Devoir surveillé 5

Samedi 16 décembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

Problème

Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible.
Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

- Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z.
- Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on note $\mathscr{E}_N$ l'ensemble des applications de $[\![1; N]\!]$ dans $[\![1; N]\!]$.
- On rappelle le résultat suivant, appelé *théorème d'existence de l'espérance par domination* : si X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $|X| \leq Y$ et que Y possède une espérance, alors X possède une espérance.

Préliminaires.

1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
   - 1.a. Sans justifier, donner le nombre d'éléments de $\mathscr{E}_N$.
   - 1.b. Parmi les éléments de $\mathscr{E}_N$, quel est le nombre d'applications injectives et parmi celles-ci, combien sont strictement monotones ? On justifiera rapidement les réponses données.
2. Soit $p \in]0; 1[$.
   On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \lfloor pX(\omega) \rfloor$ et on admet que l'application Y ainsi définie est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   - 2.a. Déterminer la loi de Y.
   - 2.b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   - 2.c. Établir : $0 < \mathbb{E}(Y) < p$.
3. 3.a. Pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx$ est convergente.
   - 3.b. Établir : $\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^1 x^r \ln(x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.
4. 4.a. Établir :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$
   - 4.b. Soient X et Y deux variables aléatoires (non nécessairement discrètes ou à densité) définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y admettent un moment d'ordre 2. Démontrer que XY possède une espérance.
5. Soient X une variable aléatoire ainsi que f, g deux applications définies sur $X(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(X)$ et $g(X)$ ont la même loi et que X, $f(X)$ et $g(X)$ admettent un moment d'ordre 2. Établir l'existence de $\mathbb{E}\left(\left(X - f(X)\right)^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(\left(X - g(X)\right)^2\right)$, puis démontrer :
   $$\mathbb{E}\left(\left(X - f(X)\right)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\left(X - g(X)\right)^2\right) \iff \mathbb{E}\big(Xf(X)\big) \geq \mathbb{E}\big(Xg(X)\big)$$
6. Soient deux réels a, b tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. On note :
   $$I = \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \ \text{ où } \ \forall k \in [\![0; n]\!], \ x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$
   - 6.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big(f(t) - f(x_k)\big) dt$.
   - 6.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$:
   $$|f(t) - f(x_k)| \leq M|t - x_k| \leq M\frac{b-a}{n}$$
   - 6.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|I - S_n| \leq M\dfrac{(b-a)^2}{n}$ puis conclure sur la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire.

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X s'il existe une application $T : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y.
L'application T est alors appelée *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y.
On associe à une fonction de transport T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par : $C(T) = \mathbb{E}\left(\left(X - T(X)\right)^2\right)$.
Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0; 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.

7. Soit $p \in]0; 1[$. Pour tout réel $a \in [0; 1-p]$, on note dans cette question T_a la fonction définie sur $]0; 1[$ par :
   $$\forall x \in]0; 1[, \ T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a; a+p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   - 7.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_a(X) = 1])$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.

7.b. Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\dfrac{1}{3}+p(1-p)-2ap$.

7.c. En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p.

8. Soient T_1 et T_2 les applications définies sur $]0;1[$ par :

$$\forall x \in]0;1[, \quad T_1(x)=-\ln(x) \quad ; \quad T_2(x)=-\ln(1-x)$$

8.a. Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.

8.b. On considère le programme suivant écrit en langage **Python** :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

