Concours blanc - Épreuve 1

Samedi 18 novembre - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Chaque homme sait une quantité prodigieuse de choses qu'il ignore qu'il sait."
Paul Valéry

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 (Inspiré de : Ecricome 2016 E)

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E = \{M(x,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.

On a :

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}(A, B) \end{aligned}$$

Puisque $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on an déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De surcroît, la famille (A, B) est :

- génératrice de E d'après ce qui précède,
- libre car seulement constituée de deux matrices non colinéaires.

Conclusion : la famille (A, B) est une base de E et ainsi $\dim(E) = \mathrm{Card}(A, B) = 2$.

2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés.

- On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et on remarque que $(A - I_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, ainsi : $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que 1 est valeur propre de A et que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.
- On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et on remarque que $(A - 2I_3)\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, ainsi : $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que 2 est valeur propre de A et que $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.
- On a $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et on remarque que $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$, ainsi : $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que 1 est valeur propre de A et que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

♣ Méthode !
Plusieurs méthodes possibles ici... On pourrait également résoudre des systèmes (sans oublier, après résolution, de mentionner que le réel en question est bien valeur propre) pour obtenir une famille génératrice de chaque sous-espace propre.

Conclusion : 1,2 et 3 sont valeurs propres de A ; et chaque sous-espace propre associé est de dimension au moins 1. Mais, on sait : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) = 3$. On en déduit, par saturation, que chaque sous-espace propre est de dimension égal à 1. Puisque l'on a exhibé un vecteur non nul de chaque, on en a une base.

☞ Rappel...
Par définition, un sous-espace propre est toujours de dimension au moins 1 !

Conclusion : 1 est valeur propre de A et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$;

2 est valeur propre de A et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$;

3 est valeur propre de A et $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

3. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et préciser une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ telle que :

$$A = PD_AP^{-1}, \quad \text{où} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Notons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. On a :
  - $\mathscr{B}$ est libre car constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes,
  - $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

  La famille $\mathscr{B}$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

  Conclusion : A est diagonalisable.

- Posons alors $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, qui est inversible car il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathscr{B}$.
  Et, d'après la formule de changement de base, on a :

$$A = PD_AP^{-1}$$

☞ Rappel... L'argument général est "la concaténation de familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes est une famille libre".

4. Déterminer P^{-1}.

Méthode habituelle... On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Calculer BP. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B = PD_BP^{-1}$$

♣ Méthode ! On peut bien évidement calculer $P^{-1}BP$... Je montre ici une autre méthode (si la matrice P^{-1} n'avait pas été calculée en question précédente par exemple...).

On a :

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque également que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= PD_B \end{aligned} \qquad \text{en posant } D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mais comment fait-il ?! Ce n'est "que" l'interprétation du produit matriciel qui permet de le voir...

D'où :

$$BP = PD_B$$

Et comme P est inversible :

$$B = PD_BP^{-1}$$

Conclusion : $B = PD_BP^{-1}$, avec $D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= xA + yB \\ &= xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} && \text{questions 3. et 5.} \\ &= P(xD_A + yD_B)P^{-1} \\ &= PD(x, y)P^{-1} && \text{en posant } D(x, y) = xD_A + yD_B \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque $D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente, $M(x, y)$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$.
Donc les valeurs propres de $M(x, y)$ sont : x, $2x - y$ et $3x - y$.
Et on sait que $M(x, y)$ est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas valeur propre de $M(x, y)$...

Conclusion : $M(x, y)$ est inversible si, et seulement si : $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x - y \neq 0 \\ 3x - y \neq 0 \end{cases}$.

8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une matrice diagonale D vérifiant $M = PDP^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} M^2 \in E &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ M^2 = M(x,y) \\ &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (PDP^{-1})^2 = M(x,y) \\ &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ PD^2P^{-1} = PD(x,y)P^{-1} \quad \text{question 6.} \\ &\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ D^2 = D(x,y) \end{aligned}$$

Petite remarque

Bien entendu, on peut calculer B^2 et A^2 puis traiter la suite de façon analogue (on remarquerait que $B^2 = -B$ et il faudrait résoudre $A^2 = M(x,y)$...). Mais la méthode proposée ici est nettement moins calculatoire (il fallait y penser...) !

- On sait que $B = PD_BP^{-1}$ et on a :

$$\begin{aligned} D_B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= D(0,-1) \end{aligned}$$

  Ainsi, d'après l'équivalence établie ci-dessus, $B^2 \in E$.

- On sait que $A = PD_AP^{-1}$ et :

$$D_A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} D_A^2 = D(x,y) &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 9 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -2 \\ y & = & -6 \end{array} \right. \end{aligned}$$

  Ce système n'a pas de solution. Il n'existe pas de couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_A^2 = D(x,y)$.
  Ainsi, d'après l'équivalence établie ci-dessus, $A^2 \notin E$.

Conclusion : $B^2 \in E$ et $A^2 \notin E$.

Exercice 2 (EDHEC 2023 E)

1. Donner un exemple d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel $K \in]0;1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :
$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq K|x-y| \qquad (\star)$$

La fonction constante égale à 0 convient... Toutes les fonctions constantes conviennent ! Et toutes les fonctions $x \longmapsto ax$ avec $a \in]0;1[$ aussi par exemple. Bref, ce n'est pas ce qui manque !

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente. On dit que f est K-contractante.

Oh le filou...
Celui qui est un peu filou peut même proposer la fonction f définie en question 6... Mais il vaut mieux ne pas être trop filou en début d'exercice !

