Devoir surveillé 5

Samedi 16 décembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Problème (HEC 2014 Voie S)

Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible.
Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z.
- Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on note $\mathscr{E}_N$ l'ensemble des applications de $[\![1;N]\!]$ dans $[\![1;N]\!]$.
- On rappelle le résultat suivant, appelé *théorème d'existence de l'espérance par domination* : si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leq Y$ et que Y possède une espérance, alors X possède une espérance.

Préliminaires.

1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

1.a. Sans justifier, donner le nombre d'éléments de $\mathscr{E}_N$.

Conclusion : $\text{Card}(\mathscr{E}_N) = N^N$.

Pourquoi ?
Soit $f \in \mathscr{E}_N$. Il y a N choix pour $f(1)$, N choix pour $f(2)$,..., N choix pour $f(N)$.
Donc N^N façons de construire f.

1.b. Parmi les éléments de $\mathscr{E}_N$, quel est le nombre d'applications injectives et parmi celles-ci, combien sont strictement monotones ? On justifiera rapidement les réponses données.

- Construire une application $f \in \mathscr{E}_N$ injective c'est choisir :
  - $f(1)$: N choix possibles,
  - puis $f(2)$: $N-1$ choix possibles (tous sauf $f(1)$),
  - ...
  - et enfin $f(N)$: 1 seul choix.

  Il y a donc $N!$ façons de construire f.

  Conclusion : $\mathscr{E}_N$ contient $N!$ applications injectives.
- Parmi celles-ci, seules deux sont strictement monotones :

$$k \longmapsto k \quad ; \quad k \longmapsto n-k+1$$

  En effet, puisque $f(1), \dots, f(N)$ sont deux à deux distincts, il n'y a que deux façons de les ordonner : soit de façon strictement croissante, soit de façon strictement décroissante.

  Conclusion : parmi les $N!$ injections de $\mathscr{E}_N$, seules 2 sont strictement monotones.

2. Soit $p \in]0;1[$.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \lfloor pX(\omega) \rfloor$ et on admet que l'application Y ainsi définie est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.a. Déterminer la loi de Y.

- Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, on considère $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Ainsi, puisque $p > 0$: $(pX)(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
D'où :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y=n]) & = & \mathbb{P}([\lfloor pX \rfloor = n]) & \\
& = & \mathbb{P}([n \leq pX < n+1]) & p > 0 \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{n}{p} \leq X < \dfrac{n+1}{p}\right]\right) & X \text{ est à densité (on note } F_X \text{ sa fonction de répartition)} \\
& = & F_X\left(\dfrac{n+1}{p}\right) - F_X\left(\dfrac{n}{p}\right) & \dfrac{p}{n}, \dfrac{p+1}{n} \geq 0 \\
& = & 1 - \mathrm{e}^{-\frac{n+1}{p}} - \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{p}{n}}\right) & \\
& = & \mathrm{e}^{-\frac{n}{p}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right) &
\end{array}$$

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y=n]) = \mathrm{e}^{-\frac{n}{p}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right)$.

2.b. Montrer que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

- Puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y+1=n]) & = & \mathbb{P}([Y=n-1]) & \text{question précédente, licite car } n-1 \in \mathbb{N} \text{ (car } n \in \mathbb{N}^*) \\
& = & \mathrm{e}^{-\frac{n-1}{p}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right) & \\
& = & \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right)^{n-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right) &
\end{array}$$

Conclusion : $Y+1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right)$.

2.c. Établir : $0 < \mathbb{E}(Y) < p$.

- Puisque $Y+1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}\right)$, la variable aléatoire $Y+1$ admet une espérance ; c'est donc également le cas de Y et, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(Y+1)-1 \\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}}-1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{p}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{p}}-1}\end{aligned}$$

- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geq x+1$, avec égalité si, et seulement si, $x=0$.
D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \mathrm{e}^x - 1 > x$. Et ainsi, puisque $\frac{1}{p} > 0$:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{p}} - 1 > \frac{1}{p} > 0$$

Donc :
  - $\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{p}}-1} > 0$, autrement dit $\mathbb{E}(Y) > 0$
  - par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$: $\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{p}}-1} < p$. Autrement dit : $\mathbb{E}(Y) < p$.

Petite remarque
On accepte, ici, la connaissance de ce résultat… On pourrait le redémontrer rapidement.

Conclusion : Y admet une espérance et $0 < \mathbb{E}(Y) < p$.

3. 3.a. Pour tout couple $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx$ est convergente.

Soit $(r,s) \in \mathbb{N}^2$. Notons $f : x \longmapsto x^r \ln(x)^s$, définie sur $]0;1]$.
La fonction f est continue sur $]0;1]$, donc l'intégrale est peut-être impropre en 0, mais pas en 1.

- Si $s = 0$:
On a ainsi : $\forall x \in]0;1],\ f(x) = x^r$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 et donc l'intégrale $\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx$ est faussement impropre en 0.
- Si $s \neq 0$:
  - Remarquons que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

En effet :
pour tout $x \in]0;1]$:

$$\sqrt{x} f(x) = x^{r+\frac{1}{2}} \ln(x)^s$$

Or $s > 0$ et $r + \frac{1}{2} > 0$, donc par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to 0} x^{r+\frac{1}{2}} \ln(x)^s = 0$.

  - Pour tout $x \in]0;1],\ -f(x) \geq 0,\ \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0$
  - L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 convergente, car d'exposant $\frac{1}{2} < 1$.

Par critère de comparaison sur les intégrales à intégrandes positives, l'intégrale $\int_0^1 -f(x)dx$ est convergente, donc $\int_0^x f(x)dx$ également.

Attention !
Si $r = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^r \ln(x)^s \neq$… L'intégrale n'est donc pas toujours faussement impropre !

Conclusion : pour tout couple $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx$ est convergente.

3.b. Établir : $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2,\ \int_0^1 x^r \ln(x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

Démontrons, par récurrence : $\forall s \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^r \ln(x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

★ Classique ! ★
C'est une intégrale classique… A bien retravailler si nécessaire !

- **Initialisation.** Pour $s = 0$.
Soit $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^r \ln(x)^0 dx &= \int_0^1 x^r dx \\ &= \frac{1}{r+1} \\ &= \frac{(-1)^0 0!}{(r+1)^0+1}\end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $s \in \mathbb{N}$. Supposons : $\forall r \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

  Montrons : $\forall r \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^{s+1} dx = \frac{(-1)^{s+1}(s+1)!}{(r+2)^{s+2}}$.

  Soit $r \in \mathbb{N}$. Soit $A \in]0;1]$. Posons : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto \ln(x)^{s+1} \\ v : x \longmapsto \dfrac{1}{r+1} x^{r+1} \end{array} \right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[A;1]$ et pour tout $x \in [A;1]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = (s+1)\dfrac{1}{x}\ln(x)^s \\ v'(x) = x^r \end{array} \right.$.

  Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 x^r \ln(x)^{s+1} dx &= \left[\frac{1}{r+1} x^{r+1} \ln(x)^{s+1}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{r+1} x^{r+1} (s+1)\frac{1}{x} \ln(x)^s dx \\ &= -\frac{A^{r+1}\ln(A)^{s+1}}{r+1} - \frac{s+1}{r+1}\int_A^1 x^r \ln(x)^s dx \end{aligned}$$

  Or :

  - ◇ puisque $r+1>0$ et $s+1>0$, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{A\to 0} -\frac{A^{r+1}\ln(A)^{s+1}}{r+1} = 0$
  - ◇ d'après la question précédente, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^{s+1} dx$ et $\displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx$ sont convergentes.

  Le passage à la limite quand $A \to 0$ est donc licite et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^r \ln(x)^{s+1} dx &= -\frac{s+1}{r+1}\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx \\ &= -\frac{s+1}{r+1}\,\frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}} \\ &= \frac{(-1)^{s+1}(s+1)!}{(r+1)^{s+2}} \end{aligned}$$

  hypothèse de récurrence

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

4. 4.a. Établir :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(|x|-|y|)^2 \geq 0$$

D'où :

$$x^2+y^2-2|xy| \geq 0$$

Et ainsi :

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Pardon ? ?!!
Non, mais utiliser le produit scalaire et la norme... Faut être sacrément tordu !!

Conclusion : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

4.b. Soient X et Y deux variables aléatoires (non nécessairement discrètes ou à densité) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y admettent un moment d'ordre 2. Démontrer que XY possède une espérance.

- D'après la question précédente :

$$\forall \omega \in \Omega, \ |XY|(\omega) \leq \frac{1}{2}\big(X^2(\omega)+Y^2(\omega)\big)$$

- Or X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc $\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant une espérance ; elle admet donc également une espérance.

Par théorème d'existence de l'espérance par domination (donné dans l'énoncé), on en déduit que la variable aléatoire XY admet une espérance.

Conclusion : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

5. Soient X une variable aléatoire ainsi que f, g deux applications définies sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(X)$ et $g(X)$ ont la même loi et que X, $f(X)$ et $g(X)$ admettent un moment d'ordre 2. Établir l'existence de $\mathbb{E}\Big(\big(X-f(X)\big)^2\Big)$ et $\mathbb{E}\Big(\big(X-g(X)\big)^2\Big)$, puis démontrer :

$$\mathbb{E}\Big(\big(X-f(X)\big)^2\Big) \leq \mathbb{E}\Big(\big(X-g(X)\big)^2\Big) \iff \mathbb{E}\big(Xf(X)\big) \geq \mathbb{E}\big(Xg(X)\big)$$

- On a :
$$\big(X-f(X)\big)^2 = X^2 - 2Xf(X) + f(X)^2$$
Or X et $f(X)$ admettent un moment d'ordre 2, donc d'après la question précédente, $Xf(X)$ admet une espérance.
Ainsi : X^2, $Xf(X)$ et $f(X)^2$ admettent une espérance.
Par conséquent, $\big(X-f(X)\big)^2$ admet une espérance.
- De la même façon, $\big(X-g(X)\big)^2$ admet une espérance.
- Ensuite :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\big(X-f(X)\big)^2\Big) \leq \mathbb{E}\Big(\big(X-g(X)\big)^2\Big) &\iff \mathbb{E}\Big(X^2-2Xf(X)+f(X)^2\Big) \leq \mathbb{E}\Big(X^2-2Xg(X)+g(X)^2\Big)\\ &\iff \mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}\big(Xf(X)\big)+\mathbb{E}\big(f(X)^2\big) \leq \mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}\big(Xg(X)\big)+\mathbb{E}\big(g(X)^2\big)\\ &\iff \mathbb{E}\big(Xf(X)\big) \geq \mathbb{E}\big(Xg(X)\big)\end{aligned}$$
linéarité de l'espéran
$f(X)$ et $g(X)$ ont même loi, donc même moment d'ordre 2

6. Soient deux réels a, b tels que $a<b$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$. On note :
$$I=\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \text{où } \forall k\in[\![0;n]\!],\ x_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

6.a. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I-S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(t)-f(x_k)\big)dt$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$$\begin{aligned} I-S_n &= \int_a^b f(t)dt-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\\ &= \int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k)\\ &= \int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)\\ &= \int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)dt\\ &= \int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(t)-f(x_k)\big)dt \end{aligned}$$
relation de Chasles, avec $x_0=a$ et $x_n=b$
linéarité de la somme et de l'intégrale

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I-S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\big(f(t)-f(x_k)\big)dt$.

6.b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'un réel $M\geq 0$ tel que pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, pour tout $t\in[x_k;x_{k+1}]$:
$$|f(t)-f(x_k)|\leq M|t-x_k|\leq M\frac{b-a}{n}$$

- La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$, donc f' est continue sur $[a;b]$, et ainsi, la fonction $|f'|$ est continue sur le segment $[a;b]$.
Par théorème des bornes, il existe alors un réel $M\geq 0$, que nous considérons ensuite, tel que :
$$\forall x\in[a;b],\ |f'(x)|\leq M$$
- On a ainsi :
  - f est dérivable sur $[a;b]$,
  - pour tout $x\in[a;b]$, $|f'(x)|\leq M$.

  D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :
$$\forall (x,y)\in[a;b]^2,\ |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$
- Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$ et soit $t\in[x_k;x_{k+}]$.
On a $x_k, x_{k+1}\in[a;b]$, donc on a aussi $t\in[a;b]$. Et ainsi, en appliquant l'IAF ci-dessus avec $x=t$ et $y=x_k$, on obtient :
$$|f(t)-f(x_k)|\leq M|t-x_k|$$
Or $t\geq x_k$:
$$\begin{aligned} |t-x_k| &= t-x_k\\ &\leq x_{k+1}-x_k\\ &\leq \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$
$t\leq x_{k+1}$
$x_{k+1}-x_k=\dfrac{b-a}{n}$

Conclusion : il existe un réel $M \geq 0$, que nous considérons ensuite, tel que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$, $|f(t) - f(x_k)| \leq M|t - x_k| \leq M\dfrac{b-a}{n}$.

6.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I - S_n| \leq M\dfrac{(b-a)^2}{n}$ puis conclure sur la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **6.a.** et par inégalité triangulaire sur la somme puis sur l'intégrale, licite car pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $x_k \leq x_{k+1}$, on a :

$$|I - S_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|f(t) - f(x_k)\big| dt$$

Or, d'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ \forall t \in [x_k; x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq M\frac{b-a}{n}$$

D'où, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, par croissance de l'intégrale, licite car $x_k \leq x_{k+1}$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M\frac{b-a}{n} dt$$

Et ainsi, en sommant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M\frac{b-a}{n} dt$$

Or, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M\frac{b-a}{n} dt &= \int_a^b M\frac{b-a}{n} dt \\ &= M\frac{(b-a)^2}{n} \end{aligned}$$

Par transitivité, on obtient finalement :

$$|I - S_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{n}$$

- On a ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |I - S_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M(b-a)^2}{n} = 0$.
Par théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |I - S_n| = 0$.

