Devoir surveillé 2

Vendredi 6 octobre 2023 - 1h50

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Aucune violence n'a jamais ajouté à la grandeur des hommes."
Jean Guéhenno

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 (Inspiré de Ecricome 2020 E)

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et on note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Pour tout réel a, on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Étude du cas où $a = 0$.** Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

1.a. Démontrer que M n'est pas inversible.

On a :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 + C_3 = -C_2$.

Conclusion : la matrice M n'est pas inversible.

1.b. En déduire une valeur propre de M puis déterminer une base du sous-espace propre associé composée d'un unique vecteur, noté U_1.

- Puisque M n'est pas inversible, 0 est valeur propre de M.
- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} X \in \ker(M) & \iff & MX = 0_{n,1} \\ & \iff & \dots \\ & \iff & X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où :

$$\ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi :

◇ génératrice de $\ker(M)$,
◇ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(M)$.

Autre méthode...
On peut procéder autrement :
• puisque $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(M)$.
• la dimension de $\ker(M)$ s'obtient grâce au théorème du rang après avoir justifié que $\mathrm{rg}(A) = 2$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi une famille de $\ker(M)$ qui est libre (car...) et "de bon cardinal". Il s'agit donc d'une base de $\ker(M)$.

Conclusion : 0 est valeur propre de M et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace propre associé.

On prend $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.c. Démontrer que 1 est valeur propre de M puis déterminer une base du sous-espace propre associé composée de deux vecteurs notés U_2 et U_3.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rcl} MX = X & \iff & (M - I_3)X = 0_{n,1} \\ & \iff & x - y - z = 0 \\ & \iff & X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où :

$$\ker(M - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Autre méthode...
On peut procéder autrement :
• on justifie que $\mathrm{rg}(M - I_3) = 1$, donc 1 est valeur propre de M...
• par théorème du rang, on obtient aussi que $\ker(M - I_3)$ est de dimension 2
• on remarque ensuite (même principe que dans la question précédente) que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\ker(M - I_3)$...
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi une famille de $\ker(M - I_3)$ qui est libre (car...) et de "bon cardinal".

Par conséquent : $\ker(M - I_3) \neq \{0_{n,1}\}$. Donc 1 est valeur propre de M et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est ainsi :

- génératrice de $\ker(M - I_3)$,
- libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(M - I_3)$.

> **Conclusion :** 1 est valeur propre de A et la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace propre associé.
> On prend $U_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

1.d. Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- On sait que :
  - ◇ (U_1) est une famille libre de $E_0(M)$, car c'en est même une base (avec $E_0(M) = \ker(M)$),
  - ◇ (U_2, U_3) est une famille libre de $E_1(M)$, car c'en est même une base (avec $E_1(M) = \ker(M - I_3)$).

  La famille (U_1, U_2, U_3) est ainsi la concaténation de familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.
  Conclusion : la famille (U_1, U_2, U_3) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- $\text{Card}(U_1, U_2, U_3) = 3 = \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

> **Petite remarque**
> Oui, on peut aussi le faire à la main... Mais le jour où on devra le faire avec une famille de cardinal 47, on sera bien contents d'avoir cette propriété !

> **Conclusion :** La famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.e. En déduire que M est diagonalisable puis donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.
D'après la question précédente, il existe une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M. La matrice M est donc diagonalisable et, en posant : $P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (qui est inversible car c'est une matrice de passage [la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base (U_1, U_2, U_3)]) et $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, on a $M = PDP^{-1}$.

1.f. Déterminer la matrice P^{-1}.
Puisque P est une matrice de passage, elle est inversible.
La méthode habituelle donne : $P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

2. Étude du cas où $a = 1$. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.

2.a. Écrire la matrice M puis calculer $(M - I_3)^2$.

- $M = \begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
- Sans difficulté, on trouve : $(M - I_3)^2 = 0_3$.

2.b. En déduire la seule valeur propre possible de M. Justifier que ce réel est bien valeur propre de M.