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue en x.
On a, puisque f est K-contractante :
$$\forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq \left|f(x) - f(y)\right| \leq K|x-y|$$
Or $\lim\limits_{y \to x} |y-x| = 0$. D'où, par théorème d'encadrement :
$$\lim_{y \to x} \left|f(x) - f(y)\right| = 0$$
Ainsi :
$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$$
Par conséquent, f est continue en x.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

✘ Attention !
Un mauvais raisonnement consiste à dire que pour que f soit K-contractante, il faut qu'elle vérifie les hypothèses du théorème de l'IAF (avec $K \in]0;1[$). Non ! Ce n'est pas nécessaire, c'est simplement suffisant !

3. A l'aide de la relation $(\star)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet au plus une solution.
Raisonnons par l'absurde et supposons donc que l'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions différentes. Notons x_1 et x_2 deux solutions différentes de l'équation $f(x) = x$.
Puisque f est K-contractante, on a :
$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leq K|x_1 - x_2|$$
Mais $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, d'où on obtient :
$$|x_1 - x_2| \leq K|x_1 - x_2|$$
Et puisque $x_1 \neq x_2$, on a $|x_1 - x_2| \neq 0$, et en divisant par $|x_1 - x_2| > 0$, on obtient :
$$1 \leq K$$
Ce qui est absurde car $K \in]0;1[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède au plus une solution.

Important !
La négation de "l'équation admet au plus une solution" est "l'équation admet au moins 2 solutions".

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   4.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$$
   Par récurrence.
   - **Initialisation.** Pour $n = 0$.
     On a : $K^0 = 1$, d'où : $|u_1 - u_0| \leq K^0|u_1 - u_0|$. Initialisation vérifiée.
   - **Hérédité.** Sot $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$ et montrons que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$ Par hypothèse de récurrence :
$$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n|u_1 - u_0|$$
     Donc, puisque $K > 0$:
$$K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$$
     Or, d'après $(\star)$ appliquée avec $x = u_{n+1}$ et $y = u_n$, on a :
$$\left|f(u_{n+1}) - f(u_n)\right| \leq K|u_{n+1} - u_n|$$
     Autrement dit :
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K|u_{n+1} - u_n|$$
     D'où, par transitivité :
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$$
     L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$.

4.b. Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

- On a :
  - ◇ d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$
  - ◇ puisque $K \in]0;1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} K^n$ est une série géométrique convergente ; donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} K^n |u_1 - u_0|$ est également convergente.

  Par critère de comparaison sur les séries à terme général positif, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_{n+1} - u_n|$ est convergente.

  Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge.
- Or, on sait que $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature.

✘ Attention !
On compare les termes généraux, pas les sommes partielles !

☞ Rappel...
Résultat à connaître... Qui découle du fait que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$.
On raisonne ensuite par double-implication pour montrer $\sum\limits_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ CV ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

4.c. Conclure que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution.

- On a :
  - ◇ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$,
  - ◇ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ (question précédente),
  - ◇ f est continue en ℓ, car continue sur $\mathbb{R}$ (question 2.).

  D'où : $f(\ell) = \ell$.
  Par conséquent, l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution.
- Mais, d'après la question 3., l'équation $f(x) = x$ possède au plus une solution.

Conclusion : l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution (cette solution est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Petite remarque
On a finalement établi que toute fonction contractante possède un et un seul point fixe.

5. On désigne par n et p des entiers naturels tels que $p \geq 1$.

5.a. Justifier que l'on a : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

Remarquons que, puisque $p \geq 1$, on a $n + p - 1 \geq n$.
Puis, d'après la question **4.a.** :

$$\forall i \in [\![n; n+p-1]\!],\ |u_{i+1} - u_i| \leq K^i |u_1 - u_0|$$

D'où le résultat en sommant de n à $n + p - 1$.

Conclusion : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

5.b. En déduire l'inégalité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|$$

On a :

- D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i \right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{u+1} - u_i|$$

- Par télescopage :

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p-1} u_{i+1} - u_i \right| = |u_{n+p} - u_n|$$

- D'après la question précédente : $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$.

D'où, par transitivité :

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0|$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1-u_0| &= |u_1-u_0|\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \quad \left(K\neq 1\right)\\ &= |u_1-u_0|K^n\frac{1-K^{n+p-1-n+1}}{1-K}\\ &= |u_1-u_0|K^n\frac{1-K^p}{1-K}\end{aligned}$$

Conclusion : $|u_{n+p}-u_n| \leq K^n\dfrac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|$.

5.c. Établir enfin :

$$|a-u_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|u_1-u_0|$$

D'après ce qui précède, on a établi :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ |u_{n+p}-u_n| \leq K^n\frac{1-K^p}{1-K}|u_1-u_0|$$

Or :

- $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p} = a$, d'où, par continuité de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{p\to+\infty} |u_{n+p}-u_n| = |a-u_n|$$

- $K\in]0;1[$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} K^p = 0$

Finalement, on obtient le résultat voulu en passant à la limite quand $p\to+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus.

Conclusion : $|a-u_n| \leq \dfrac{K^n}{1-K}|u_1-u_0|$.

Pourquoi ?
Pourquoi cette histoire de continuité ? Pour pouvoir "rentrer" le passage à la limite à "l'intérieur" de la valeur absolue.

