Devoir surveillé 2

Vendredi 6 octobre 2023 - 1h50

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Aucune violence n'a jamais ajouté à la grandeur des hommes."
Jean Guéhenno

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et on note I_3 la matrice identité d'ordre 3.
Pour tout réel a, on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Étude du cas où $a = 0$.** Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
   - 1.a. Démontrer que M n'est pas inversible.
   - 1.b. En déduire une valeur propre de M puis déterminer une base du sous-espace propre associé composée d'un unique vecteur, noté U_1.
   - 1.c. Démontrer que 1 est valeur propre de M puis déterminer une base du sous-espace propre associé composée de deux vecteurs notés U_2 et U_3.
   - 1.d. Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - 1.e. En déduire que M est diagonalisable puis donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
   - 1.f. Déterminer la matrice P^{-1}.
2. **Étude du cas où $a = 1$.** Dans cette question, on suppose que $a = 1$.
   - 2.a. Écrire la matrice M puis calculer $(M - I_3)^2$.
   - 2.b. En déduire la seule valeur propre possible de M. Justifier que ce réel est bien valeur propre de M.
   - 2.c. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la matrice M n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec la même probabilité), les lancers étant supposés indépendants. On note Z la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun PILE n'est obtenu sur ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend la valeur du rang du premier PILE obtenu.
Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on note P_j l'évènement "obtenir PILE au j-ième lancer" et $F_j = \overline{P_j}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul_Z(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.
2.
   - 2.a. Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
   - 2.b. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}([Z = k])$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
   - 2.c. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}([Z = k]) = 1$.
   - 2.d. Démontrer : $\forall x \in [0; 1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.
   - 2.e. En déduire que Z admet une espérance et la déterminer.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de pièce décrits en début d'exercice la variable aléatoire Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire successivement et avec remise k balles dans l'urne U_k.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de l'expérience.
Si la variable aléatoire Z a pris la valeur 0, alors on considère qu'aucun tirage de boule n'est effectué et que X prend la valeur 0.

3. En utilisant la fonction créée en question 1., écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul_X(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
4. Justifier soigneusement que $X(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
5.
   - 5.a. Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $i \in [\![1; n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}([X = i])$.
   - 5.b. Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $i \in [\![0; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = i])$.
   - 5.c. Démontrer que, pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{[Z=k]}([X = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } i \in [\![0; k]\!] \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$.
6.
   - 6.a. Démontrer que $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{1}{2^n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k$.
   - 6.b. Démontrer que $\mathbb{P}([X = n]) = \dfrac{1}{2^n}$.
   - 6.c. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([X = i])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
7. Vérifier, à partir des expressions trouvées à la question précédente, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}([X = i]) = 1$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★