Conclusion : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

★ Classique ! ★
Enchaînement de questions classiques visant à démontrer le résultat sur les sommes de Riemann (convergence de la méthode des rectangles à gauche) dans le cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire.

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X s'il existe une application $T : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y.
L'application T est alors appelée *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y.
On associe à une fonction de transport T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par : $C(T) = \mathbb{E}\Big(\big(X - T(X)\big)^2\Big)$.
Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0; 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.

7. Soit $p \in]0; 1[$. Pour tout réel $a \in [0; 1-p]$, on note dans cette question T_a la fonction définie sur $]0; 1[$ par :

$$\forall x \in]0; 1[,\ T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a; a+p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_a(X) = 1])$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.
Rappelons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

☞ Rappel...
La fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$, donc que l'on ait $x \in [0; 1]$ ou $x \in]0; 1[$ comme deuxième cas ne change rien...

Soit $a \in [0; 1-p]$.

- On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_a(X)=1]) &= \mathbb{P}([X\in]a;a+p[) \\
&= \mathbb{P}([a<X<a+p]) \\
&= \mathbb{P}([X\le a+p]) - \mathbb{P}([X\le a]) && X \text{ est à densité} \\
&= a+p-a && a, a+p \in [0;1] \\
&= p
\end{aligned}$$

- Ensuite, remarquons que $T_a(\Omega) = \{0;1\}$.

Conclusion : pour tout $a \in [0;1-p]$, $T_a(X)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
Autrement dit, pour tout $a \in [0;1-p]$, T_a est une fonction de transport de X vers la loi de Bernoulli de paramètre p.

7.b. Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\dfrac{1}{3} + p(1-p) - 2ap$.

- Puisque X et T_a admettent chacune un moment d'ordre 2, d'après la question **5.**, $(X - T_a(X))^2$ admet une espérance.
- On a $X(\Omega) =]0;1[$ et la fonction $x \longmapsto (x - T_a(x))^2$ est continue sur $]0;1[$ sauf éventuellement en a et en $a+p$. Ainsi, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((X-T_a(X))^2\big) &= \int_0^1 (x-T_a(x))^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 (x-T_a(x))^2 dx && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 x^2dx - \int_0^1 2xT_a(x)dx + \int_0^1 T_a(x)^2dx && T_a \text{ est nulle en dehors de }]a;a+p[\text{ et vaut 1 sur }]a;a+p[\\
&= \frac{1}{3} - \int_a^{a+p} 2xdx + \int_a^{a+p} 1dx \\
&= \frac{1}{3} - \left[x^2\right]_a^{a+p} + p \\
&= \frac{1}{3} - (a+p)^2 + a^2 + p \\
&= \frac{1}{3} - a^2 - 2ap - p^2 + a^2 + p \\
&= \frac{1}{3} + p(1-p) - 2ap
\end{aligned}$$

Conclusion : $C(T_a) = \dfrac{1}{3} + p(1-p) - 2ap$.

7.c. En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p.

La fonction $a \longmapsto \dfrac{1}{3} + p(1-p) - 2ap$ est une fonction affine décroissante (car $2p > 0$) sur $[0;1-p]$.
Elle admet donc un minimum sur $[0;1-p]$, atteint en $1-p$.

Conclusion : $C(T_a)$ est minimal lorsque $a = 1-p$ et vaut alors $\dfrac{1}{3} - p(1-p)$.

8. Soient T_1 et T_2 les applications définies sur $]0;1[$ par :

$$\forall x \in]0;1[, \quad T_1(x) = -\ln(x) \quad ; \quad T_2(x) = -\ln(1-x)$$

8.a. Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.

- ◇ On a :

$$\begin{aligned}
\big(T_1(X)\big)(\Omega) &= T_1(X(\Omega)) \\
&= T_1(]0;1[) \\
&=]\lim_1 T_1; \lim_0 T_1[&& T_1 \text{ est continue et décroissante sur }]0;1[\\
&=]0;+\infty[
\end{aligned}$$

◇ Notons F_1 la fonction de répartition de $T_1(X)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

⇝ si $x \le 0$:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \mathbb{P}([T_1(X)\le x]) && \big(T_1(X)\big)(\Omega) \subset \mathbb{R}_*^+ \text{ et } x \le 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

⇝ si $x > 0$:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \mathbb{P}([T_1(X)\le x]) \\
&= \mathbb{P}([-\ln(X)\le x]) && \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\
&= \mathbb{P}([X \ge e^{-x}]) && X \text{ est à densité} \\
&= 1 - \mathbb{P}([X\le e^{-x}]) && x>0 \text{ donc } e^{-x} \in]0;1[\\
&= 1 - e^{-x}
\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Puisque la fonction de répartition caractérise la loi, on obtient :

$$T_1(X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$$

Conclusion : T_1 est une fonction de transport de X vers la loi $\mathscr{E}(1)$.

- De la même façon, on trouve :

$$T_2(X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$$

Conclusion : T_2 est une fonction de transport de X vers la loi $\mathscr{E}(1)$.

Petite remarque

C'est une démonstration de cours. Je conseille de traiter celle-ci en détail (puisqu'elle est parfaitement maitrisée) et d'aller plus vite sur l'autre.

Conclusion : T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une même loi, la loi exponentielle de paramètre 1.

8.b. On considère le programme suivant écrit en langage **Python** :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

S1=0
S2=0
for k in range(100000):
        x=rd.random()
        S1=S1+(x+np.log(x))**2
        S2=S2+(x+np.log(1-x))**2
print(S1/100000,S2/100000)
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir l'affichage suivant : `1.8390728131570475        0.8460420115532375`.
Commenter le résultat obtenu.

La variable `S1` prend comme valeur la somme de 100000 réalisations d'une variable aléatoire $(X+T_1(X))^2$.
Ainsi (d'après la loi faible des grands nombres) la valeur de $S1/100000$ est proche de $\mathbb{E}\big((X-T_1(X))^2\big)$, autrement dit, de $C(T_1)$.
De la même façon, $S2/100000$ est proche de $C(T_2)$.
On peut alors conjecturer que $C(T_2) < C(T_1)$.

8.c. En utilisant les résultats de la question 3., calculer et comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.

