([S_n=k]\big)_{k\in[\![n;+\infty[\![}$ est un sce ; l'inclusion $S_n(\Omega) \subset [\![n;+\infty[\![$ suffit (au pire, il y a des évènements vides dans le sce).

Partie 2 : Étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)}$$

4. 4.a. Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que $p \in]0;1[$, donc :

- $q = 1-p > 0$ et ainsi $q^k > 0$
- $\ln(p) < 0$

D'où :

$$\frac{-q^k}{k\ln(p)} > 0$$

Conclusion : la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

4.b. Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente de somme égale à 1.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-q^k}{k\ln(p)} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k}\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1.d.**, avec $x = q \in]0;1[$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{q^k}{k}$ est convergente de somme égale à $-\ln(1-q)$.

Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \times \big(-\ln(1-q)\big) \qquad q = 1-p \\ &= 1\end{aligned}$$

✓ Rigueur !
On justifie la convergence AVANT le calcul de la somme infinie...

> **Conclusion :** la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est convergente de somme égale à 1.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = u_k$$

5. 5.a. Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

- On sait que :

  X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente
  si, et seulement si, la série $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}([X=k])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{-q^k}{\ln(p)} \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} q^k\end{aligned}$$

  Or $q \in]0;1[$, donc la série $\sum_{k\geq 1} q^k$ est une série géométrique convergente.
  Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}([X=k])$ est convergente.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^k - 1\right) \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \left(\frac{1}{1-q} - 1\right) \qquad q = 1-p \\ &= \frac{-1}{\ln(p)} \frac{q}{p} \\ &= \frac{-q}{p\ln(p)}\end{aligned}$$

✘ Attention !
La somme débute à 1...

> **Conclusion :** X possède une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{-q}{p\ln(p)}$.

5.b. Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}$.

- Par théorème de transfert :

$$\begin{array}{lll} X \text{ admet un moment d'ordre 2} & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{k \in X(\Omega)} k^2 \mathbb{P}([X = k]) \text{ est absolument convergente} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{la série } \sum\limits_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}([X = k]) \text{ est convergente, car il s'agit d'une} \\ & & \text{série à terme général positif} \end{array}$$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} k^2 \mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-kq^k}{\ln(p)} \\ &= \frac{-q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \end{aligned}$$

Or $q \in]0;1[$, donc la série $\sum\limits_{k \geq 1} kq^{k-1}$ est une série géométrique dérivée convergente.

Par conséquent, la série $\sum\limits_{k \geq 1} k^2 \mathbb{P}([X = k])$ est convergente.

- On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \frac{-q}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= \frac{-q}{\ln(p)} \frac{1}{(1-q)^2} \qquad p = 1 - q \\ &= \frac{-q}{p^2 \ln(p)} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \frac{-q}{p^2 \ln(p)} - \Big(\frac{-q}{p \ln(p)}\Big)^2 \\ &= \frac{-q}{p^2 \ln(p)} - \frac{q^2}{p^2 \ln(p)^2} \\ &= \frac{-q \ln(p) - q^2}{p^2 \ln(p)} \\ &= \frac{-q\big(\ln(p) + q\big)}{\big(p \ln(p)\big)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : X possède une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q\big((q + \ln(p)\big)}{\big(p \ln(p)\big)^2}$.

6. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X = k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

6.a. A l'aide de la question 1., montrer que :

$$\mathbb{P}([Y = 0]) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geq 1} \mathbb{P}\big([Y = 0] \cap [X = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=0]\cap[X=k]\big) && \text{↲ } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=0])\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ln(p)} \binom{k}{0} p^0 q^{k-0}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ln(p)} q^k\\
&= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{2k}}{k}\\
&= \frac{-1}{\ln(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^2)^k}{k} && \text{↲ question 1.d., licite car } q^2\in]0;1[\\
&= \frac{-1}{\ln(p)} \big(-1\ln(1-q^2)\big)\\
&= \frac{1}{\ln(p)} \ln\big((1-q)(1+q)\big) && \text{↲ } 1-q>0 \text{ et } 1+q>0\\
&= \frac{\ln(1-q)+\ln(1+q)}{\ln(p)} && \text{↲ } p=1-q\\
&= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}
\end{aligned}$$

✘ Attention !
$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ seulement si a et b sont strictement positifs !

Conclusion : $\mathbb{P}([Y=0]) = 1+\dfrac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$.

6.b. Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{p^n q^n}{n\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question 3., l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)}$$

- Soit $(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
  - Si $n>k$, on a déjà : $\binom{k}{n} = 0 = \binom{k-1}{n-1}$, d'où le résultat.
  - Si $n\leq k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{k}{n}}{k} &= \frac{1}{k}\,\frac{k!}{n!(k-n)!}\\
&= \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!}\\
&= \frac{1}{n}\,\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}\\
&= \frac{1}{n}\,\frac{(k-1)!}{(n-1)!\big(k-1-(n-1)\big)!}\\
&= \frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k\geq 1} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=n]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=n]\big) && \text{↲ } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k])\neq 0\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) && \text{↲ } \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) = 0 \text{ si } n>k\\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{-q^k}{k\ln(p)} \binom{k}{n} p^n q^{k-n}\\
&= \frac{-p^n q^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k}\binom{k}{n} (q^2)^{k-n} && \text{↲ point précédent}\\
&= \frac{-p^n q^n}{\ln(p)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n}\binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n}
\end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{-p^n q^n}{n\ln(p)} q^2 \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (q^2)^{k-n} && \text{question 3.c., licite car } 1-q^2 \in]0;1[\\
&= \frac{-p^n q^n}{n\ln(p)} q^2 \frac{1}{(1-q^2)^n} && p = 1-q \\
&= \frac{-p^n q^n}{n\ln(p)} q^2 \frac{1}{p^n(1+q)^n} \\
&= \frac{-q^n}{n\ln(p)(1+q)^n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Y=n]) = -\dfrac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)}$.

6.c. Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) = 1$.

Petite remarque

L'énoncé ne demande pas de justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}([Y=n])$...

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) &= \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) && \text{questions précédentes} \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)} \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{q}{1+q}\right)^n && \text{question 1.d., licite car } q>0 \text{ donc } \frac{q}{1+q} \in]0;1[\\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \left(-\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \left(-\ln\left(\frac{1}{1+q}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)} - \frac{1}{\ln(p)} \ln(1+q) \\
&= 1
\end{aligned}$$

✘ Attention !

La loi de Y est donnée en deux cas... qui ne se regroupent pas !

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) = 1$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★