Devoir surveillé 5

Samedi 16 décembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignées ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 (Fait maison)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

Partie I. Réduction de la matrice A

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.
   Sans difficulté, on trouve : $(A - I_3)^2(A + I_3) = 0_3$.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.
   - D'après la question précédente, le polynôme $(X-1)^2(X+1)$ est annulateur de la matrice A. Par conséquent, les racines de ce polynôme sont les valeurs propres possibles de A.

     Conclusion : -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles de A.
   - Ensuite :
     - On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A - I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) && C_1 + C_2 = -C_3 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{rg}(A - I_3) \neq 3$, on en déduit que 1 est valeur propre de A et (en notant $E_1(A)$ l'espace propre associé) par théorème du rang :

$$3 = \mathrm{rg}(A - I_3) + \dim\big(\ker(A - I_3)\big)$$

D'où :

$$\dim\big(\ker(A - I_3)\big) = 1$$

On remarque ensuite que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3)$. Notons pour la suite $E_1(A) = \ker(A - I_3)$. Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $E_1(A)$ qui est :

$\leadsto$ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

$\leadsto$ de cardinal 1, égal à la dimension de $E_1(A)$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A)$.

- On procède de la même façon pour -1...

Conclusion : -1 est valeur propre de A et que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

> **Important !**
> Ne pas oublier de mentionner que 1 est valeur propre de A, on ne le savait pas encore...

> **À retenir...**
> En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes d'une matrice M, si on a $aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0$, alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(M)$.
> Ici, durant la recherche du rang de $A - I_3$, on a remarqué que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$...

3. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   3.a. Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1.
   Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On trouve :

$$AX = X + V \iff X \in \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusion : on pose $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (obtenu avec $z = 1$).

   3.b. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que (U, V, W) est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aU + bV + cW = 0_{3,1}$. On a :

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0_{3,1} &\iff \dots \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

  La famille (U, V, W) est donc libre.
- Et $\text{Card}\big((U, V, W)\big) = 3 = \dim\big(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big)$.

Important !
Il faut remarquer que la connaissance des vecteurs U, V, W n'est pas nécessaire pour cette question ! Effectue des calculs, c'est perdre du temps ici…

Conclusion : (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

3.c. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T.
D'après la question 2., U est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1, donc $AU = -U$. Ainsi :

$$f(U) = -U$$

De la même façon :

$$f(V) = V$$

Et d'après la question 3.a. :

$$f(W) = V + W$$

D'où :

$$\text{Mat}_{(U,V,W)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.d. Donner finalement une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.
Notons P la matrice obtenue en concaténant les matrices colonnes U, V, W :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- P est inversible, car (U, V, W) est une base, donc P est la matrice de passage de la base canonique vers la base (U, V, W) ;
- d'après la formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = P\text{Mat}_{(U,V,W)}(f)P^{-1}$$

  Autrement dit :

$$A = PTP^{-1}$$

Partie II. Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3

On considère l'équation différentielle suivante, notée (E), d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(E) : y''' - y'' - y' + y = 0$$

Pour toute fonction $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$.

4. Soit $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifier : $(E) \iff Y' = AY$.
   Immédiat.
5. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $x' = x + ce^t$, d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha te^t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   L'équation différentielle $x' = x + ce^t$, d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.
   - L'ensemble des solutions de l'équation $x' - x = 0$ est $\{t \longmapsto \lambda e^t, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $f : t \longmapsto \alpha te^t$. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \big(f \text{ est solution de } x' = x + ce^t\big) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t) + ce^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha e^t + \alpha te^t = \alpha te^t + ce^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha e^t = ce^t \qquad (\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0) \\ &\iff \alpha = c \end{aligned}$$

   Par conséquent, la fonction $t \longmapsto cte^t$ est solution particulière de l'équation différentielle $x' = x + ce^t$.

✓ Rigueur !
Être solution d'une équadiff c'est vérifier une égalité de fonctions. Il faut donc conserver le "$\forall t \in \mathbb{R}$" à chaque étape pour traduire le fait que l'on avait initialement une égalité de fonctions.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $x' = x + ce^t$ est $\{t \longmapsto \lambda e^t + cte^t, \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

6. En déduire les solutions de $Z' = TZ$ puis de $Y' = AY$.

Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
Z' = TZ \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & -z_1 \\ z_2' & = & z_2' + z_3 \\ z_3' & = & z_3 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ z_2'(t) & = & z_2(t) + c_3 e^t \\ z_3(t) & = & c_3 e^t \end{array} \right. \qquad \text{question précédente} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & c_1 e^{-t} \\ z_2(t) & = & c_2 e^t + c_3 t e^t \\ z_3(t) & = & c_3 e^t \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
Y' = AY \quad & \Longleftrightarrow \quad Y' = PTP^{-1}Y \\
& \Longleftrightarrow \quad P^{-1}Y' = TP^{-1}Y \\
& \Longleftrightarrow \quad Z' = TZ \qquad \text{en posant } Z = P^{-1}Y \text{, on a par linéarité de la dérivation : } Z' = P^{-1}Y' \ (P^{-1} \text{ à coefficients constants}) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Z(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} \qquad \text{point précédent} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} \qquad Y = PZ \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + (c_2 - c_3) e^t + c_3 t e^t \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_1 e^{-t} + (c_2 + c_3) e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. Donner finalement l'ensemble des solutions de (E).