- D'après la question précédente, $T_1(X)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1, elle admet donc un moment d'ordre 2.
  C'est aussi le cas de la variable aléatoire X.
  Ainsi, d'après la question 5., $(X-T_1(X))^2$ admet une espérance. Donc $C(T_1)$ existe et, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto (x+\ln(x))^2$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) =]0;1[$) :

$$\begin{array}{rcll}
C(T_1) & = & \displaystyle\int_0^1 (x+\ln(x)^2) f_X(x)dx & \\
 & = & \displaystyle\int_0^1 x^2 + 2x\ln(x) + \ln(x)^2 dx & \text{linéarité de l'intégrale, licite car toutes les intégrales en jeu sont convergentes (question 3.a.)} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + 2\int_0^1 x\ln(x)dx + \int_0^1 \ln(x)^2 dx & \text{question 3.b.} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + 2\frac{-1}{4} + 2 & \\
 & = & \displaystyle\frac{11}{6} &
\end{array}$$

- De la même façon, $C(T_2)$ existe et, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto (x+\ln(1-x))^2$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) =]0;1[$) :

$$\begin{array}{rcll}
C(T_2) & = & \displaystyle\int_0^1 (x+\ln(1-x)^2) f_X(x)dx & \\
 & = & \displaystyle\int_0^1 x^2 + 2x\ln(1-x) + \ln(1-x)^2 dx & \text{linéarité de l'intégrale, licite car toutes les intégrales en jeu sont convergentes (question 3.a.)} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + 2\int_0^1 x\ln(1-x)dx + \int_0^1 \ln(1-x)^2 dx & \text{changement de variable } t = 1-x\text{, licite car affine} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + 2\int_1^0 (1-t)\ln(t)(-dt) + \int_1^0 \ln(t)^2(-dt) & \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + 2\int_0^1 \ln(t)dt - 2\int_0^1 t\ln(t)dt + \int_0^1 \ln(t)^2 dt & \text{question 3.b.} \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} - 2 - 2\frac{-1}{4} + 2 & \\
 & = & \displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1}{2} & \\
 & = & \displaystyle\frac{5}{6} &
\end{array}$$

Conclusion : $C(T_2) < C(T_1)$.

> **Petite remarque**
> L'énoncé initial demandait simplement de comparer... Pour cela, il n'était pas nécessaire de finir les calculs. Mais j'ai changé l'énoncé finalement.

8.d. A l'aide de la question **2.**, montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

Soit $p \in]0;1[$. D'après la question **8.**, $-\ln(1-X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

Ainsi, d'après la question **2.**, pour tout $a \in]0;1[$, $\lfloor -a\ln(1-x)\rfloor + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-e^{-\frac{1}{a}}\right)$.

Or, pour tout $a \in]0;1[$:

$$\begin{aligned} 1-e^{-\frac{1}{a}} = p &\iff -\frac{1}{a} = \ln(1-p) \qquad p \neq 0, \text{ donc } \ln(1-p) \neq 0 \\ &\iff a = \frac{-1}{\ln(1-p)} \end{aligned}$$

> **Petite remarque**
> On peut bien évidemment considérer $\lfloor -a\ln(x)\rfloor + 1$. Je n'ai fait que prendre celle de transport minimal parmi les deux possibles...

Conclusion : pour tout $p \in]0;1[$, la fonction $T : x \longmapsto \lfloor \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1-p)} \rfloor + 1$ est une fonction de transport de X vers la loi $\mathscr{G}(p)$.
Autrement dit, toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