- D'après la question précédente, le polynôme $(X - 1)^2$ est annulateur de M. Or, 1 est la seule racine du polynôme $(X - 1)^2$. D'où :
$$\text{Sp}(M) \subset \{1\}$$
  Autrement dit : 1 est la seule valeur propre possible de M.
- Ensuite, on a :
$$M - I_3 = \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$
  Puisqu'elle contient une colonne nulle, cette matrice n'est pas inversible. D'où :
$$\ker(M - I_3) \neq \{0_{3,1}\}$$

> **Autre méthode...**
> On peut également raisonner sur le rang de la matrice $M - I_3$, qui n'est clairement pas égal à 3.
> Ou trouver un vecteur X non nul tel que $AX = X$ (autrement dit tel que $(A - I_3)X = 0_{3,1}$)...
> Bref, plusieurs méthodes possibles !

> **Conclusion :** 1 est bien valeur propre de M.

2.c. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la matrice M n'est pas diagonalisable.
Supposons que M est diagonalisable.
Il existe alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

- la diagonale de D est remplie par des valeurs propres de M
- $M = PDP^{-1}$

Mais 1 est la seule valeur propre de M. D'où : $D = I_3$. Et ainsi :

$$\begin{aligned} M &= PDP^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

D'où la contradiction !

Conclusion : la matrice M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (EDHEC 2004 E)

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec la même probabilité), les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun PILE n'est obtenu sur ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend la valeur du rang du premier PILE obtenu.
Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on note P_j l'évènement "obtenir PILE au j-ième lancer" et $F_j = \overline{P_j}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul_Z(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.

```python
import numpy.random as rd

def simul_Z(n):
    for k in range(1,n+1):
        if rd.random()<0.5:
            return k
    return 0
```

♣ Méthode !
Montrons :
$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ k \in Z(\Omega)$$
Pour montrer que $k \in Z(\Omega)$, il faut montrer l'existence de $\omega \in \Omega$ telle que $k = Z(\omega)$. Autrement dit, il faut trouver une issue réalisant l'évènement $[Z = k]$.

2. 2.a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
Montrons que $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Raisonnons pas double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque Z prend la valeur 0 ou la valeur du rang du premier PILE obtenu sur n lancers de pièce, on a $Z(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.

$\boxed{\supset}$ Montrons que $[\![0;n]\!] \subset Z(\Omega)$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

- ◇ Si $k = 0$: l'issue consistant à n'obtenir que des FACE réalise l'évènement $[Z = 0]$.
- ◇ Si $k \in [\![1;n]\!]$: l'issue (que l'on assimile à un n-uplet) $(\underbrace{F,\dots,F}_{k-1}, P, \dots, P)$ réalise l'évènement $[Z = k]$ (même si $k = 1$ et que l'on a alors aucun FACE avant le premier PILE).

Dans les deux cas, on a $[Z = k] \neq \varnothing$, donc $k \in Z(\Omega)$.

✓ Rigueur !
Une issue consiste ici en n lancers ! Il serait incorrect que le descriptif de l'issue s'arrête à l'obtention du premier PILE. Pour la définir entièrement, il faut préciser les n tirages.
Ou on pourrait dire "**une** issue consistant à obtenir le premier PILE au tirage k réalise l'évènement $[Z = k]$".

Conclusion : $Z(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

2.b. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}([Z = k])$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

- Si $k = 0$:

  $[Z = 0]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient aucun PILE sur les n lancers
  si, et seulement si, on obtient n FACE sur les n lancers

  D'où :
  $$[Z = 0] = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$$
  Puis, par indépendance des lancers, on obtient :
  $$\mathbb{P}([Z = 0]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Si $k \in [\![1;n]\!]$:
  - ◇ Si $k = 1$, on a directement : $[Z = 1] = P_1$ et donc $\mathbb{P}([Z = 1]) = \frac{1}{2}$.
  - ◇ Si $k \geq 2$:

    $[Z = k]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier PILE au lancer numéro k
    si, et seulement si, les lancers 1 à $k-1$ ont donné FACE et le lancer k a donné PILE

    D'où :
    $$[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap P_k$$
    Puis, par indépendance des lancers, on obtient :
    $$\mathbb{P}([Z = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Petite remarque
Il n'est pas nécessaire d'exclure le cas $k = 1$ si on prend comme convention $\bigcap_{i=1}^{0} F_i = \Omega$...
- une intersection d'évènements indexée sur un ensemble vide est Ω (le neutre pour $\cap$)
- une union d'évènements indexée sur un ensemble vide est $\varnothing$ (le neutre pour $\cup$).

On remarque que les deux cas se regroupent...

Conclusion : $\mathbb{P}([Z = 0]) = \frac{1}{2^n}$ et, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{2^k}$.