6. **Étude d'un exemple.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=\frac{1}{1+e^t}$$

6.a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

- La fonction $t\longmapsto 1+e^t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, comme somme de telles fonctions, et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $t\in\mathbb{R}$. On a :

$$f'(t)=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}$$

$$\begin{aligned}f''(t) &= \frac{-e^t(1+e^t)^2+e^t2e^t(1+e^t)}{(1+e^t)^4}\\ &= \frac{-e^t(1+e^t)+2\left(e^t\right)^2}{(1+e^t)^3}\\ &= \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}\end{aligned}$$

6.b. Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$$

➠Réflexe !
On démontre :
$\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{-1}{4} \leq f'(t) \leq \dfrac{1}{4}$

Soit $t\in\mathbb{R}$. On a :

$$f''(t)=\frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}$$

Or :

$$\begin{aligned}e^t-1\geq 0 &\iff e^t\geq 1\\ &\iff t\geq 0 \quad \left(\text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+\right)\end{aligned}$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	$\cdots$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\cdots$

Petite remarque
Le calcul des limites n'est pas demandé et pas nécessaire pour conclure...

On sait aussi que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)<0$.

D'où, d'après le tableau de variations de f' ($\dfrac{-1}{4}$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$, atteint en 0) :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \frac{-1}{4} \leq f'(t) < 0$$

Et ainsi, par transitivité :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{-1}{4} \leq f'(t) \leq \frac{1}{4}$$

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$.

6.c. En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.

On sait que :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (car de classe $\mathscr{C}^2$),
- pour tout $t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$ (question précédente).

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

Conclusion : f est $\frac{1}{4}$-contractante.

6.d. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

On se retrouve dans le contexte de la question 4..

Conclusion : d'après la question 4.b., la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

6.e. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur de u_n.

```python
import numpy as np

def suite(n):
    u=0
    for k in range(1,n+1):
        u=1/(1+np.exp(u))
    return u
```

6.f. En s'appuyant sur le résultat de la question 5.c., établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que $4^n \geq \frac{2000}{3}$.

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi : $|u_0 - u_1| = \frac{1}{2}$.

D'après la question 5.c., puisque f est $\frac{1}{4}$-contractante et que l'on peut appliquer ce qui a été fait précédemment avec $K = \frac{1}{4}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a - u_n| \leq \frac{\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a - u_n| \leq \frac{2}{3}\frac{1}{4^n}$$

Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, pour que u_n soit une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près, il suffit que $\frac{2}{3}\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3}$.

Or :

$$\frac{2}{3}\frac{1}{4^n} \leq 10^{-3} \iff \frac{2000}{3} \leq 4^n$$

Conclusion : u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que $4^n \geq \frac{2000}{3}$.

6.g. En déduire un programme **Python**, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

Il suffit d'un programme qui calcule et affiche la valeur de u_n pour un certain n vérifiant $4^n \geq \frac{2000}{3}$.

Posons $n = \lfloor \frac{\ln(2000) - \ln(3)}{\ln(4)} \rfloor + 1$. Dans ce cas, $4^n \geq \frac{2000}{3}$ et u_n fournit une valeur approchée satisfaisante.

Le programme suivant répond donc à la question.

Petite remarque
$\lfloor \frac{\ln(2000) - \ln(3)}{\ln(4)} \rfloor + 1 = 5$...
Tout ça pour ça !

```python
n=int(np.floor((np.log(2000)-np.log(3))/np.log(4))+1)
print(suite(n))
```

On peut aussi procéder ainsi :

```
n=0
while 4**n<2000/3:
    n=n+1
print(suite(n))
```

6.h. Interpréter cette valeur approchée en lien avec la fonction f.

D'après ce qui a été fait en question **4.c.**, on en déduit que a est l'unique point fixe de f.

Conclusion : cette valeur approchée est donc une valeur approchée de l'unique point fixe de f, à 10^{-3} près.

Exercice 3 (Inspiré de : EML 2013 E)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Chaque partie étudie une expérience ainsi que des variables aléatoires différentes. Les parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
   - L'expérience consiste en k répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirages avec remise) dont le succès "obtenir la boule numéro i" est de probabilité $\dfrac{1}{n}$ (équiprobabilité du choix des boules).
   - La variable aléatoire X_i compte alors le nombre de succès sur ces k répétitions.

Conclusion : $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k, \dfrac{1}{n}\right)$;
$X_i(\Omega) = [\![0; k]\!]$, $\forall j \in [\![0; k]\!]$, $\mathbb{P}([X_i = j]) = \dbinom{k}{j} \left(\dfrac{1}{n}\right)^j \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-j}$
$\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{k}{n}$, $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Important !
L'énoncé n'est pas là pour piéger, surtout en début d'exercice. Une question formule sous forme interrogative est souvent fausse. C'est un exemple classique ici. Les VA ne peuvent pas être indépendantes : le nombre de boules 1 obtenues impacte le nombre de boules 2...

   - D'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}([X_i = k]) = \dfrac{1}{n^k}$.
     Donc :
     $$\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_i = k]) \neq 0$$
   - Mais il est impossible de tirer k boules 1, k boules de chaque numéro, donc $\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = k] = \varnothing$. D'où :
     $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = k]\right) = 0$$

   Par conséquent :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} [X_i = k]\right) \neq \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X_i = k])$$

Conclusion : les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes.

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

   3.a. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   - L'expérience consiste en k répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (tirages avec remise) dont le succès "obtenir la boule numéro i ou la boule numéro j" est de probabilité $\dfrac{2}{n}$ (équiprobabilité du choix des boules).
   - La variable aléatoire $X_i + X_j$ compte alors le nombre de succès sur ces k répétitions.

Conclusion : $X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k; \dfrac{2}{n}\right)$ et ainsi $\mathbb{V}(X_i + X_j) = \dfrac{2k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$.