8.e. Déduire des questions précédentes une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel $p \in]0;1[$ et renvoyant en sortie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simul(p):
    x=rd.random()
    y=np.floor(np.log(1-x)/np.log(1-p))+1
    return y
```

9. Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

9.a. Justifier que la fonction de répartition de Y, notée F_Y, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.

Puisque f_Y est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_Y'(x) = f_Y(x) > 0$$

Ainsi :

- F_Y est continue sur $\mathbb{R}$,
- F_Y est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : par théorème de bijection, F_Y est bijective de $\mathbb{R}$ dans $F_Y(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty} F_Y ; \lim\limits_{+\infty} F_Y[=]0;1[$.

9.b. Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

Notons G la fonction de répartition de $F_Y^{-1}(X)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([F_Y^{-1}(X) \leq x]) && F_Y \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= \mathbb{P}([X \leq F_Y(x)]) && F_Y(x) \in]0;1[\text{ et } X \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[) \\ &= F_Y(x) \end{aligned}$$

Ainsi Y et $F_Y^{-1}(X)$ ont la même fonction de répartition. Or la fonction de répartition caractérise la loi, donc Y et $F_Y^{-1}(X)$ ont la même loi.

Conclusion : F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

10. Cas particulier : on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite. On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de Y.

10.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy$.

- On a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ |F_Y(y)| \leq 1$$

  D'où :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ 0 \leq |yF_Y(y)\varphi(y)| \leq |y\varphi(y)|$$

- Or $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$, donc Y admet une espérance et ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |y\varphi(y)|dy$ est convergente.

Par critère de comparaison sur les intégrales à intégrande positive, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)dy$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy$ est convergente.

10.b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Soient $A, B \in \mathbb{R}$ avec $A < B$. On a :

$$\int_A^B yF_Y(y)\varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B F_Y(y)ye^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : y \longmapsto F_Y(y) \\ v : y \longmapsto -e^{-\frac{y^2}{2}} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[A, B]$ et pour tout $y \in [A, B]$: $\left|\begin{array}{l} u'(y) = \varphi(y) \\ v'(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}} \end{array}\right.$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_A^B F_Y(y)ye^{-\frac{y^2}{2}}dy &= \left[-e^{-\frac{y^2}{2}}F_Y(y)\right]_A^B + \int_A^B \varphi(y)e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= e^{-\frac{A^2}{2}}F_Y(A) - e^{-\frac{B^2}{2}}F_Y(B) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-\frac{2y^2}{2}}dy && \text{en posant } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= e^{-\frac{A^2}{2}}F_Y(A) - e^{-\frac{B^2}{2}}F_Y(B) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}dy \\
&= e^{-\frac{A^2}{2}}F_Y(A) - e^{-\frac{B^2}{2}}F_Y(B) + \sigma\int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}dy
\end{aligned}$$

Or :

- F_Y est bornée par 0 et 1 sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\lim_{A\to-\infty} e^{-\frac{A^2}{2}}F_Y(A) = 0 \quad ; \quad \lim_{B\to+\infty} e^{-\frac{B^2}{2}}F_Y(B) = 0$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}dy$ est une intégrale convergente égale à 1, car c'est l'intégrale de la densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}(0; \sigma^2)$.

Le passage à la limite quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$ est donc licite et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y)ye^{-\frac{y^2}{2}} \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}dy \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} && \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

10.c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2\varphi(y)dy$ est convergente et la calculer.

On a :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ (y - F_Y(y))^2\varphi(y) = y^2\varphi(y) + F_Y(y)^2\varphi(y) - 2yF_Y(y)\varphi(y)$$

Or :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)dy$ est convergente, car il s'agit du moment d'ordre 2 de Y (qui existe bien).

  Et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 && Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0; 1), \text{ donc } \mathbb{E}(Y) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

  D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)dy = 1$$

- d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

- pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $A < B$:

$$\begin{aligned}
\int_A^B F_Y(y)^2\varphi(y)dy &= \int_A^B F_Y'(y)F_Y(y)^2dy \\
&= \left[\frac{1}{3}F_Y(y)^3\right]_A^B \\
&= \frac{1}{3}(F_Y(B) - F_Y(A))
\end{aligned}$$

Et comme F_Y est une fonction de répartition :

$$\lim_{A\to-\infty} F_Y(A) = 0 \quad ; \quad \lim_{B\to+\infty} F_Y(B) = 1$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y)\varphi(y)dy$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y)\varphi(y)dy = \frac{1}{3}$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2\varphi(y)dy$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes, elle est donc convergente et, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2\varphi(y)dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)dy - 2\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y)^2\varphi(y)dy \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2\varphi(y)dy$ est convergente et vaut $\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

10.d. En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

D'après la question **9.b.**, $F_Y^{-1}(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, ainsi $F_Y^{-1}(X)$ admet un moment d'ordre 2.
C'est aussi le cas de X.
Ainsi, d'après la question **5.**, $(X - F_Y^{-1}(X))^2$ admet une espérance. Donc $C(F_Y^{-1})$ existe et, par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto (x - F_Y^{-1})^2$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) =]0;1[$) :

$$\begin{aligned}C(F_Y^{-1}) &= \int_0^1 (x - F_Y^{-1}(x))^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 (x - F_Y^{-1}(x))^2 dx\end{aligned}$$

Soient $A, B \in]0;1[$ tels que $A < B$. Effectuons le changement de variable $y = F_Y^{-1}(x)$.
La fonction $y \longmapsto F_Y(y)$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc le changement de variable est licite et :

$$y = F_Y^{-1}(y) \quad ; \quad x = F_Y(y) \quad ; \quad dx = F_Y'(y)dy = \varphi(y)dy$$

$$\int_A^B (x - F_Y^{-1}(x))^2 dx = \int_{F_Y^{-1}(A)}^{F_Y^{-1}(B)} (F_Y(y) - y)^2\varphi(y)dy$$

Or :

$$\lim_{a\to-\infty} F_Y(a) = 0 \quad ; \quad \lim_{b\to+\infty} F_Y(b) = 1$$

Donc :

$$\lim_{A\to0} F_Y^{-1}(A) = -\infty \quad ; \quad \lim_{B\to1} F_Y^{-1}(B) = +\infty$$

Enfin, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - y)^2\varphi(y)dy$ converge (d'après la question précédente), le passage à la limite quand $A \to 0$ et $B \to 1$ est licite et ainsi :

$$\begin{aligned}C(F_Y^{-1}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - y)^2\varphi(y)dy \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

question précédente

Conclusion : le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Petite remarque
En maths appro, les changements de variables sont autorisés sur les intégrales impropres. Les hypothèses demeurent en revanche les mêmes.

Remarque

Autre méthode après avoir justifié que $C(F_Y^{-1})$ existe.
On a :

$$\begin{aligned}C(F_Y^{-1}) &= \mathbb{E}\left((X - F_Y^{-1}(X))^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left((F_Y(Y) - Y)^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - y)^2\varphi(y)dy \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Y et $F_Y^{-1}(X)$ ont même loi et F_Y est continue, donc $F_Y(Y)$ et X ont même loi, donc $X - F_Y^{-1}(X)$ et $F_Y(Y) - Y$ ont même loi...
