Devoir surveillé 5

Samedi 16 décembre 2023 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Une des clés du succès est la confiance en soi. Une des clés de la confiance en soi est la préparation."
Arthur Ashe

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

Partie I. Réduction de la matrice A

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.
2. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.
3. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - 3.a. Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1.
   - 3.b. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - 3.c. Déterminer la matrice de f dans cette base, notée T.
   - 3.d. Donner finalement une matrice P inversible telle que $A = PTP^{-1}$.

Partie II. Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3

On considère l'équation différentielle suivante, notée (E), d'inconnue $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(E) : y''' - y'' - y' + y = 0$$

Pour toute fonction $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$.

4. Soit $y \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifier : $(E) \iff Y' = AY$.
5. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $x' = x + ce^t$, d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha t e^t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. En déduire les solutions de $Z' = TZ$ puis de $Y' = AY$.
7. Donner finalement l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 2

Une agence bancaire dispose de deux guichets. Trois clients, notés C_1, C_2 et C_3, arrivent simultanément dans cette agence. Les clients C_1 et C_2 occupent les deux guichets alors que le client C_3 attend qu'un des deux guichets se libère.
On notre X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale.
On note A l'évènement "C_3 termine en dernier son opération"; ainsi, $A = \left[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)\right]$.
On note également $\Delta = |X_1 - X_2|$.

1. Établir : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| = \max(x, y) - \min(x, y)$.
2. En déduire $A = [X_3 > \Delta]$.

Partie I. Modélisation discrète

On suppose dans cette partie que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes.
On note $q = 1 - p$.

3. Rappeler la loi de X_1, son espérance ainsi que sa variance.
4. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - 5.a. Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\mathbb{P}([X_1 = n + k])$.
   - 5.b. En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.
6.
   - 6.a. Démontrer que la variable aléatoire Δ admet une espérance et la calculer.
   - 6.b. Montrer que $X_1 - X_2$ admet un moment d'ordre 2 et établir $\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = 2\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ possède une variance et la calculer.
7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([X_3 > n])$.
   Déterminer alors la probabilité de l'évènement A.
8. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** ci-dessous de sorte que l'exécution de `probA(p)` renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}(A)$ où l'argument p désigne le paramètre des lois géométriques étudiées.

```python
import numpy.random as rd

def probA(p):
    n=0
    for k in range(10000):
        X1 = ...
        X2 = ...
        X3 = ...
        if ...
            n=n+1
    return ...
```

Partie II. Modélisation continue

On suppose à présent que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et qu'elles sont indépendantes.

9. Rappeler une densité de X_1, sa fonction de répartition ainsi que son espérance et sa variance.
10. On note $Z = \min(X_1, X_2)$. Démontrer que Z est une variable aléatoire à densité et reconnaître sa loi.
11. On note T la variable aléatoire égale au temps total que le client C_3 passe dans l'agence.
    Exprimer T en fonction de certaines des variables aléatoires précédentes puis déterminer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.
12. **Loi de Δ.**
    On pose $D = X_1 - X_2$.
    - 12.a. Démontrer que $-X_2$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité, notée g.
    - 12.b. **On admet le résultat suivant :**
      Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X ou f_Y est bornée.
      Alors la variable aléatoire $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
      $$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt$$
      Démontrer alors que la variable aléatoire D est à densité et qu'elle admet pour densité la fonction $f_D : x \longmapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.
    - 12.c. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire D.
    - 12.d. En déduire que la variable aléatoire Δ est à densité et reconnaître sa loi.
    - 12.e. Déduire des questions précédentes la probabilité de l'évènement A.

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ g_n(x) = \frac{\big(\ln(1+x)\big)^n}{(1+x)^2}$$
   - 1.a. Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
     Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.
   - 1.b. Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :
     $$\forall x \in [0, +\infty[, \ g_n'(x) \geq 0 \iff n \geq 2\ln(1+x)$$
     En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.
     Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
   - 1.c. Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :
     $$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
     et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} M_n$.
   - 1.d. Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:
     $$g_n(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$.
   - 2.a. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
   - 2.b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.

2.c. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

2.d. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!} g_n(x) & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right.$$

3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité. On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

3.b. La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

3.c. Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

3.d. Calculer $F_0(x)$ pour $x \geq 0$.

3.e. Soient $x \geq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

3.f. En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

3.g. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

4.a. Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

4.b. Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

4.c. Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

4.d. On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(\mathrm{e}^x - 1)$$

4.e. Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

4.f. Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★