Remarque

Il est possible de traiter cette question autrement...
• Puisque X_i est le nombre de boules i et X_j le nombre de boules j, les valeurs de $X_i + X_j$ sont nécessairement des entiers positifs et inférieurs ou égaux à k.
En effet, $i \neq j$, donc le nombre de boule i ajouté du nombre de boules j obtenues lors de k tirages est inférieur ou égal à k.
D'où : $X_i + X_j \subset [\![0; k]\!]$.
• Soit $p \in [\![0; k]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_i = m]\big)_{m \in [\![0;k]\!]}$ comme système complet

d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i + X_j = p]) &= \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}\left([X_i = m] \cap [X_i + X_j = p]\right) \\
&= \sum_{m=0}^{k} \mathbb{P}\left([X_i = m] \cap [X_j = p-m]\right) && \forall m > p,\ [X_j = p-m] = \varnothing... \\
&= \sum_{m=0}^{p} \mathbb{P}\left([X_i = m] \cap [X_j = p-m]\right)
\end{aligned}$$

Soit $m \in [\![0; p]\!]$. Remarquons déjà que toutes les issues réalisant $[X_i = m] \cap [X_j = p-m]$ sont composées de m boules numéro i, $p-m$ boules numéro j et $k-p$ autre boules.
Par indépendance des tirages (avec remise), la probabilité d'apparition d'une telle issue est égale à :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{m} \left(\frac{1}{n}\right)^{p-m} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p}$$

Question : combien de telles issues réalisent l'évènement $[X_i = m] \cap [X_j = p-m]$?
Réponse : autant que de façons d'arranger m boules numéro i et $p-m$ boules numéro j sur k boules.

- il y a $\binom{k}{p}$ façons d'arranger les boules i ou j sur les k boules ;
- et $\binom{p}{m}$ façons d'arranger, au sein du groupe des boules i et j, seulement les boules i.

Par équiprobabilité de toutes les issues, on obtient :

$$\mathbb{P}\left([X_i = m] \cap [X_j = p-m]\right) = \binom{k}{p}\binom{p}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^{m} \left(\frac{1}{n}\right)^{p-m} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i + X_j = p]) &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{p}\binom{p}{m}\left(\frac{1}{n}\right)^{m} \left(\frac{1}{n}\right)^{p-m} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p} \\
&= \binom{k}{p}\left(\frac{1}{n}\right)^{p}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p} \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m} && \text{formule du binôme de Newton} \\
&= \binom{k}{p}\left(\frac{1}{n}\right)^{p}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p} 2^p \\
&= \binom{k}{p}\left(\frac{2}{n}\right)^{p}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{k-p}
\end{aligned}$$

Par conséquent : $X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)$.

Elémentaire...
Il est très simple d'indexer correctement la somme dans une FPT : c'est l'indexation lie au SCE choisi, qui elle est même liée (ici) à $X_i(\Omega)$ qui est donné en question précédente ! Comment peut-on se tromper ?!

♣ Méthode !
- De façon générale, quand on demande la loi d'une variable aléatoire (qu'il s'agisse d'une somme de deux VA ou non), on commence toujours par se poser la question du contexte : reconnaît-on le contexte d'une loi usuelle ?
- Dans le cas d'une somme de 2 VA. A-t-on un résultat de stabilité (indépendance nécessaire) ? Est-ce le contexte d'une loi usuelle ? Si non, on met en place la FPT et on peut ensuite soit raisonner sur la probabilité de l'intersection (fait ici), soit passer par les probabilités conditionnelles.

3.b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).
Puisque X_i et X_j sont finies, elles admettent chacune une variance, et donc $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ existe.
On sait que

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + \mathbb{V}(X_j) + 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j) && \text{question précédente et question 1.} \\
&= \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2k}{n}\left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{2k}{n} \times \frac{-1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{-k}{n^2}$.

3.c. Retrouver alors le résultat de la question 2..
On a ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \neq 0$$

Par conséquent, les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Conclusion : les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ ne sont pas indépendantes.

Important !
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$. D'où la contraposée...
- La formulation de la question DONNE le résultat de la question 2.. En effet, on demande de **retrouver** le résultat de la question 2. Autrement dit, on demande d'**étudier l'indépendance à partir de la connaissance de la covariance**. La seule façon de passer d'un résultat sur la covariance à un résultat sur l'indépendance est : $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0 \implies$ (X et Y pas indépendantes). PAS LE CHOIX !
On sait donc, sans même faire la question 2., ni la question 3.a, que X_i et X_j ne sont pas indépendantes...

4. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simul(n,k)` renvoie une liste contenant une réalisation des variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$.

```python
import numpy.random as rd

def simul(n,k):
    L=[0 for i in range(n)]
    for j in range(k): #k tirages
        N=rd.randint(1,n+1)
        L[N-1]=L[N-1]+1 #indexation qui débute à 0
    return L
```

Partie II

Pour entier naturel k supérieur ou égal à 1, note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

5. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2. En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

- Z_1 est la variable aléatoire qui compte le nombre de numéros distincts obtenus au cours du premier tirage.

Conclusion : Z_1 suit donc la loi certaine égale à 1 et $\mathbb{E}(Z_1) = 1$.

- Z_2 est la variable aléatoire qui compte le nombre de numéros distincts obtenus au cours du second tirage.
  - D'où : $Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$.
  - Puis :

$[Z_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient 1 seul numéro au cours des deux premiers tirages
si, et seulement si, le second tirage fournit la même boule que le premier

> **Petite remarque**
> On peut aussi utiliser les variables aléatoires X_i de la partie précédente et écrire que
> $[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$...
> En effet, $[Z_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que la boule numéro i soit tirée aux tirages 1 et 2.