2.c. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z=k]) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([Z=0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z=k]) \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad \frac{1}{2}\neq 1 \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

✘ Attention !

Pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, deux possibilités :
- formule directe, sans oublier de multiplier par le premier terme !
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=0}^{n} -1$...

2.d. Démontrer : $\forall x \in [0;1[,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

Considérons la fonction f définie sur $[0;1[$ par : $\forall x\in[0;1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

- f est une fonction polynômiale, elle est donc dérivable sur $[0;1[$.
- Par linéarité de la dérivation, on a déjà :

$$\forall x\in[0;1[,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

- Mais également, pour tout $x\in[0;1[$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} x^k - 1 \qquad x\neq 1 \\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

En dérivant f sous cette expression, on obtient, pour tout $x\in[0;1[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

♡ Astuce du chef ! ♡

Comme précédemment, deux façons de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$... on préfère celle façon ici, qui rend le calcul de la dérivée plus rapide.

Conclusion : $\forall x\in[0;1[,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

2.e. En déduire que Z admet une espérance et la déterminer.
Puisque $Z(\Omega)$ est fini, Z admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}([Z=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([Z=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{question précédente, licite car } \frac{1}{2}\in[0;1[\\
&= \frac{1}{2}\frac{n\frac{1}{2^{n+1}}-(n+1)\frac{1}{2^n}+1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= 2\left(n\frac{1}{2^{n+1}}-(n+1)\frac{1}{2^n}+1\right) \\
&= 2+\frac{n}{2^n}-\frac{2n+2}{2^n} \\
&= 2-\frac{n+2}{2^n}
\end{aligned}$$

Conclusion : Z possède une espérance et $\mathbb{E}(Z) = 2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

Petite remarque

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(Z) = 2$: on retrouve l'espérance d'une VA suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$... C'est cohérent !

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de pièce décrits en début d'exercice la variable aléatoire Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire successivement et avec remise k balles dans l'urne U_k.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de l'expérience.
Si la variable aléatoire Z a pris la valeur 0, alors on considère qu'aucun tirage de boule n'est effectué et que X prend la valeur 0.