Soit $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
y''' - y'' - y' + y = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad Y' = AY \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + (c_2 - c_3) e^t + c_3 t e^t \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_1 e^{-t} + (c_2 + c_3) e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + (c_2 - c_3) e^t + c_3 t e^t \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 t e^t \\ c_1 e^{-t} + (c_2 + c_3) e^t + c_3 t e^t \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ y(t) = c_1 e^{-t} + (c_2 - c_3) e^t + c_3 t e^t \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 (t-1) e^t
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ t \longmapsto c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3 (t-1) e^t, \ (c_1, c_2c, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Petite remarque

- Les expressions obtenues pour $y'(t)$ et $y''t)$ permettent de vérifier les calculs...
- l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 3... En effet, il est isomorphe à l'ev des solutions du système $Y' = AY$.
- On pourrait imaginer un exercice un peu différent, sans système différentiel, consistant à démontrer que l'ensemble des solutions de (E) est un ev de dimension 3, puis à exhiber trois fonctions linéairement indépendantes qui sont solution... C'est le cas des fonctions $t \longmapsto e^{-t}$ $t \longmapsto e^t$ et $t \longmapsto (t-1)e^t$ (ou $t \longmapsto te^t$ pour la dernière) par exemple.

Exercice 2 (Inspiré de EML 2010 E et EDHEC 2015 E)

Une agence bancaire dispose de deux guichets. Trois clients, notés C_1, C_2 et C_3, arrivent simultanément dans cette agence. Les clients C_1 et C_2 occupent les deux guichets alors que le client C_3 attend qu'un des deux guichets se libère.
On notre X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale.
On note A l'évènement "C_3 termine en dernier son opération"; ainsi, $A = \left[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\right]$.
On note également $\Delta = |X_1 - X_2|$.

1. Établir : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Distinguons deux cas :

- Si $x \leq y$. On a d'une part $x - y \leq 0$, donc :

$$\begin{aligned} |x-y| &= -(x-y) \\ &= y - x \end{aligned}$$

Et d'autre part, puisque $x \leq y$, on a $\max(x, y) = y$ et $\min(x, y) = x$, donc :

$$\max(x, y) - \min(x, y) = y - x$$

D'où :

$$|x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$$

- Si $x > y$. On procède de la même façon.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.

Petite remarque
On peut aussi dire que x et y ont des rôles symétriques donc, sans perte de généralité, on peut supposer que $x \leq y$.

2. En déduire $A = [X_3 > \Delta]$.

On a :

$$\begin{aligned} A &= \left[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\right] \\ &= \left[X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\right] \quad \text{question précédente} \\ &= [X_3 > |X_1 - X_2|] \\ &= [X_3 > \Delta] \end{aligned}$$

Conclusion : $A = [X_3 > \Delta]$.

Partie I. Modélisation discrète

On suppose dans cette partie que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

3. Rappeler la loi de X_1, son espérance ainsi que sa variance.

Conclusion : $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_1 = k]) = q^{k-1}p$
$\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$.

4. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\left([X_2 = k]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{k \geq 1} \mathbb{P}\left([\Delta = 0] \cap [X_2 = k]\right)$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\Delta = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([\Delta = 0] \cap [X_2 = k]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([|X_1 - k| = 0] \cap [X_2 = k]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X_1 = k] \cap [X_2 = k]\right) \quad X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k])\mathbb{P}([X_2 = k]) \quad X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent la même loi géométrique de paramètre } p \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{k-1}\right)^2 p^2 \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} \quad i = k-1 \\ &= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^i \\ &= p^2 \frac{1}{1 - q^2} \\ &= \frac{p^2}{(1-q)(1+q)} \quad \text{p=1-q} \\ &= \frac{p}{1+q} \end{aligned}$$

Petite remarque
On peut également présenter les choses ainsi :
- On a : $[\Delta = 0] = [X_1 = X_2]$ et, puisque $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on obtient : $[\Delta = 0] = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [X_1 = k] \cap [X_2 = k]$
- par incompatibilité des évènements de la famille $\left([X_1 = k] \cap [X_2 = k]\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a alors...

Mais ceci demande davantage d'arguments et c'est plus long. Autant utiliser la FPT ! Ce doit être un réflexe !

Conclusion : $\mathbb{P}([\Delta = 0]) = \dfrac{p}{1+q}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5.a. Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X_2 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n] \cap [X_2 = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n] \cap [X_2 = k]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = n+k] \cap [X_2 = k]\big) && X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = n+k]\big)\mathbb{P}\big([X_2 = k]\big)\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

5.b. En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

- On a :

$$\begin{aligned}[\Delta = n] &= [|X_1 - X_2| = n] \\ &= [X_1 - X_2 = n] \cup [X_1 - X_2 = -n]\end{aligned}$$

Or $n \neq 0$, donc $-n \neq n$ et ainsi, les évènements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_1 - X_2 = -n]$ sont incompatibles.
D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([\Delta = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -n]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) && X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi, donc } X_1 - X_2 \text{ et } X_2 - X_1 \text{ également} \\ &= 2\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) && \text{question précédente} \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\mathbb{P}([X_1 = n+k]) \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pq^{n+k-1}p \\ &= 2p^2q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{k-1}\right)^2 && \text{calcul fait en question 4.} \\ &= 2p^2q^n \frac{1}{1-q^2} \\ &= \frac{2pq^n}{1+q}\end{aligned}$$

Petite remarque
Ou on mentionne "par symétrie des rôles de X_1 e X_2".

6. 6.a. Démontrer que la variable aléatoire Δ admet une espérance et la calculer.

- On sait que :

Δ admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\in\Delta(\Omega)} n\mathbb{P}([\Delta = n])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([\Delta = n])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}([\Delta = n]) &= 0 + \sum_{n=1}^{N} n\frac{2pq^n}{1+q} \\ &= \frac{2pq}{1+q}\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}\end{aligned}$$

Or, $q \in]0;1[$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente.

Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}([\Delta = n])$ est convergente.

- On en déduit que Δ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}([\Delta = n]) \\
&= \frac{2pq}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} \\
&= \frac{2pq}{1+q} \frac{1}{(1-q)^2} && p = 1-q \\
&= \frac{2q}{1-q^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Δ admet une espérance et $\mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2q}{1-q^2}$.

6.b. Montrer que $X_1 - X_2$ admet un moment d'ordre 2 et établir $\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = 2\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ possède une variance et la calculer.

- On a :

$$(X_1 - X_2)^2 = X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2$$

Or X_1 et X_2 suivent des lois géométriques, donc elles admettent un moment d'ordre 2. Par conséquent, X_1^2, X_2^2 et X_1X_2 admettent une espérance. Ainsi, $X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2$ admet une espérance.

Conclusion : $X_1 - X_2$ admet un moment d'ordre 2.

- D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) &= \mathbb{E}\big(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2\big) \\
&= \mathbb{E}(X_1^2) - 2\mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_2^2) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \mathbb{E}(X_1^2) - 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2^2) && X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\
&= 2\mathbb{E}(X_1^2) - 2\mathbb{E}(X_1)^2 && X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi, donc elles ont les mêmes moments} \\
&= 2\mathbb{V}(X_1) && \text{formule de Koenig-Huygens}
\end{aligned}$$

- Remarquons que $\Delta^2 = (X_1 - X_2)^2$. Ainsi, d'après ce qui précède, Δ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance, et, d'après la formule du Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\Delta) &= \mathbb{E}(\Delta^2) - \mathbb{E}(\Delta)^2 && \text{question précédente} \\
&= \mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) - \left(\frac{2q}{1-q^2}\right)^2 && \text{point précédent} \\
&= 2\mathbb{V}(X_1) - \left(\frac{2q}{1-q^2}\right)^2 && X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\
&= \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{(1-q^2)^2} && p = 1-q \\
&= \frac{2q}{p^2} - \frac{4q^2}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2q(1+q)^2 - 4q^2}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2q(1+q^2)}{p^2(1+q)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : Δ admet une variance et $\mathbb{V}(\Delta) = \dfrac{2q(1+q^2)}{p^2(1+q)^2}$.

> **☞ Rappels...**
> - Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance. On en déduit que si X et Y ont un moment d'ordre 2, alors $X + Y$ admet un moment d'ordre 2.
> - Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
>
> Les deux arguments sont valides ici pour justifier que X_1X_2 admet une espérance.

7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([X_3 > n])$.
Déterminer alors la probabilité de l'évènement A.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $X_3(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$[X_3 > n] = \bigcup_{k=n+1} [X_3 = k]$$

Puis, par incompatibilité des évènements de la famille $\big([X_3 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3 > n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_3 = k]) && X_3 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1}p && i = k-(n+1) = k-1-n \\
&= p\sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+n} \\
&= pq^n \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= \frac{pq^n}{1-q} && q = 1-p \\
&= q^n
\end{aligned}$$

> **Important !**
> L'argument "$X_3(\Omega) = \mathbb{N}^*$" est essentiel pour pouvoir écrire l'évènement $[X_3 > n]$ comme l'union donnée. En effet, si X_3 était à valeurs dans $\{1; 1.5; 2; 2.5; 3; 3.5; \dots\}$ ce serait différent !

- On a, d'après la question **2.** :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}([X_3 > \Delta]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\Delta = n] \cap [X_3 > \Delta]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\Delta = n] \cap [X_3 > n]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = n])\mathbb{P}([X_3 > n]) \\
&= \mathbb{P}([\Delta = 0])\mathbb{P}([X_3 > n]) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = n])\mathbb{P}([X_3 > n]) \\
&= \frac{p}{1+q} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2p(q^n)^2}{1+q} \\
&= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \sum_{n=1}^{+\infty} (q^2)^n \\
&= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1+q} + \frac{2p}{1+q} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1+q} \left(1 + 2 \left(\frac{1}{1-q^2} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{p}{1+q} \left(1 + \frac{2q^2}{1-q^2} \right) \\
&= \frac{p}{1+q} \frac{1+q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{1+q^2}{(1+q)^2}
\end{aligned}
$$

formule des probabilités totales, avec $([\Delta = n])_{n \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements

X_1 et X_2 sont indépendantes de X_3, donc par lemmes des coalitions, $|X_1 - X_2|$ (ie Δ) est indépendante de X_3

question **5.b.** et point précédent

✘ Attention !
Deux expressions différentes de $\mathbb{P}([\Delta = n])$, selon que $n = 0$ ou non...

$q = 1 - p$

8. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que l'exécution de **probA(p)** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}(A)$ où l'argument p désigne le paramètre des lois géométriques étudiées.

```
import numpy.random as rd

def probA(p):
    n=0
    for k in range(10000):
        X1 = ...
        X2 = ...
        X3 = ...
        if ...
            n=n+1
    return ...
```

```
import numpy.random as rd

def probA(p):
    n=0
    for k in range(10000):
        X1=rd.geometric(p)
        X2=rd.geometric(p)
        X3=rd.geometric(p)
        if X3>abs(X1-X2):
            n=n+1
    return n/10000
```

Partie II. Modélisation continue

On suppose à présent que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et qu'elles sont indépendantes.