Par équiprobabilité du choix des boules dans l'urne, on a ainsi :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \frac{1}{n}$$

  - Puisque $Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$, on a $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) + \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1$; d'où :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$$

> **Petite remarque**
> Il n'est pas nécessaire de travailler sur l'évènement $[Z_2 = 2]$... C'est une perte de temps de le faire, et donc une perte de points !

  - Z_2 est finie, donc admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_2) &= 1\mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2\mathbb{P}([Z_2 = 2]) \\
&= \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $Z_2(\Omega) = \{1; 2\}$
$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \frac{1}{n}$, $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
$\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

6.a. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$.

- Si $k = 1$ ou $k = 2$: voir question précédente.
- Si $k \geq 3$:

$[Z_k = 1]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient 1 seul numéro au cours des k premiers tirages
si, et seulement si, les k tirages ont donné la boule 1, ou les k tirages ont donné la boule 2, ou..., ou les k tirages ont donné la boules n

> **Petite remarque**
> On peut également procéder par dénombrement, en expliquant bien le raisonnement !

D'où :

$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

Puis, si $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $i \neq j$, on a $[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$ puisqu'il est impossible de tirer k boules i et k boules j. D'où, par incompatibilité des évènements de la famille $\left([X_i = k]\right)_{i \in [\![1;n]\!]}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k = 1]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \quad \text{question } \mathbf{1.} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^k} \\ & = & \dfrac{1}{n^{k-1}} \end{array}$$

On remarque que les cas se regroupent.

Conclusion : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.

6.b. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$. *On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.*

- Si $k > n$:
  Il est impossible d'obtenir plus de boules différentes qu'il n'y en a dans l'urne. Ainsi : $[Z_k = k] = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}([Z_k = k]) = 0$.
- Si $k \leq n$:

$[Z_k = k]$ est réalisé	si, et seulement si,	on obtient k numéros distincts au cours des k premiers tirages
	si, et seulement si,	les tirages 1 à k ont donné des numéros deux à deux distincts

  Un tirage s'assimile à un k-uplet de $[\![1;n]\!]^k$. Il y a donc n^k tirages possibles, tous équiprobables. Dénombrons donc les tirages réalisant $[Z_k = k]$.
  Un tirage réalisant $[Z_k = k]$ est déterminé par :
  - ◇ le numéro de la première boule tirée : n possibilités,
  - ◇ le numéro de la seconde boule tirée : $n - 1$ possibilités (on veut tirer une boule autre que celle déjà tirée),
  - ◇ ...
  - ◇ le numéro de k-ième boule tirée : $n - (k - 1)$ possibilités (on veut tirer une boule autre que les $k-$ déjà tirées)

  Par conséquent, $[Z_k = k]$ est composé de $n(n-1) \times \ldots \times (n-(k-1))$ issues.
  Ainsi, par équiprobabilité de tous les tirages :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k = k]) & = & \dfrac{n(n-1) \times \ldots \times (n-(k-1))}{n^k} \\ & = & \dfrac{1}{n^k} \dfrac{n!}{(n-k)!} \end{array}$$

Petite remarque
On peut aussi dire qu'un tirage s'assimile à un k-uplet de $[\![1;n]\!]^k$.
Choisir un tirage réalisant $[Z_k = k]$, c'est :
• choisir k éléments distincts de $[\![1;n]\!]$: $\binom{n}{k}$ possibilités
• ordonner ces k éléments : $k!$ possibilités.
Par conséquent, il y a $\binom{n}{k} k!$ tels tirages ; sur n^k (le cardinal de $[\![1;n]\!]^k$) tirages au total...
D'où le résultat, par équiprobabilité des tirages.

Conclusion : $\mathbb{P}([Z_k = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{1}{n^k} \dfrac{n!}{(n-k)!} & \text{si } k \leq n \end{cases}$.

6.c. Montrer, pour tout $j \in [\![1;n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = \dfrac{j}{n} \mathbb{P}([Z_k = j]) + \dfrac{n-j+1}{n} \mathbb{P}([Z_k = j-1])$.

Soit $j \in [\![1;n]\!]$. Commençons par remarquer que $Z_{k+1}(\Omega) = [\![1; \min(n, k+1)]\!]$. Distinguons ensuite deux cas...

- Si $j \in Z_{k+1}(\Omega)$ (toujours le cas si $[\![1;n]\!] \subset \mathbb{Z}_{k+1}(\Omega)$, et donc si $n \leq k+1$) :
  - ◇ On a $Z_k(\Omega) = [\![1; \min(n,k)]\!]$. Notons $m = \min(n, k)$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([Z_k = i])_{i \in [\![1;m]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left([Z_{k+1} = j] \cap [Z_k = i]\right) \quad \forall i \in [\![1;m]\!],\ \mathbb{P}([Z_k = i]) \neq 0 \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}([Z_k = i]) \times \mathbb{P}_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = j]) \end{array}$$

  Soit $i \in [\![1;m]\!]$. Supposons l'évènement $[Z_k = i]$ réalisé. Autrement dit, les k premiers tirages ont donné i boules différentes. On regarde le tirage suivant.