théorème de transfert, licite car...
question précédente

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe.

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère N réels $d_1, d_2, \dots, d_N$ (appelés points de départ) et N réels $a_1, a_2, \dots, a_N$ (appelées points d'arrivée) vérifiant $d_1 < d_2 < \dots < d_N$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_N$. On pose $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$.

11. **11.a.** Montrer que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1; N]\!]^2$, on a : $d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$.

Soit $(k, \ell) \in [\![1; N]\!]^2$.
On a :

$$\begin{aligned} d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell \quad &\Longleftrightarrow \quad d_k a_k - d_k a_\ell \geq d_\ell a_k - d_\ell a_\ell \\ &\Longleftrightarrow \quad d_k(a_k - a_\ell) \geq d_\ell(a_k - a_\ell) \end{aligned}$$

- si $k \geq \ell$:
on a alors $d_k \geq d_\ell$ et $a_k \geq a_\ell$, donc $a_k - a_\ell \geq 0$ et ainsi : $d_k(a_k - a_\ell) \geq d_\ell(a_k - a_\ell)$.
- si $k < \ell$:
on a alors $d_k < d_\ell$ et $a_k < a_\ell$, donc $a_k - a_\ell < 0$ et ainsi : $d_k(a_k - a_\ell) \geq d_\ell(a_k - a_\ell)$.

Dans les deux cas, $d_k(a_k - a_\ell) \geq d_\ell(a_k - a_\ell)$, et donc le résultat voulu par équivalences.

Conclusion : pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1; N]\!]^2$, on a : $d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$.

11.b. En déduire, à l'aide d'une double sommation, que pour tout N-uplet $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in (\mathbb{R}^+)^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k a_k\right) \tag{1}$$

Soit $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in (\mathbb{R}^+)^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$.

D'après la question précédente :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1; N]\!]^2, \;\; d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$$

D'où, puisque $p_1, \dots, p_N \geq 0$:

$$\forall (k, \ell) \in [\![1; N]\!]^2, \;\; p_k d_k a_k \geq p_k d_k a_\ell + p_k d_\ell a_k - p_k d_\ell a_\ell$$

Ainsi, en sommant (licite, car sommes finies) et par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} p_k p_\ell d_k a_k \geq \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} p_k p_\ell d_k a_\ell + \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} p_k p_\ell d_\ell a_k - \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N} p_k p_\ell d_\ell a_\ell$$

D'où, en intervertissant les deux sommes dans le dernier terme de droite (licite car sommes finies) :

$$\sum_{k=1}^{N}\left(p_k d_k a_k \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} p_\ell}_{=1}\right) \geq \sum_{k=1}^{N}\left(p_k d_k \sum_{\ell=1}^{N} p_\ell a_\ell\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(p_k a_k \sum_{\ell=1}^{N} p_\ell d_\ell\right) - \sum_{\ell=1}^{N}\left(p_\ell d_\ell a_\ell \underbrace{\sum_{k=1}^{N} p_k}_{=1}\right)$$

C'est à dire, par linéarité de la somme (pour les premier et second termes de droite) :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{\ell=1}^{N} p_\ell a_\ell\right)\left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) + \left(\sum_{\ell=1}^{N} p_\ell d_\ell\right)\left(\sum_{k=1}^{N} p_k a_k\right) - \sum_{\ell=1}^{N} p_\ell d_\ell a_\ell$$

Et ainsi :

$$2\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geq 2\left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k a_k\right)$$

D'où le résultat.

Conclusion : pour tout N-uplet $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in (\mathbb{R}^+)^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k a_k\right)$$

12. Soit $t \in \mathscr{E}_N$. On réordonne la liste $\big(t(1), t(2), \dots, t(N)\big)$ selon les valeurs croissantes et on note alors $\big(\widehat{t}(1), \widehat{t}(2), \dots, \widehat{t}(N)\big)$ la liste ordonnée obtenue. On a donc : $\widehat{t}(1) \leq \widehat{t}(2) \leq \dots \leq \widehat{t}(N)$.

12.a. Justifier pour tout $n \in [\![1; N]\!]$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^{N} a_{\widehat{t}(k)}$.

Soit $n \in [\![1; N]\!]$.

★Subtile...★
On reconnaît bien le sujet TOP3 ici... Dans un sujet TOP5, la majoration d'une somme provient (presque ?) toujours d'une majoration des termes généraux. Là, ce n'est pas du tout le cas !

La somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$ est la somme des $N-(n+1)$ plus grands termes de la liste $\big(t(1), t(2), ..., t(N)\big)$.
Elle est donc supérieure à la somme de n'importe quels $N-(n+1)$ termes de la liste $\big(t(1), t(2), ..., t(N)\big)$.

Conclusion : pour tout $n \in [\![1; N]\!]$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$.

12.b. On pose $d_0 = 0$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^{N}\left((d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left((d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N}(d_n - d_{n-1})a_{t(k)}\right)\\
&= \sum_{1\leq n\leq k\leq N}(d_n - d_{n-1})a_{t(k)}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}(d_n - d_{n-1})a_{t(k)}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\left(a_{t(k)}\sum_{n=1}^{k}(d_n - d_{n-1})\right) && \text{télescopage}\\
&= \sum_{k=1}^{N}\big(a_{t(k)}(d_k - d_0)\big) && d_0 = 0\\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{t(k)} d_k
\end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^{N}\left((d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)$.

Remarque

Autre façon de faire :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left((d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(d_n\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right) - \sum_{n=1}^{N}\left(d_{n-1}\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right) && \text{avec comme convention : } \sum_{k=N+1}^{N} a_{t(k)} = 0\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(d_n\sum_{k=n+1}^{N} a_{t(k)} + d_n a_{t(n)}\right) + -\sum_{n=1}^{N}\left(d_{n-1}\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(d_n\sum_{k=n+1}^{N} a_{t(k)}\right) + \sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} - \sum_{n=1}^{N}\left(d_{n-1}\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right) && \text{télescopage}\\
&= d_N\sum_{k=N+1}^{N} a_{t(k)} - d_0\sum_{k=1}^{N} a_{t(k)} + \sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} && d_0 = 0 \text{ et } \sum_{k=N+1}^{N} a_{t(k)} = 0\\
&= \sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)}
\end{aligned}$$

12.c. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} d_n a_{\hat{t}(n)} \qquad (2)$$

On aimerait utiliser la question 12.a. et multiplier par $d_n - d_{n-1}$... Souci possible si $n = 1$. En effet, on a posé $d_0 = 0$ mais on ne sait pas si $d_1 \geq 0$ ou pas.

- Soit $n \in [\![2; N]\!]$. D'après la question 12.a. :

$$\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$$

Ainsi, puisque $d_n - d_{n-1} > 0$, on obtient :

$$(d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq (d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$$

- Si $n = 1$:

Les sommes $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$ contiennent toutes deux tous les termes de la liste $\big(t(1), ..., t(N)\big)$.
Elles sont donc égales. Et ainsi :

$$d_1\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq d_1\sum_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}$$

On a donc :

$$\forall n \in [\![1;N]\!],\ (d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq (d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{\widehat{t}(k)}$$

D'où, en sommant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N}(d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leq \sum_{n=1}^{N}(d_n - d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{\widehat{t}(k)}$$

Et, d'après la question précédente, dont le résultat est encore valable si l'on a $\widehat{t}(k)$ au lieu de $t(k)$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} d_n a_{\widehat{t}(n)}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^{N} d_n a_{\widehat{t}(n)}$.