9. Rappeler une densité de X_1, sa fonction de répartition ainsi que son espérance et sa variance.

Conclusion : $f : x \longmapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de X_1 et $F_x \longmapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en est la fonction de répartition ;
$\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

10. On note $Z = \min(X_1, X_2)$. Démontrer que Z est une variable aléatoire à densité et reconnaître sa loi.

- Considérons $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Ainsi $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
- Notons F_Z la fonction de répartition de Z. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ◇ si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && Z(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } x < 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - ◇ si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Z > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big([X_1 > x] \cap [X_2 > x]\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x])\mathbb{P}([X_2 > x]) && X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x])^2 && X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi} \\ &= 1 - \big(1 - F_{X_1}(x)\big)^2 \\ &= 1 - \big(e^{-\lambda x}\big)^2 && X_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \text{ et } x \geq 0 \\ &= 1 - e^{-2\lambda x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(2\lambda)$.

11. On note T la variable aléatoire égale au temps total que le client C_3 passe dans l'agence.
Exprimer T en fonction de certaines des variables aléatoires précédentes puis déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

- Puisque C_3 attend que le premier des clients C_1 et C_2 termine pour passer, on a : $T = \min(X_1, X_2) + X_3$. Autrement dit :

$$T = Z + X_3$$

- Puisque Z et X_3 suivent des lois exponentielles, elles admettent une espérance ; donc T admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(Z + X_3) \\ &= \mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(X_3) && \text{linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

- Puisque Z et X_3 suivent des lois exponentielles, elles admettent une variance. Or $Z = \min(X_1, X_2)$. Et on sait que X_1 et X_2 sont indépendantes de X_3, donc par lemme des coalitions, Z et X_3 sont indépendantes. Ainsi, T est la somme de deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance ; donc T admet une variance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) &= \mathbb{V}(Z + X_3) \\ &= \mathbb{V}(Z) + \mathbb{V}(X_3) && Z \text{ et } X_3 \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{5}{4\lambda^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(T) = \dfrac{3}{2\lambda}$ et $\mathbb{V}(T) = \dfrac{5}{4\lambda^2}$.

12. **Loi de Δ.**
On pose $D = X_1 - X_2$.

12.a. Démontrer que $-X_2$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité, notée g.

- Puisque $X_2(\Omega) = \mathbb{R}^+$, on a $(-X_2)(\Omega) = \mathbb{R}^-$.
- Notons G la fonction de répartition de $-X_2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - ◇ si $x > 0$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbb{P}([-X_2 \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\Omega) && (-X_2)(\Omega) = \mathbb{R}^- \text{ et } x > 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

◇ si $x \leq 0$:

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & \mathbb{P}([-X_2 \leq x]) \\ & = & \mathbb{P}([X_2 \geq -x]) \\ & = & 1 - \mathbb{P}([X_2 < -x]) \\ & = & 1 - F(-x) \\ & = & 1 - (1 - \mathrm{e}^{\lambda x}) \\ & = & \mathrm{e}^{\lambda x} \end{array}$$

X_2 est à densité et en notant F la fonction de répartition de X_2

$-x \in \mathbb{R}^+$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$

- Examinons alors la fonction G :
  ◇ On a :

  ⇝ G est continue sur $]-\infty; 0[$, car l'exponentielle l'est ;

  ⇝ G est continue sur $]0; +\infty[$ car constante ;

  ⇝ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} G(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} G(x) = 1$, donc G est continue en 0.

  Par conséquent : G est continue sur $\mathbb{R}$.

  ◇ Par des arguments similaires à la continuité, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Ainsi, $(-X_2)$ est une variable aléatoire à densité et, en dérivant sur les intervalles ouverts, on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[,\ g(x) = G'(x) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \quad ; \quad \forall x \in]0; +\infty[,\ g(x) = G'(x) = 0$$

et on pose :

$$g(0) = \lambda$$

Conclusion : la variable aléatoire $-X_2$ est à densité et admet pour densité la fonction $g : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$.

12.b. **On admet le résultat suivant :**
Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X ou f_Y est bornée.
Alors la variable aléatoire $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

Démontrer alors que la variable aléatoire D est à densité et qu'elle admet pour densité la fonction $f_D : x \longmapsto \dfrac{\lambda}{2} \mathrm{e}^{-\lambda |x|}$.

On a $D = X_1 + (-X_2)$. Or :

- X_1 et $-X_2$ sont à densité,
- X_1 et $-X_2$ sont indépendantes (lemme des coalitions, car X_1 et X_2 le sont),
- la densité f donnée pour X_1 est bornée sur $\mathbb{R}$ (nulle sur $]-\infty; 0[$, et décroissante majorée par λ sur $[0; +\infty[$).

D'après le résultat donné, la variable aléatoire D est donc à densité et une de ses densités, notée f_D, est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f_D(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt \\ & = & \lambda \displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t} g(x - t) dt \end{array}$$

f est nulle sur $]-\infty; 0[$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \\ g(x - t) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \\ x - t \geq 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq t \\ t \leq x \end{array} \right.$$

Distinguons alors deux cas :

- si $x \leq 0$:
Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x - t \leq 0$ et donc : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(x-t) = \lambda e^{\lambda(x-t)}$. D'où :

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\ &= \lambda e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt && \text{on reconnaît l'intégrale d'une densité d'une VA suivant la loi } \mathscr{E}(2\lambda)\text{...} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} \end{aligned}$$

- si $x > 0$:
Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x - t \leq 0 \iff x \leq t$ et donc :

$$\forall t \in [0; x[,\ g(x-t) = 0 \quad ; \quad \forall t \geq x,\ g(x-t) = \lambda e^{\lambda(x-t)}$$

D'où, d'après la relation de Chasles (avec $x > 0$) :

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \lambda \int_0^{x} e^{-\lambda t} g(x-t) dt + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} g(x-t) dt && \text{explication ci-dessus} \\ &= \lambda \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{\lambda(x-t)} dt \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} 2\lambda e^{-2\lambda t} dt && \text{on reconnaît } 1 - F_Z(x)\text{...} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} e^{-2\lambda x} \\ &= \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

☞ Rappel...
La relation de Chasles sur les intégrales est valable même si la borne de coupe n'est pas dans l'intervalle initial... En mentionnant $x > 0$, on invite à se dire que les bornes des intégrales à suivre seront dans l'ordre croissant.