3. En utilisant la fonction créée en question 1., écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simul_X(n)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```python
def simul_X(n):
    k=simul_Z(n)
    X=0
    for i in range(k): #k tirages
        if rd.random()<k/n: #k=nb blanches, n=nb balles
            X=X+1
    return X
```

4. Justifier soigneusement que $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
Raisonnons pas double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Puisque X prend la valeur du nombre de balles blanches obtenues et que les urnes contiennent entre 0 et n balles blanches, on a $X(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
$\boxed{\supset}$ Montrons que $[\![0;n]\!] \subset X(\Omega)$. Soit $k \in [\![0;n]\!]$.
   - Si $k=0$: si on obtient 0 PILE lors des lancers, on pioche dans l'urne U_0 qui ne contient aucune balle blanche, et ainsi X prendra la valeur 0. Donc $[X=0] \neq \varnothing$.
   - Si $k \in [\![1;n]\!]$: l'issue consistant à effectuer les tirages $(\underbrace{F, \ldots, F}_{k-1}, P, \ldots, P)$, puis à piocher les k balles blanches de l'urne U_k réalise l'évènement $[X=k]$. Donc $[X=k] \neq \varnothing$.

Dans les deux cas, on a $[X=k] \neq \varnothing$, donc $k \in X(\Omega)$.

Conclusion : $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

> **♣ Méthode !**
> Montrons :
> $$\forall k \in [\![0;n]\!],\ k \in X(\Omega)$$
> Pour montrer que $k \in X(\Omega)$, il faut montrer l'existence de $\omega \in \Omega$ telle que $k = X(\omega)$. Autrement dit, il faut trouver une issue réalisant l'évènement $[X=k]$.

> **✓ Rigueur !**
> Une issue est un résultat de l'expérience. Il faut donc décrire ce qu'il s'est passé **du début à la fin** de l'expérience pour entièrement définir une issue.

5. 5.a. Déterminer, en distinguant les cas $i=0$ et $i \in [\![1;n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i])$.
Soit $i \in [\![0;n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z=0]$ réalisé. Autrement dit, on a effectué que des FACE aux lancers de pièce et, dans ce cas, l'énoncé indique que X prend la valeur 0. D'où :
   - si $i=0$: $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) = 1$;
   - si $i \in [\![1;n]\!]$: il est alors impossible d'obtenir i balles blanches sans effectuer de tirage, donc $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) = 0$.

Conclusion : pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{si } i \in [\![1;n]\!] \end{cases}$.

5.b. Déterminer, en distinguant les cas $i=n$ et $i \in [\![0;n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i])$.
Soit $i \in [\![0;n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z=n]$ réalisé. On pioche donc n balles dans l'urne U_n, qui n'est composée que de balles blanches. X prendra donc nécessairement la valeur n. D'où :
   - si $i=n$: $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n]) = 1$;
   - si $i \in [\![0;n-1]\!]$: il est alors impossible d'obtenir i balles blanches, donc $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i]) = 0$.

Conclusion : pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i] = \begin{cases} 1 & \text{si } i=n \\ 0 & \text{si } i \in [\![0;n-1]\!] \end{cases}$.

5.c. Démontrer que, pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i] = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0;k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$.

Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Soit $i \in [\![0;n]\!]$. Supposons l'évènement $[Z=k]$ réalisé. On pioche donc k balles dans l'urne U_k qui contient k balles blanches sur n balles au total.
   - si $i > k$: il est alors impossible d'obtenir i balles blanches en seulement k tirages... D'où : $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = 0$.
   - si $i \in [\![0;k]\!]$:
     - Dans ces conditions, cette partie de l'expérience consiste alors en la répétition de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirages avec remise) donc le succès "obtenir une balle blanche" est de probabilité $\frac{k}{n}$.
     - X compte le nombre de succès ainsi obtenus...

   Par conséquent, la loi conditionnelle de X sachant l'évènement $[Z=k]$ est la loi binomiale de paramètres k et $\frac{k}{n}$. D'où :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i] = \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$$

> **Petite remarque**
> On détaille bien cette partie, d'autant plus que le résultat est donné...

Conclusion : pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = \begin{cases} \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0;k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}.$$

6. 6.a. Démontrer que $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Z=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=0]) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\big([Z=k]\cap[X=0]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) \\
&= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=0]) + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=0]) \\
&= \frac{1}{2^n}\times 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\binom{k}{0}\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-0} + \frac{1}{2^n}\times 0 \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^k
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0$

✘ Attention !
Il y a 3 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=0])$...

questions 2.b., 5.a., 5.b., 5.c.

Conclusion : $\mathbb{P}([X=0]) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$.

6.b. Démontrer que $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Z=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=n]) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\big([Z=k]\cap[X=n]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) \\
&= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=n]) + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=n]) \\
&= \frac{1}{2^n}\times 0 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\times 0 + \frac{1}{2^n}\times 1 \\
&= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0$

✘ Attention !
Il y a 3 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=n])$...

questions 2.b., 5.a., 5.b., 5.c.

Conclusion : $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{1}{2^n}$.

6.c. Exprimer, pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([X=i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Soit $i \in [\![1;n-1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Z=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=i]) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\big([Z=k]\cap[X=i]\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) \\
&= \mathbb{P}([Z=0])\mathbb{P}_{[Z=0]}([X=i]) + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}([Z=k])\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) + \mathbb{P}([Z=n])\mathbb{P}_{[Z=n]}([X=i]) \\
&= \frac{1}{2^n}\times 0 + \sum_{k=i}^{n-1}\frac{1}{2^k}\times\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} + \frac{1}{2^n}\times 0 \\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([Z=k]) \neq 0$

✘ Attention !
Il y a 4 cas pour les valeurs de $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i])$...

questions 2.b., 5.a., 5.b., 5.c. car $i < n$ et si $k < i$, $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X=i]) = 0$...

Conclusion : $\mathbb{P}([X=i]) = \displaystyle\sum_{k=i}^{n-1}\frac{1}{2^k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$.

7. Vérifier, à partir des expressions trouvées à la question précédente, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) = 1$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) &= \mathbb{P}([X=0]) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=i]) + \mathbb{P}([X=n]) \\
&= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\
&= \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}
\end{aligned}$$

questions précédentes

Or :

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Si manque d'inspiration pour calculer une somme double (et surtout si l'on ne sait pas calculer celle de l'intérieur...), alors on intervertit les deux sommes !

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} &= \sum_{1 \leq i \leq k \leq n-1} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \left(1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k
\end{aligned}$$

formule du binôme de Newton

$\frac{1}{2} \neq 1$

En reprenant le calcul précédent, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X=i]) &= \frac{2}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★