S1=0
S2=0
for k in range(100000):
        x=rd.random()
        S1=S1+(x+np.log(x))**2
        S2=S2+(x+np.log(1-x))**2
print(S1/100000,S2/100000)
```

L'exécution de ce programme permet d'obtenir l'affichage suivant : `1.8390728131570475      0.8460420115532375`.
Commenter le résultat obtenu.

8.c. En utilisant les résultats de la question 3., comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.

8.d. A l'aide de la question 2., montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

8.e. Déduire des questions précédentes une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel $p \in]0;1[$ et renvoyant en sortie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

9. Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

9.a. Justifier que la fonction de répartition de Y, notée F_Y, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$.

9.b. Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

10. Cas particulier : on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite. On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de Y.

10.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy$.

10.b. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)dy=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

10.c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(y-F_Y(y))^2\varphi(y)dy$ est convergente et la calculer.

10.d. En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe.

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère N réels $d_1, d_2, \dots, d_N$ (appelés points de départ) et N réels $a_1, a_2, \dots, a_N$ (appelées points d'arrivée) vérifiant $d_1<d_2<\dots<d_N$ et $a_1<a_2<\dots<a_N$. On pose $D=\{d_1,d_2,\dots,d_N\}$ et $A=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$.

11. 11.a. Montrer que pour tout couple $(k,\ell)\in[\![1;N]\!]^2$, on a : $d_ka_k \geq d_ka_\ell+d_\ell a_k-d_\ell a_\ell$.

11.b. En déduire, à l'aide d'une double sommation, que pour tout N-uplet $(p_1p_2,\dots,p_N)\in(\mathbb{R}^+)^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^N p_k=1$, on a :

$$\sum_{k=1}^N p_kd_ka_k \geq \left(\sum_{k=1}^N p_kd_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^N p_ka_k\right) \tag{1}$$

12. Soit $t\in\mathscr{E}_N$. On réordonne la liste $\big(t(1),t(2),\dots,t(N)\big)$ selon les valeurs croissantes et on note alors $\big(\widehat{t}(1),\widehat{t}(2),\dots,\widehat{t}(N)\big)$ la liste ordonnée obtenue. On a donc : $\widehat{t}(1)\leq\widehat{t}(2)\leq\dots\leq\widehat{t}(N)$.

12.a. Justifier pour tout $n\in[\![1;N]\!]$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^N a_{t(k)}\leq\sum_{k=n}^N a_{\widehat{t}(k)}$.

12.b. On pose $d_0=0$. Établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^N d_na_{t(n)}=\sum_{n=1}^N\left((d_n-d_{n-1})\sum_{k=n}^N a_{t(k)}\right)$.

12.c. En déduire :

$$\sum_{n=1}^N d_na_{t(n)}\leq\sum_{n=1}^N d_na_{\widehat{t}(n)} \tag{2}$$

On appelle *programme de transport* toute bijection T de D dans A. On associe à un programme de transport T un *coût* de transport $c(T)$ défini par : $c(T)=\displaystyle\sum_{k=1}^N\big(d_k-T(d_k)\big)^2$.

13. Soit $\widehat{T}$ le programme de transport défini par : $\forall k \in [\![1;N]\!],\ \widehat{T}(d_k) = a_k$.
Déduire des questions précédentes que le programme $\widehat{T}$ est optimal ; c'est-à-dire que pour tout programme de transport T, on a $c(T) \geq c(\widehat{T})$.

14. *Interprétation probabiliste des inégalités* (1) *et* (2).
Soit h une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

14.a. En utilisant l'inégalité (1), établir que pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, on a : $\mathbb{E}\big(Xh(X)\big) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\big(h(X)\big)$.

14.b. Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire du couple $\big(X, h(X)\big)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives ?

14.c. En utilisant l'inégalité (2), montrer que si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ et t un élément de $\mathscr{E}_N$, on a : $\mathbb{E}\big(h(X)t(X)\big) \leq \mathbb{E}\big(h(X)\widehat{t}(X)\big)$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire.

Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I.

Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0;1]$ et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.
Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors du segment $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y.
On suppose l'existence d'une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, à valeurs dans $[\alpha, \beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y.

15. Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor & \text{si } 0 \leq U(\omega) < 1 \\ N & \text{si } U(\omega) = 1 \end{cases} \qquad ; \qquad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right)$$

15.a. Trouver la loi de la variable aléatoire X_N.

15.b. Établir l'existence d'une constante $\lambda > 0$, indépendante de N, telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ |Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \dfrac{\lambda}{N}$.

15.c. Montrer que pour tout réel y, on a : $F_Y\left(y - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < y])$.

16. Pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, on pose $t_N(k) = g\left(\dfrac{k}{N}\right)$. On définit alors $\widehat{t_N}$ à partir de t_N comme $\widehat{t}$ à partir de t dans la question 12..

16.a. Établir pour tout $k \in [\![1;N]\!]$ les inégalités : $F_Y\left(\widehat{t_N}(k) - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < \widehat{t_N}(k)]) < \dfrac{k}{N}$.

16.b. On note $F - Y^{-1}$ la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha, \beta]$ de la fonction F_Y.
Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N}\right)$.

16.c. En déduire l'inégalité : $\mathbb{E}\big(Ug(U)\big) \leq \mathbb{E}\big(UF_Y^{-1}(U)\big)$.

17. Parmi les fonctions de transport de classe $\mathscr{C}^1$ de U vers la loi de Y, trouver une fonction de transport de coût minimal.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★