  $\rightsquigarrow$ si $i = j$ (seulement si $j \in [\![1;m]\!]$) :
  On a alors obtenu j boules différentes sur les k premiers tirages. Dans ce cas, l'évènement $[Z_{k+1} = j]$ est réalisé si, et seulement si, le $(k+1)$-ième tirage fournit encore une des j boules déjà tirées. D'où, par équiprobabilité du choix des boules :

$$\mathbb{P}_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = j]) = \frac{j}{n}$$

$\rightsquigarrow$ si $i = j-1$ (seulement si $j \geq 2$) :
On a alors obtenu $j-1$ boules différentes sur les k premiers tirages. Dans ce cas, l'évènement $[Z_{k+1} = j]$ est réalisé si, et seulement si, le $(k+1)$-ième tirage fournit une des $n-(j-1)$ boules qui n'a pas encore été tirée. D'où, par équiprobabilité du choix des boules :

$$\mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = j]) = \frac{n-j+1}{n}$$

$\rightsquigarrow$ si $i > j$:
Il est alors impossible d'obtenir moins de boules différentes au tirage suivant... D'où :

$$\text{si } i > j, \text{ alors } \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = j]) = 0$$

$\rightsquigarrow$ si $i < j-1$:
Il est alors impossible d'avoir obtenu j boules différentes au $k+1$-tirage en n'en ayant obtenu au plus $j-2$ différentes au tirage k. D'où :

$$\text{si } i < j-1, \text{ alors } \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = j]) = 0$$

$\diamond$ On vérifie enfin que la relation est encore valable dans les deux cas suivants :

$\rightsquigarrow$ si $j = 1$: dans ce cas, $\mathbb{P}([Z_k = j-1]) = \mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$... Et la relation souhaitée équivaut à l'égalité $\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = \dfrac{1}{n}\mathbb{P}([Z_k = 1])$, qui est vraie.

$\rightsquigarrow$ si $j > m$: puisque $m = \min(n, k)$ et que $j \in [\![1; \min(n, k+1)]\!]$, on a alors nécessairement $k < n$ et $j = k+1$. Dans ce cas $\mathbb{P}([Z_k = j]) = \mathbb{P}([Z_k = k+1]) = 0$... Et la relation souhaitée équivaut à l'égalité $\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = \dfrac{n-k}{n}\mathbb{P}([Z_k = k])$, qui est vraie.

- Si $j \notin Z_{k+1}(\Omega)$ (possible que si $[\![1; n]\!] \not\subset \mathbb{Z}_{k+1}(\Omega)$ et donc $k+1 < n$) : dans ce cas, puisque $j \in [\![1; n]\!]$, on a nécessairement $k+1 < n$ et donc $j > k+1$. Dans ce cas, $j-1 > k$ et on a :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}([Z_k = j]) = 0 \quad ; \quad \mathbb{P}([Z_k = j-1]) = 0$$

la relation voulue est donc encore valable !

Conclusion : pour tout $j \in [\![1; n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) = \dfrac{j}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) + \dfrac{n-j+1}{n}\mathbb{P}([Z_k = j-1])$.

Petite remarque
Question difficile, avec de nombreux cas à distinguer. L'essentiel des points porte sur l'utilisation de la FPT et la disjonction des quatre cas...
On pourrait se contenter du travail sur le premier $\diamond$ du premier $\bullet$ pour avoir l'essentiel des points.

6.d. En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Puisque $Z_k(\Omega)$ et $Z_{k+1}(\Omega)$ sont finis, les variables aléatoires Z_k et Z_{k+1} admettent une espérance. Et puisque $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}([Z_{k+1} = j]) && \text{question précédente et linéarité de la somme} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) + \sum_{j=1}^{n} \frac{j(n-j+1)}{n}\mathbb{P}([Z_k = j-1]) && \text{i=j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)(n-i)}{n}\mathbb{P}([Z_k = i]) && \text{termes nuls si } i = 0 \text{ ou } i = n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)(n-i)}{n}\mathbb{P}([Z_k = i]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j^2}{n} + \frac{(j+1)(n-j)}{n}\right)\mathbb{P}([Z_k = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{n+(n-1)j}{n}\mathbb{P}([Z_k = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = j]) + \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}([Z_k = j]) && Z_k(\Omega) \subset [\![1; n]\!] \\
&= 1 + \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k)
\end{aligned}$$

Petite remarque
On reconnaît la relation de récurrence d'une suite arithmético-géométrique...

Conclusion : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

7. 7.a. Montrer que la suite $(v_k)_{k\geq 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{k+1} &= \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n && \text{question précédente} \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_k) + 1 - n && \mathbb{E}(Z_k) = v_k + n \\
&= \frac{n-1}{n}(v_k + n) + 1 - n \\
&= \frac{n-1}{n}v_k
\end{aligned}$$

Conclusion : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$ et de premier terme $v_1 = 1-n$ (question 5.).

7.b. En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_k) &= v_k + n \quad \text{question précédente} \\ &= v_1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + n \\ &= (1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} + n \\ &= -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} + n \\ &= n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note $Y_{k,i}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule numéro i a été tirée lors des k premiers tirages, et prenant la valeur 0 sinon. A l'aide des variables aléatoires $Y_{k,1}, Y_{k,2}, \dots, Y_{k,n}$, retrouver l'espérance de Z_k.

De façon immédiate, on a :

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n} Y_{k,i}$$

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a :

- $Y_{k,i}(\Omega) = \{0;1\}$
- $[Y_{k,i} = 0]$ est réalisé si, et seulement si, la boule i n'a pas été tirée lors des k tirages
  si, et seulement si, les k tirages ont donné d'autres boules que la boule i

  Par indépendance des tirages et équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne, on a :

$$\mathbb{P}([Y_{k,i} = 0]) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- On en déduit, puisque $Y_{k,i}(\Omega) = \{0;1\}$:

$$\mathbb{P}([Y_{k,i} = 1]) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

  et ainsi :

$$\mathbb{E}(Y_{k,i}) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

Petite remarque
$Y_{k,i}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k$.