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_D(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Conclusion : D est à densité et elle admet pour densité la fonction $f_D : x \longmapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$.

12.c. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire D.
Notons F_D la fonction de répartition de D. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_D(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_D(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |t|} && x < 0, \text{ donc} : \forall t \in]-\infty; x],\ t \leq 0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda t} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{\lambda t} \right]_{t \to -\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{2} e^{\lambda x} \end{aligned}$$

✍ Rédaction
A ce stade de l'exercice, on peut se permettre cette rédaction, qui est bien licite, puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda t} dt$ est convergente !

- si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_D(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_D(t) dt && \text{relation de Chasles } (x \geq 0) \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_D(t) dt + \int_0^x f_D(t) dt && f_D \text{ est paire et } \int_{-\infty}^{+\infty} f_D = 1, \text{ donc } \int_{-\infty}^{0} f_D = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x f_D(t) dt && x \geq 0, \text{ donc } \forall t \in [0; x],\ t \geq 0 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-e^{\lambda t} \right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Vérification
Puisque D est à densité, F_D doit être continue sur $\mathbb{R}$. On vérifie également les limites et les variations.

12.d. En déduire que la variable aléatoire Δ est à densité et reconnaître sa loi.

- On a déjà $\Delta(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.

- Notons F_Δ la fonction de répartition de Δ. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - si $x < 0$:

$$\begin{aligned} F_\Delta(x) &= \mathbb{P}([\Delta \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) & \Delta(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } x < 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  - si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_\Delta(x) &= \mathbb{P}([\Delta \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(|X_1 - X_2| \leq x) \\ &= \mathbb{P}([-x \leq X_1 - X_2 \leq x]) & x \geq 0 \\ &= \mathbb{P}([-x \leq D \leq x]) \\ &= F_D(x) - F_D(-x) & D \text{ est à densité} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_\Delta(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Or la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : $\Delta \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

12.e. Déduire des questions précédentes la probabilité de l'évènement A.

D'après la question 2. :

$$A = [X_3 - \Delta > 0]$$

Or :

- $X_3 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$,
- $\Delta \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ d'après la question précédente,
- par lemme des coalitions, X_3 et Δ sont indépendantes.

On se retrouve donc dans le même contexte qu'à la question 12.. Par conséquent, $X_3 - \Delta$ a la même loi que D.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_3 - \Delta > 0]) &= \mathbb{P}([D > 0]) & f_D \text{ est paire...} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 (Ecricome 2016 E)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_n(x) = \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2}$$

1.a. Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

- La fonction $x \longmapsto (1+x)^2$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$, donc la fonction g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

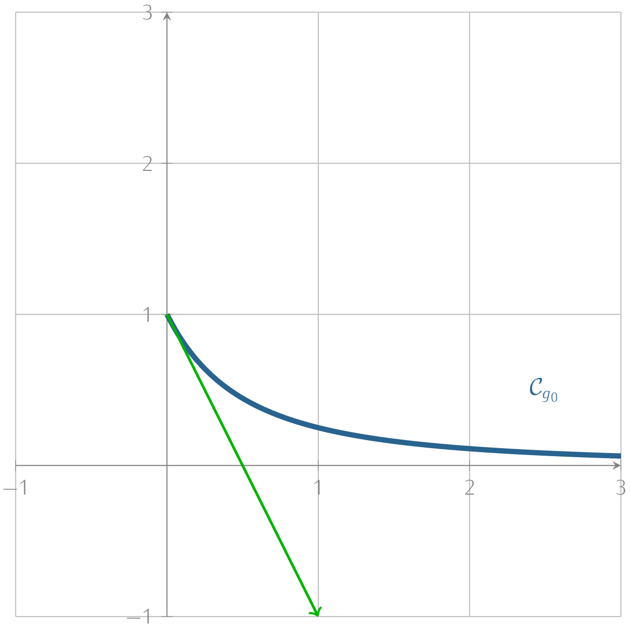
$$g_0'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_0'(x) < 0$$

La fonction g_0 est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

- Par opération : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_0(x) = 0$.
- La tangente à la courbe de g_0 en 0 admet pour équation réduite : $y = -2x + 1$.
- D'où :



1.b. Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.
Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{n\frac{1}{1+x}\big(\ln(1+x)\big)^{n-1}(1+x)^2 - 2(1+x)\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^4} \\ &= \frac{n\frac{1}{1+x}\big(\ln(1+x)\big)^{n-1}(1+x) - 2\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^3} \\ &= \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n-1}\big(n - 2\ln(1+x)\big)}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

◇ Si $x > 0$:

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geq 0 &\iff \frac{\big(\ln(1+x)\big)^{n-1}\big(n - 2\ln(1+x)\big)}{(1+x)^3} && (1+x)^3 > 0 \\ &\iff \big(\ln(1+x)\big)^{n-1}\big(n - 2\ln(1+x)\big) \geq 0 && \ln(1+x)^{n-1} > 0, \text{ car } x > 0 \\ &\iff n \geq 2\ln(1+x) \end{aligned}$$

♣ Méthode !
On écrit $g_0(x) = (1+x)^{-2}$ pour dériver rapidement g_0...

