Devoir surveillé 1

Samedi 23 septembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Carpe Diem : profitez du jour présent mes amis, que votre vie soit extraordinaire."
John Keating [Le cercle des poètes disparus]

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. 1.a. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   1.b. Étudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les limites obtenues.
   1.c. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathscr{T}_0$.
   1.d. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}_0$.
   1.e. En utilisant les résultats précédents, représenter, dans un repère judicieusement choisi, l'allure de $\mathscr{C}_f$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$.
   2.a. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$.
   2.b. En déduire par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   2.c. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
   2.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   2.e. En déduire, en utilisant le résultat de la question 2.b. : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   2.f. 2.f.i. Justifier que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$: $\dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$.
   2.f.ii. En déduire : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$.
   2.g. Déduire des questions précédentes : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ n+1 \leq \dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.
   2.h. Conclure en donnant un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$ puis déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 2

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X; Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.
   1.b. Établir :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$
   1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1+X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{array}\right.$$
   2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction **Python** suivante.

```python
import numpy.random as rd
def mystere(p):
    n=1
    while rd.random()<1-p:
        n=n+1
    return n
```

   2.b. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel p de $]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T.
   Ce programme pourra utiliser la fonction `mystere` précédente et on rappelle qu'en **Python**, l'exécution de `a%b` renvoie le reste de la division euclidienne de `a` par `b`.
   2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.
   2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les solutions sur $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation :

$$(E_n) : \ln(x) + x = n$$

À cet effet, on introduit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) + x$, définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

Partie 1 : existence des solutions de (E_n)

1. **1.a.** Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
   1.b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ sur $\mathbb{R}$ et donner le tableau de variations de f^{-1}.
   1.c. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une solution et une seule notée x_n.
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
3. Donner la valeur de x_1.
4. **4.a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x) < x$.
   4.b. Prouver que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
5. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de **suite_x(n)** renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
import numpy as np

def suite_x(n):
    a = ......
    b = ......
    while b-a>10**(-3):
        m = ......
        if np.log(m)+m ......
            b=m
        elif np.log(m)+m ......
            a=m
        else :
            ......
    return (a+b)/2
```

Partie 2 : obtention d'un développement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

6. A l'aide du résultat de la question 4.b., montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$. En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
7. On pose, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$.
   7.a. Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$.
   7.b. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$?
   7.c. Prouver alors successivement :
$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1 \quad ; \quad u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$
8. En déduire que :
$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Exercice 4

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $]0,1[$.

1. **1.a.** Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$.
   1.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

1.c. Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

1.d. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ est convergente et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q \geq m,\ \sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

3.a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Établir que $S_n(\Omega)\subset [\![n;+\infty[\![$ puis démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) = \sum_{j=n}^{k-1}\mathbb{P}\big([S_n=j]\cap[X_{n+1}=k-j]\big)$$

3.b. En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k\in [\![n,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n=k]) = \binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

3.c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

Partie 2 : Étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q=1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln(p)}$$

4. **4.a.** Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

4.b. Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}u_k$ est convergente de somme égale à 1.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k]) = u_k$$

5. **5.a.** Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

5.b. Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{-q(q+\ln(p))}{(p\ln(p))^2}$.

6. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'évènement $[X=k]$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

6.a. A l'aide de la question 1., montrer que :

$$\mathbb{P}([Y=0]) = 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

6.b. Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{p^nq^n}{n\ln(p)}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\left(q^2\right)^{k-n}$$

En déduire, grâce à la question 3., l'égalité :

$$\mathbb{P}([Y=n]) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln(p)}$$

6.c. Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([Y=n]) = 1$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★