On appelle *programme de transport* toute bijection T de D dans A. On associe à un programme de transport T un *coût* de transport $c(T)$ défini par : $c(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\big(d_k - T(d_k)\big)^2$.

13. Soit $\widehat{T}$ le programme de transport défini par : $\forall k \in [\![1;N]\!],\ \widehat{T}(d_k) = a_k$.
Déduire des questions précédentes que le programme $\widehat{T}$ est optimal ; c'est-à-dire que pour tout programme de transport T, on a $c(T) \geq c(\widehat{T})$.
Soit T un programme de transport, autrement dit, T est une bijection de D dans A.
Pour tout $\in [\![1;N]\!]$, on note $t(k)$ l'entier de $[\![1;N]\!]$, tel que $T(d_k) = a_{t(k)}$.
Puisque T est bijective de D dans A, l'application t est également bijective de $[\![1;N]\!]$ dans lui-même, donc $t \in \mathscr{E}_N$.
Raisonnons ensuite par équivalences :

Autrement dit :
$t(k)$ est l'indice de l'élément $T(d_k)$, qui est un élément de A.

$$\begin{aligned}
c(T) \geq c(\widehat{T}) &\iff \sum_{k=1}^{N}\big(d_k - T(d_k)\big)^2 \geq \sum_{k=1}^{N}\big(d_k - \widehat{T}(d_k)\big)^2 \\
&\iff \sum_{k=1}^{N} d_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} d_k T(d_k) + \sum_{k=1}^{N} T(d_k)^2 \geq \sum_{k=1}^{N} d_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N} d_k \widehat{T}(d_k) + \sum_{k=1}^{N} \widehat{T}(d_k)^2 \\
&\iff -2\sum_{k=1}^{N} d_k a_{t(k)} + \sum_{k=1}^{N} a_{t(k)}^2 \geq -2\sum_{k=1}^{N} d_k a_{\widehat{t}(k)} + \sum_{k=1}^{N} a_{\widehat{t}(k)}^2 \\
&\iff -2\sum_{k=1}^{N} d_k a_{t(k)} \geq -2\sum_{k=1}^{N} d_k a_{\widehat{t}(k)} \\
&\iff -\sum_{k=1}^{N} d_k a_{t(k)} \leq -\sum_{k=1}^{N} d_k a_{\widehat{t}(k)}
\end{aligned}$$

t et $\widehat{t}$ sont bijectives, donc $\{a_{t(k)},\ k \in [\![1;N]\!]\} = \{a_{\widehat{t}(k)},\ k \in [\![1;N]\!]\} = A$, ainsi les sommes des carrés sont égales

Or, d'après la question précédente, cette dernière inégalité est vraie...

Conclusion : le programme $\widehat{T}$ est optimal ; c'est-à-dire que pour tout programme de transport T, on a $c(T) \geq c(\widehat{T})$.

14. *Interprétation probabiliste des inégalités* (1) *et* (2).
Soit h une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    14.a. En utilisant l'inégalité (1), établir que pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a : $\mathbb{E}\big(Xh(X)\big) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\big(h(X)\big)$.
    Soit X une variable aléatoire discrète ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
    - Puisque X est finie, c'est aussi le cas de $h(X)$ et $Xh(X)$, ainsi toutes les espérances en jeu existent.
    - Considérons $X(\Omega) = \{d_1, \dots, d_N\}$, où $d_1 < d_2 < \dots < d_N$. Pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, notons $p_k = \mathbb{P}([X = d_k])$. Et notons, pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, $a_k = h(d_k)$.
    - De cette façon, on a :
        - ◇ $d_1 < d_2 < \dots < d_N$
        - ◇ et ainsi, puisque h est croissante : $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$
        - ◇ $\forall k \in [\![1;N]\!]$, $p_k \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$
        - ◇
        $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} d_k p_k$$
        Et, par théorème de transfert :
        $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Xh(X)) &= \sum_{k=1}^{N} d_k h(d_k) p_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} d_k a_k p_k\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X)) &= \sum_{k=1}^{N} h(d_k)p_k \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_k p_k\end{aligned}$$

Le résultat voulu découle ainsi de (1), en remarquant tout de même que la stricte croissance de la suite (a_k) n'était pas nécessaire dans les questions 11.a. et 11.b. pour établir (1).

Petite remarque
Ce n'est pas très correct de demander aux candidats d'utiliser un résultat de l'énoncé avec des hypothèses amoindries (constatées dans la démonstration). C'est d'une part très discriminant et d'autre part déroutant !

Conclusion : pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a : $\mathbb{E}\big(Xh(X)\big) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\big(h(X)\big)$.

14.b. Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire du couple $\big(X, h(X)\big)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives ?

- Notons déjà que la covariance du couple $(X, h(X))$ est bien définie, car X et $h(X)$ admettent un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies. Ainsi, dans le cas où les variances de X et $h(X)$ sont non nulles, le coefficient de corrélation linéaire du couple $(X, h(X))$ est également bien défini.
- Ensuite, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{Cov}(X, h(X)) = \mathbb{E}(Xh(X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(h(X))$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\mathrm{Cov}(X, h(X)) \geq 0$$

Conclusion : le coefficient de corrélation linéaire du couple $\big(X, h(X)\big)$ est positif.

14.c. En utilisant l'inégalité (2), montrer que si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$ et t un élément de $\mathscr{E}_N$, on a : $\mathbb{E}\big(h(X)t(X)\big) \leq \mathbb{E}\big(h(X)\widehat{t}(X)\big)$.

Soient X une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$ et t un élément de $\mathscr{E}_N$.

- Là encore, les espérances en jeu existent.
- Notons, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$:

$$a_k = k \quad ; \quad d_k = h(k)$$

- De cette façon, on a :
  - ◇ $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$
  - ◇ et, puisque h est croissante : $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_N$
  - ◇ Par théorème de transfert, et puisque X suit la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(h(X)t(X)\big) &= \sum_{k=1}^{N} h(k)t(k)\mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} d_k a_{t(k)}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(h(X)\widehat{t}(X)\big) &= \sum_{k=1}^{N} h(k)\widehat{t}(k)\mathbb{P}([X = k]) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} d_k a_{\widehat{t}(k)}\end{aligned}$$

Le résultat voulu découle ainsi de (2), en remarquant tout de même que la stricte croissance de la suite (d_k) n'était pas nécessaire dans les questions 12.a., 12.b. et 12.c. pour établir (2).

Petite remarque
Deux fois !!

Conclusion : si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$ et t un élément de $\mathscr{E}_N$, on a : $\mathbb{E}\big(h(X)t(X)\big) \leq \mathbb{E}\big(h(X)\widehat{t}(X)\big)$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire.

Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I.

Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0; 1]$ et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.
Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors du segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y.
On suppose l'existence d'une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; 1]$, à valeurs dans $[\alpha, \beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y.

15. Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor & \text{si } 0 \leq U(\omega) < 1 \\ N & \text{si } U(\omega) = 1 \end{cases} \quad ; \quad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right)$$

15.a. Trouver la loi de la variable aléatoire X_N.

- Soit $\omega \in \Omega$.
  - Si $U(\omega) \in [0;1[$:
    Dans ce cas $1 \leq 1 + NU(\omega) < N+1$.
    Et ainsi : $\lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor \in [\![1;N]\!]$.
    Autrement dit : $X_N(\omega) \in [\![1.N]\!]$.
  - Si $U(\omega) = 1$:
    $X_n(\omega) = N$.

  Dans tous les cas, $X_N(\omega) \in [\![1;N]\!]$.
  Ainsi :
$$X_N(\Omega) \subset [\![1;N]\!]$$

♣ Méthode !
Une inclusion suffit pour ce type de questions. Inutile de perdre du temps sur l'inclusion réciproque...

- Soit $k \in [\![1;N]\!]$.
  - Si $k \in [\![1;N-1]\!]$.
    Dans ce cas, $U \neq 1$ et ainsi :

✘ Attention !
Cette distinction est nécessaire, puisque X_N peut valoir N dans les deux cas...

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_N = k]) &= \mathbb{P}([\lfloor 1 + NU \rfloor = k]) \\