Petite remarque
Il y a fort à parier que le barème initial ne comptait pas cette disjonction de cas, et même que le concepteur ne s'attendait pas à devoir le faire... L'idée était de fournir un résultat intermédiaire au candidat dans l'hypothèse où celui-ci s'est trompé sur le calcul de $g_n'(x)$.

◇ si $x = 0$:
L'équivalence est trivialement vraie.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_n'(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Poursuivons :

$$\begin{aligned} g_n'(x) \geq 0 &\iff n \geq 2\ln(1+x) \\ &\iff x \leq e^{\frac{n}{2}} - 1 \end{aligned}$$ stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$

Or $\frac{n}{2} > 0$, donc $e^{\frac{n}{2}} - 1 > 0$. D'où le tableau de variations de g_n sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		$e^{\frac{n}{2}} - 1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$\cdots$	$\searrow$	0

Important !
L'énoncé fournit l'information "$g_n'(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$" pour permettre aux candidats de faire la suite. **Ne pas traiter la suite de la question démontre un manque de volonté d'avoir des points !**

- On a :
  ◇ $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty$
  ◇ par croissance comparée ($n \geq 1$), $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\left(\ln(X)\right)^n}{X^2} = 0$

D'où par composition de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = 0$$

Petite remarque
Si $n = 0$, ce n'est pas une CC...

1.c. Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, g_n admet un maximum sur $\mathbb{R}^+$, atteint en $e^{\frac{n}{2}} - 1$, et égal à :

$$\begin{aligned} g_n(e^{\frac{n}{2}} - 1) &= \frac{\left(\ln(e^{\frac{n}{2}})\right)^n}{(e^{\frac{n}{2}})^2} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n} \\ &= \left(\frac{n}{2e}\right)^n \end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\frac{n}{2e} > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = \exp\left(n \ln\left(\frac{n}{2e}\right)\right)$$

Or, par produit :

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(\frac{n}{2e}\right) = +\infty$$

D'où, par composition, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = +\infty$$

Important !
Pour une question aussi simple, on attend bien évidemment l'écriture sous la forme exp / ln. Sinon, aucun point !

1.d. Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour x suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = x^{\frac{3}{2}} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^n}{(1+x)^2}$$

Or :

$$(1+x)^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$$

D'où :

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^n}{(1+x)^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^n}{\sqrt{x}}$$

Mais $\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x+1}$... D'où :

$$\frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^n}{\sqrt{1+x}}$$

Puis, par croissance comparée et composition, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{\sqrt{1+x}} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 0$$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$: $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.

> **✘ Attention !**
> Pour utiliser la CC, il nous faut $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)^a}{X^b}$, avec $a, b > 0$.
> D'où la manipulation pour avoir $X = 1+x$...

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$.

2.a. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.

- La fonction g_0 est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$.
- Soit $B \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^B g_0(t)dt &= \int_0^B \frac{1}{(1+t)^2}dt \\ &= \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^B \\ &= 1 - \frac{1}{1+B}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{B\to+\infty} 1 - \frac{1}{1+B} = 1$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_0(t)dt$ est convergente et vaut 1.

> **♣ Méthode !**
> Il est bien évident que si l'on sait primitiver l'intégrande (c'est le cas ici...) on ne met pas en place un critère pour établir la convergence : **c'est une perte de temps et donc une perte de points !**

2.b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$ d'après la question **1.d.**,
- $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_n(x) \geq 0\ ;\ \ \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \geq 0$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente, car d'exposant $\frac{3}{2} > 1$.

Ainsi, par critère de négligeabilité sur les intégrales à intégrande positive, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)dt$ est convergente.

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt$ n'est pas impropre, elle est donc également convergente.

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ est convergente.

> **☞ Rappel...**
> On travaille bien sur $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ ici, car toutes les intégrales de Riemman de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ sont divergentes...

2.c. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \big(\ln(1+t)\big)^{n+1} \frac{1}{(1+t)^2}$$

Procédons par intégration par parties (IPP), mais pas sur les intégrales impropres !

Soit $B \in \mathbb{R}^+$. Posons : $\left|\begin{array}{l} u : t \longmapsto \big(\ln(1+t)\big)^{n+1} \\ v : t \longmapsto \frac{-1}{1+t}\end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; B]$

et pour tout $t \in$: $\left|\ u'(t) = (n+1)\frac{1}{1+t}\big(\ln(1+t)^n\big)\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}\right.$.

Par IPP, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^B \big(\ln(1+t)\big)^{n+1}\frac{1}{(1+t)^2} &= \left[\frac{-\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}}{1+t}\right]_0^B - \int_0^B \frac{-1}{1+t}(n+1)\frac{1}{1+t}\big(\ln(1+t)^n\big)dt \\ &= \frac{-\big(\ln(1+B)\big)^{n+1}}{1+B} + (n+1)\int_0^B \frac{\big(\ln(1+t)^n\big)}{(1+t)^2}dt \\ &= \frac{-\big(\ln(1+B)\big)^{n+1}}{1+B} + (n+1)\int_0^B g_n(t)dt\end{aligned}$$

> **➠ Réflexe !**
> • une suite d'intégrale,
> • une relation de récurrence à établir...
> Très probable que ce soit une IPP !
> **Ce n'est bien évidemment pas par récurrence, car dans l'hérédité d'une récurrence, on doit utiliser une relation de récurrence ; et l'objectif de la question est d'en établir une...**

Or :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n+1}(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ sont convergentes,
- par croissance comparée et composition : $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{-\big(\ln(1+B)\big)^{n+1}}{1+B} = 0$.