Conclusion : par linéarité de l'espérance, on retrouve le résultat de la question précédente.

9. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simulZ(n,k)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z_k.

On utilise en fait les variables aléatoires $Y_{k,i}$...

```python
import numpy.random as rd

def simulZ(n,k):
    L=[0 for i in range(1,n+1)]
    for j in range(1,k+1): #k tirages
        i=rd.randint(0,n)
        L[i]=1 #L[i]=réalisation de Y_{k,i+1}
    return sum(L)
```

Partie III

On note désormais T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note T_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, i boules différentes. De cette façon, $T = T_n$.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

10. Donner la loi de la variable aléatoire T_1.

T_1 suit la loi certaine égale à 1.

11. On pose $V_1 = T_1$ et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $V_i = T_i - T_{i-1}$.
Justifier que, pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, V_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
Soit $i \in [\![2;+\infty[\![$. On a : $V_i = T_i - T_{i-1}$, donc V_i donne le nombre de tirages nécessaires pour passer de $i-1$ boules différentes obtenues à i boules différentes.
Ainsi, à partir du moment où l'on a obtenu, pour la première fois, $i-1$ boules différentes (ce qui arrive presque-sûrement) :

- l'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir une boule différente des $i-1$ déjà obtenues" est de probabilité $\dfrac{n-(i-1)}{n}$ (par équiprobabilité du choix des boules) ;
- la variable aléatoire V_i compte le nombre de tirages nécessaires à ce premier succès.

Conclusion : V_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-i+1}{n}$ (qui est bien un réel de $]0;1[$).

12. Établir : $T = \sum_{i=1}^{n} V_i$. En déduire que T possède une espérance et démontrer que $\mathbb{E}(T) = n \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

- On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} V_i &= V_1 + \sum_{i=2}^{n} (T_i - T_{i-1}) \\
&= V_1 + \sum_{i=2}^{n} T_i - \sum_{i=2}^{n} T_{i-1} && \text{télescopage} \\
&= V_1 + T_n - T_1 && T_1 = V_1 \\
&= T_n \\
&= T
\end{aligned}$$

- On sait que V_1 admet une espérance (suit une loi certaine) et que, pour tout $i \in [\![2;+\infty[\![$, V_i admet une espérance (suit une loi géométrique). Donc T est la somme de n variables aléatoires admettant une espérance. La variable aléatoire T admet donc une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(V_i) \\
&= \mathbb{E}(V_1) + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{E}(V_i) && \text{questions 10. et 11.} \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{n}{n-i+1} \\
&= n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} && k = n-i+1 \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

13. 13.a. Établir :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, donc sur $[k;k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

Puis, par croissance de l'intégrale, licite car $k \leq k+1$ et les fonctions en jeu étant continues sur le segment $[k:k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.

13.b. En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ puis de $\mathbb{E}(T)$ lorsque $n \to +\infty$.

Notons, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

- Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. De la question précédente, on a :
$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
D'où, en sommant de 1 à $n-1$, licite car $n \geq 2$, et par télescopage :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Petite remarque
On pourrait sommer de 1 à n, mais il y aurait une petite manipulation à faire sur la fin. A voir ce que vous préférez, les deux possibilités doivent être claires.

Or :
  - ◇ Avec le changement d'indice $i = k+1$, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \\ &= S_n - 1 \end{aligned}$$
  - ◇ et :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n}$$

D'où :
$$S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$$
Puis :
  - ◇ De l'inégalité de gauche, on déduit :
$$S_n \leq \ln(n) + 1$$
  - ◇ De l'inégalité de droite, on déduit :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n$$

On obtient ainsi :
$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$
Et, comme $n \geq 2$, on a $\ln(n) > 0$. D'où :
$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

- On a finalement établi :
$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![, \quad 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
Mais :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = 1 = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)$$
Par théorème d'encadrement, on conclut :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1$$
Et ainsi :
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

- Or, d'après la question **12.** : $\mathbb{E}(T) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Conclusion : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\mathbb{E}(T) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

14. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution simule une réalisation de la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd

def simulT(n):
    L=[0 for i in range(n)]
    T=0
    while sum(L)<n:
        b=rd.randint(1,n+1)
        ......
        ......
    return T
```

L'élément `L[i]` de la liste `L` contiendra 0 si la boule numéro $i+1$ n'a pas encore été tirée, et prendra la valeur 1 dès que la boule numéro $i+1$ aura été tirée.
Puisque la condition porte sur `sum(L)<n`, la boucle s'arrêtera dès que la liste `L` ne contiendra que des 1...
Donc dès que toutes les boules auront été tirées au moins une fois.
La variable `T` est incrémentée à chaque tirage...

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simulT(n):
4     L=[0 for i in range(n)]
5     T=0
6     while sum(L)<n:
7         T=T+1
8         b=rd.randint(1,n+1)
9         L[b-1]=1
10    return T
```

Petite remarque
On pourrait remplacer la ligne 6 par : `while L!=[1 for i in range(n)]`.

Partie IV

On note maintenant U la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée. Si U prend la valeur i, avec $i \in [\![1;n]\!]$, alors on effectue une succession de i lancers de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose les lancers de pièces indépendants.
On note N la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus à l'issue de cette expérience.
On suppose que toutes les variables aléatoires de cette partie sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

15. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que son exécution simule une réalisation de la variable aléatoire N.

```
import numpy.random as rd

def simulN(n):
    U = ......
    N=0
    for k in  ......
        N=N + ......
    return N
```

Par équiprobabilité du choix des boules dans l'urne, U suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$...