&= \mathbb{P}([k \leq 1 + NU < k+1]) && N > 0 \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{k-1}{N} \leq U < \frac{k}{N}\right]\right) && U \text{ est à densité, en notant } F_U \text{ sa fonction de répartition} \\
&= F_U\left(\frac{k}{N}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{N}\right) && U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1]) \text{ et } \frac{k}{N}, \frac{k-1}{N} \in [0;1] \\
&= \frac{k}{N} - \frac{k-1}{N} \\
&= \frac{1}{N}
\end{aligned}$$

  - Si $k = N$.
    Puisque $X_N(\Omega) = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X_N = k]) = 1$.
    D'où on obtient :
$$\mathbb{P}([X_N = N]) = \frac{1}{N}$$

Conclusion : $X_N \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1;N]\!]\right)$.

Petite remarque
Question classique qu'il fallait aller chercher...

15.b. Établir l'existence d'une constante $\lambda > 0$, indépendante de N, telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ |Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \dfrac{\lambda}{N}$.

On a, pour tout $\omega \in \Omega$:
$$|Z(\omega) - Y_N(\omega)| = \left| g(U(\omega)) - g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right) \right|$$

➠Réflexe !
Ca ne coûte rien... et sous cette forme là, ça empeste l'IAF à des kilomètres !

On sait que :

- g est dérivable sur $[0;1]$ car $\mathscr{C}^1$,
- $|g'|$ est continue sur le segment $[0;1]$, (car g l'est et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$) d'après le théorème des bornes, il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que : $\forall x \in [0;1],\ |g'(x)| \leq M$. Posons ensuite $\lambda = M + 1$ de sorte que $\lambda > 0$.

★Subtile...★
En fait, $M > 0$, car sinon, la fonction g serait constante et dans ce cas la variable aléatoire $g(U)$ suivrait une loi certaine et donc ne suivrait pas la même loi que Y, puisque Y est à densité.

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :
$$\forall (x,y) \in [0;1]^2,\ |g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Soit ensuite $\omega \in \Omega$.

- Puisque $U \hookrightarrow \mathscr{U}\left([0;1]\right)$, on a $U(\omega) \in [0;1]$.
- Et puisque $X_N(\omega) \in [\![1;N]\!]$, on a $\dfrac{X_N(\omega)}{N} \in [0;1]$.

On obtient alors :
$$\left| g(U(\omega)) - g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right) \right| \leq \lambda \left| U(\omega) - \frac{X_N(\omega)}{N} \right|$$

Distinguons deux cas :

- si $U(\omega) = 1$.
  Dans ce cas, $X_N(\omega) = N$, et on obtient alors $U(\omega) = \dfrac{X_N(\omega)}{N}$ et donc :
$$|Z(\omega) - Y_N(\omega)| = 0$$
  D'où le résultat voulu.

Petite remarque
0La disjonction de cas pourrait être faite dès le début.

- si $U(\omega) \neq 1$.
  Dans ce cas, $X_N(\omega) = \lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor$.
  Ainsi :
  $$X_N(\omega) \leq 1 + NU(\omega) < X_N(\omega) + 1$$
  Et donc :
  $$-1 \leq NU(\omega) - X_N(\omega) < 0$$
  D'où :
  $$\frac{-1}{N} \leq U(\omega) - \frac{X_N(\omega)}{N} < 0 \leq \frac{1}{N}$$
  Et donc :
  $$\left| U(\omega) - \frac{X_N(\omega)}{N} \right| \leq \frac{1}{N}$$
  Puisque $\lambda > 0$, on obtient par transitivité :
  $$\left| g(U(\omega)) - g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right) \right| \leq \frac{\lambda}{N}$$

☞ **Rappel...**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Conclusion : il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $|Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \frac{\lambda}{N}$.

15.c. Montrer que pour tout réel y, on a : $F_Y\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < y])$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque Z et Y ont la même loi, elles ont la même fonction de répartition. Ainsi :

$$\begin{aligned} F_Y\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) &= F_Z\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[Z \leq y - \frac{\lambda}{N}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[Z < y - \frac{\lambda}{N}\right]\right) \quad Z \text{ est à densité} \end{aligned}$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons que $\omega \in \left[Z < y - \frac{\lambda}{N}\right]$. Dans ce cas : $Z(\omega) < y - \frac{\lambda}{N}$.
Mais, d'après la question précédente :
$$|Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \frac{\lambda}{N}$$
Donc :
$$\frac{-\lambda}{N} \leq Z(\omega) - Y_N(\omega) \leq \frac{\lambda}{N}$$
D'où :
$$Y_N(\omega) \leq Z(\omega) + \frac{\lambda}{N}$$
Ainsi, puisque $Z(\omega) < y - \frac{\lambda}{N}$, par transitivité on obtient :
$$Y_N(\omega) < y$$
On a donc établi :
$$\left[Z < y - \frac{\lambda}{N}\right] \subset [Y_N < y]$$
Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :
$$\mathbb{P}\left(\left[Z < y - \frac{\lambda}{N}\right]\right) \leq \mathbb{P}([Y_n < y])$$

➠ **Réflexe !**
Pour établir une inégalité sur des probabilités, on peut essayer d'établir une inclusion sur les évènements en jeu.

Conclusion : pour tout réel y, on a $F_Y\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < y])$.

16. Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, on pose $t_N(k) = g\left(\frac{k}{N}\right)$. On définit alors $\widehat{t}_N$ à partir de t_N comme $\widehat{t}$ à partir de t dans la question 12..

16.a. Établir pour tout $k \in [\![1; N]\!]$ les inégalités : $F_Y\left(\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) < \frac{k}{N}$.

Soit $k \in [\![1; N]\!]$.

- Déjà, d'après la question précédente avec $y = \widehat{t}_N(k)$, on a : $F_Y\left(\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < \widehat{t}_N(k)])$.
- Ensuite :

16.b. On note F_Y^{-1} la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha, \beta]$ de la fonction F_Y.

Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}g\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{\lambda}{N}\right)$.

Soit $N \geq 1$.

- Commençons par remarquer que la fonction F_Y^{-1} est bien définie... En effet :
  - ◇ F_Y est continue sur $[\alpha; \beta]$
  - ◇ F_Y est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$, car $F_Y' = f_y > 0$ sur $[\alpha, \beta]$

  Donc par théorème de bijection, F_Y est bijective de $[\alpha, \beta]$ dans $F_Y([\alpha, \beta]) = [F_Y(\alpha), F_Y(\beta)] = [0; 1]$, car f_Y est nulle en dehors de $[\alpha, \beta]$...
-

16.c. En déduire l'inégalité : $\mathbb{E}\big(Ug(U)\big) \leq \mathbb{E}\big(UF_Y^{-1}(U)\big)$.

Par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto xg(x)$ et $x \longmapsto xF_Y^{-1}(x)$ sont continues sur $[0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(Ug(U)\big) &= \int_0^1 xg(x)f_U(x)dx \qquad U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])\\ &= \int_0^1 xg(x)dx\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(UF_Y^{-1}(U)\big) &= \int_0^1 xF_Y^{-1}(x)f_U(x)dx \qquad U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])\\ &= \int_0^1 xF_Y^{-1}(x)dx\end{aligned}$$

Or :

- puisque $x \longmapsto xg(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, d'après la question **6.**, on a :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}g\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 xg(x)dx$$

- pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{\lambda}{N}\right) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{\lambda}{N^3}\sum_{k=1}^{N}k\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{\lambda N(N+1)}{2N^3}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right)+\frac{\lambda N(N+1)}{2N^2}\end{aligned}$$

  et puisque $x \longmapsto xF_Y^{-1}(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; 1]$, d'après la question **6.**, on a aussi :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 xF_Y^{-1}(x)dx$$

Pourquoi ?

F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, car f_Y est continue sur $[\alpha; \beta]$. Et comme $F_Y' = f_Y > 0$ sur $[\alpha, \beta]$, on en déduit que F_Y^{-1} est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; 1]$.

Conclusion : d'où le résultat en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente.

17. Parmi les fonctions de transport de classe $\mathscr{C}^1$ de U vers la loi de Y, trouver une fonction de transport de coût minimal.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★