Le passage à la limite quand $B \to +\infty$ est donc licite et on obtient :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$.

2.d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  D'après la question 2.a., $I_0 = 1$. Or $0! = 1$. D'où : $I_0 = 0!$, l'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $I_n = n!$ et montrons $I_{n+1} = (n+1)!$.
  On a, d'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & (n+1)I_n \\ & = & (n+1)n! \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ & = & (n+1)! \end{array}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$.

Pardon ?!
Là encore, ne pas traiter cette question démontre un manque de volonté d'avoir des points ! C'est scandaleux...

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - Si $x < 0$: $f_n(x) = 0 \geq 0$.
  - Si $x \geq 0$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}g_n(x) \geq 0$, car, d'après l'étude faite en question 1., g_n est positive sur $\mathbb{R}^+$.

  D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) \geq 0$.
- Ensuite :
  - f_n est continue sur $]-\infty; 0[$ car constante ;
  - f_n est continue sur $]0; +\infty[$, car g_n l'est.

  et
  Donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
- Pour finir :
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt$ converge et vaut 0.
  - d'après la question 2.d., $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut $n!$; donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge et vaut 1.

  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

3.b. La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

- On sait que :

X_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)dt$ est absolument convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_n(t)dt$ est convergente, car f_n est nulle sur $]-\infty; 0[$ et l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}^+$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{t\big(\ln(1+t)\big)^n}{(1+t)^2}dt$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\big(\ln(1+t)\big)^n}{(1+t)^2}dt$ est convergente, car $\dfrac{1}{n!} \neq 0$

- Or $(1+t)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$, donc :

$$\frac{t\big(\ln(1+t)\big)^n}{(1+t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\big(\ln(1+t)\big)^n}{t}$$

Et, on a :

$$\forall t \geq \mathrm{e}-1,\ \ln(1+t) \geq 1$$

D'où, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall t \geq \mathrm{e}-1,\ \big(\ln(1+t)\big)^n \geq 1$$

Et ainsi (on divise par un réel strictement positif) :

$$\forall \geq \mathrm{e}-1,\ \frac{\big(\ln(1+t)\big)^n}{t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$$

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{e-1}^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann divergente car d'exposant 1.

Ainsi, par critère de comparaison sur les intégrales à intégrande positive, l'intégrale $\displaystyle\int_{e-1}^{+\infty} \frac{\big(\ln(1+t)\big)^n}{t}dt$ est divergente.

D'où, par critère d'équivalence sur les intégrales à intégrande positive (c'est bien le cas), l'intégrale $\displaystyle\int_{e-1}^{+\infty} \frac{t\big(\ln(1+t)\big)^n}{(1+t)^2}dt$ est divergente.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t\big(\ln(1+t)\big)^n}{(1+t)^2}dt$ est également divergente.

Petite remarque

Vue la formulation de la question et l'expression obtenue, l'intégrale sera divergente. Il ne reste qu'à le prouver. Un critère de comparaison fonction très bien ici... C'est l'analogue de la méthode employée pour établir la divergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$...

Conclusion : X_n n'admet pas d'espérance.

3.c. Que vaut $F_n(x)$ pour $x<0$ et $n \in \mathbb{N}$?

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x<0$. On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt \qquad f_n \text{ nulle sur }]-\infty;x], \text{ car } x<0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x<0,\ F_n(x)=0$.

Petite remarque

On peut aussi considérer, vue la densité f_n, que $X_n(\Omega)=\mathbb{R}^+$ et utiliser cet argument.

3.d. Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \mathbb{P}([X_0 \leq x]) \qquad X_0 \text{ est à densité de densité } f_0 \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt \qquad f_0 \text{ nulle sur }]-\infty;0[\text{ et } x\geq 0 \\ &= \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt \\ &= \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x \\ &= 1-\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \geq 0,\ F_0(x) = 1-\dfrac{1}{1+x}$.

3.e. Soient $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x)-F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

On a :

$$\begin{aligned} F_k(x)-F_{k-1}(x) &= \mathbb{P}([X_k \leq x]) - \mathbb{P}([X_{k-1} \leq x]) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_k(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f_{k-1}(t)dt \qquad f_k \text{ et } f_{k-1} \text{ sont nulles sur }]-\infty;0[\\ &= \int_0^x \frac{1}{k!}g_k(t)dt - \int_0^x \frac{1}{(k-1)!}g_{k-1}(t)dt \\ &= \frac{1}{k!}\left(\int_0^x g_k(t)dt - k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) \end{aligned}$$

Or, d'après l'intégration par parties faite en question **2.c.**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall B \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^B g_{n+1}(t)dt = -\frac{\big(\ln(1+B)\big)^{n+1}}{1+B} + (n+1)\int_0^B g_n(t)dt$$

D'où, avec $B = x$ et $n = k+1$, licite car $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$, donc $k+1 \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^x g_k(t)dt = -\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{1+x} + k\int_0^x g_{k-1}(t)dt$$

Et ainsi :

$$\frac{1}{k!}\left(\int_0^x g_k(t)dt - k\int_0^x g_{k-1}(t)dt\right) = \frac{1}{k!} \times \frac{-\big(\ln(1+B)\big)^k}{1+x}$$

Conclusion : $F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.