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simulN(n):
4     U=rd.randint(1,n+1)
5     N=0
6     for k in range(1,U+1):
7         N=N+rd.randint(0,2)
8     return N
```

Petite remarque
On pourrait également remplacer les lignes 6 et 7 par `N=rd.binomial(U,1/2)`.

16. Démontrer que $N(\Omega) = [\![0;n]\!]$.
Par double inclusion...
$\boxed{\subset}$ Puisque N est le nombre de PILE obtenus sur au plus n lancers (si la boule numéro n est tirée en première position), on a immédiatement $N(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$.
$\boxed{\supset}$ Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Justifions que $k \in N(\Omega)$.
Notons ω l'issue de l'expérience consistant à :
    - ne tirer que la boule numéro n, donc en particulier à tirer la boule n au premier tirage ;
    - puis obtenir PILE au k premiers lancers (sur les n lancers) et FACE aux derniers lancers de la pièce.

Dès lors, on a $N(\omega) = k$. Autrement dit : $k \in \mathbb{N}(\Omega)$.

Conclusion : $N(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

☞ Rappel...
$k \in N(\Omega) \iff \exists \omega \in \Omega \ / \ k = N(\omega)$.
Ou encore : $k \in \mathbb{N}(\Omega) \iff [N=k] \neq \varnothing$.
On cherche donc une issue dont l'image par N est égale à k...

✓ Rigueur !
Une issue doit détailler le déroulement complet de l'expérience : du tirage des boules (a priori, une infinité sont tirées...) aux résultats du bon nombre de lancers de pièces...

17. Donner la loi de U. Rappeler son espérance et sa variance.
Il y a équiprobabilité du choix de la boule dans l'urne...

Conclusion : $U \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;n]\!]\right)$
$U(\Omega) = [\![1;n]\!]$, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}([U=k]) = \frac{1}{n}$
$\mathbb{E}(U) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(U) = \frac{n^2-1}{12}$.

18. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Démontrer que pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) = \begin{cases} \binom{i}{j}\dfrac{1}{2^i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Supposons l'évènement $[U=i]$ réalisé. Autrement dit, la boule numéro i a été tirée au premier tirage ; on effectue ensuite i lancers de la pièce.

- La suite de l'expérience s'assimile donc à i répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité $\frac{1}{2}$.
- La variable aléatoire N compte alors le nombre de succès obtenus sur ces i lancers.

Par conséquent : la loi conditionnelle de N sachant l'évènement $[U=i]$ est la loi binomiale de paramètres i et $\frac{1}{2}$.

✘ Attention ! C'est la loi conditionnelle de N sachant $[U=i]$ dont on parle... Ce n'est pas la loi de N !

Ainsi, pour tout $j \in [\![0;n]\!]$:

- si $j > i$: $\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) = 0$
- si $j \leq i$: $\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) = \binom{i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}$.

Conclusion : pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) = \begin{cases} \binom{i}{j}\dfrac{1}{2^i} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$.

19. Soit $j \in [\![0;n]\!]$. Exprimer $\mathbb{P}([N=j])$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([U=i]\right)_{i \in [\![1;n]\!]}$ comme système complet d'évènements, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([U=i] \cap [N=j]\right) && \forall i \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([U=i]) \neq 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([U=i])\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) && \text{question précédente : } \forall i < j,\ \mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) \\
&= \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}([U=i])\mathbb{P}_{[U=i]}([N=j]) && \text{questions } \mathbf{17.} \text{ et } \mathbf{18.}\text{, licites} \\
&= \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall j \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}([N=j]) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}$.

20. 20.a. Calculer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j}$. L'expression obtenue est-elle valable si $i=0$?

- Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j} &= \sum_{j=1}^{i} j\frac{i!}{j!(i-j)!} \\
&= \sum_{j=1}^{i} j\frac{i!}{j!(i-j)!} \\
&= \sum_{j=1}^{i} \frac{i!}{(j-1)!(i-j)!} && k = j-1 \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{i!}{k!(i-k-1)!} \\
&= i\sum_{k=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{k!(i-1-k)!} && \text{formule du binôme de Newton, licite car } i \geq 1, \text{ donc } i-1 \geq 0. \\
&= i2^{i-1}
\end{aligned}$$

✓ Rigueur ! Pour dire que $\frac{j}{j!} = \frac{1}{(j-1)!}$, il faut que $j \neq 0$.
En effet, passer de $\frac{j}{j!}$ à $\frac{1}{(j-1)!}$ se fait en divisant numérateur et dénominateur par j (il serait temps de comprendre ce que signifie "simplifier une fraction"), ce qui n'est possible que si $j \neq 0$.
Et puis, l'écriture $(j-1)!$ pose quand-même problème quand $j = 0$...

- Si $i = 0$: chaque membre vaut 0. L'expression est donc valable si $i = 0$.

Conclusion : $\forall i \in [\![0;n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j} = i2^{i-1}$.

20.b. Justifier que N possède une espérance et la calculer.

On sait que $N(\Omega)$ est fini (question 16.), donc N admet une espérance et, puisque $N(\Omega) = [\![0;n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}([N=j]) && \text{question 19.}\\
&= \sum_{j=0}^{n} j\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} j\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{0\leq j\leq i\leq n} j\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j}\frac{1}{2^i}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{i} j\binom{i}{j} && \text{question précédente, licite car la somme sur } i \text{ va de } 0 \text{ à } n\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} i2^{i-1}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n} i\\
&= \frac{1}{2n}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n+1}{4}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(N) = \dfrac{n+1}{4}$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★