3.f. En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

Soient $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On sait, d'après la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

D'où, en sommant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F_{k-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

Or :

- par télescopage :
$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F_{k-1}(x) = F_n(x) - F_0(x)$$
- $$\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x} = \frac{-1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$$

D'où :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_0(x) - \frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x}\sum_{k=1}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} \end{aligned}$$

question **3.d.**

Conclusion : $\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$.

3.g. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

- si $x < 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = 0$.
  Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$
- si $x \geq 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$.

  Or $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente, donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\big(\ln(1+x)\big)^k}{k!} = \exp\big(\ln(1+x)\big) = 1+x$$
  Ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$$

Pour info...
La suite (X_n) ne converge donc pas en loi... En effet, si elle convergeait en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X, alors on aurait : pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F_X(x)$... Or on trouve une limite qui vaut toujours 0, et qui ne peut donc pas définir une fonction de répartition !

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1+X_n)$.

4.a. Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

Puisque X_n est à valeurs positives, $1+X_n$ est à valeurs strictement positives et donc Y_n est bien définie. Ensuite, en posant $h : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a :

$$\begin{array}{rcll} Y_n(\Omega) & = & h(X_n)(\Omega) & \\ & = & h\big(X_n(\Omega)\big) & \\ & = & h(\mathbb{R}^+) & \\ & = & [h(0); \lim\limits_{+\infty} h[& h \text{ est continue et croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ & = & \mathbb{R}^+ & \end{array}$$

★Subtile...★
La continuité de h garantit que, puisque $\mathbb{R}^+$ est un intervalle, $h(\mathbb{R}^+)$ est encore un intervalle ("l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle" : version plus théorique du TVI).
La monotonie permet de déterminer les bornes...

Conclusion : $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}^+$.

4.b. Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

- La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) = \mathbb{R}^+$), donc d'après le théorème de transfert :

Y_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t) f_n(t)dt$ est absolument convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}}{(1+t)^2}dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}^+$

- Or, d'après la question **2.b.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}}{(1+t)^2}dt$ est convergente.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}}{(1+t)^2}dt$ est également convergente.
- On en déduit que Y_n admet une espérance et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y_n) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+1}}{(1+t)^2}dt & \\ & = & \dfrac{1}{n!} I_{n+1} & \text{question } \mathbf{2.d.} \\ & = & n+1 & \end{array}$$

Conclusion : Y_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Y_n) = n+1$.

4.c. Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

- La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)^2$ est continue sur $X(\Omega)$ ($X(\Omega) = \mathbb{R}^+$), donc d'après le théorème de transfert :

Y_n admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t)^2 f_n(t)dt$ est absolument convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+2}}{(1+t)^2}dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}^+$

- Or, d'après la question **2.b.**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+2}}{(1+t)^2}dt$ est convergente.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+2}}{(1+t)^2}dt$ est également convergente.
- On en déduit que Y_n admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(Y_n^2) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\big(\ln(1+t)\big)^{n+2}}{(1+t)^2}dt & \\ & = & \dfrac{1}{n!} I_{n+2} & \text{question } \mathbf{2.d.} \\ & = & (n+1)(n+2) & \end{array}$$

- Par conséquent, Y_n admet une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(Y_n) & = & \mathbb{E}(Y_n^2) - \big(\mathbb{E}(Y_n)\big)^2 \\ & = & (n+1)(n+2) - (n+1)^2 \\ & = & n+1 \end{array}$$

Conclusion : Y_n admet une variance et $\mathbb{V}(Y_n) = n+1$.

4.d. On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(e^x - 1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1+X_n) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X_n \leq e^x - 1]) \quad \text{stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= F_n(e^x - 1) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(e^x - 1)$.

4.e. Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

- La fonction $x \longmapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction F_n est également continue sur $\mathbb{R}$, car fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  Par composition, H_n est donc continue sur $\mathbb{R}$.
- ◇ sur $]-\infty;0[$: $x \longmapsto e^x - 1$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et à valeurs dans $]-\infty;0[$; et la fonction F_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$.
  Par composition, H_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$.
  ◇ sur $]0;+\infty[$: $x \longmapsto e^x - 1$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et à valeurs dans $]0;+\infty[$; et la fonction F_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
  Par composition, H_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

  H_n est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Y_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout $x \in]-\infty;0[$:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= H_n'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= H_n'(x) \\ &= e^x F_n'(e^x - 1) \\ &= e^x f_n(e^x - 1) \quad e^x - 1 \geq 0 \\ &= e^x \frac{1}{n!} \frac{\left(\ln(1 + e^x - 1)\right)^n}{(1 + e^x - 1)^2} \\ &= \frac{x^n}{n!} e^{-x} \end{aligned}$$

- $h_n(0) = 0$

Conclusion : Y_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction

$$h_n : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^n}{n!} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4.f. Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, on remarque que $Y_0 \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
Soit ensuite $k \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)^k$ est continue sur $X_0(\Omega)$ ($X_0(\Omega) = \mathbb{R}^+$), donc d'après le théorème de transfert :

Y_0 admet un moment d'ordre k si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t)^k f_0(t)dt$ est absolument convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+t)^k g_0(t)dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}^+$
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(1+t)\right)^k}{(1+t)^2}dt$ est convergente

- Or, d'après ce qui a été fait en question 2., l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(1+t)\right)^k}{(1+t)^2}dt$ est convergente.
- On en déduit que Y_0 admet un moment d'ordre k et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\ln(1+t)\right)^k}{(1+t)^2}dt \quad \text{question 2.d.} \\ &= k! \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_0 admet un moment d'ordre k et $\mathbb{E}(Y_0^k) = k!$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★