Devoir surveillé 6

Samedi 10 février 2024 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Vous n'avez pas besoin d'être constamment le meilleur, vous avez simplement à l'être au bon moment."
Olivier Lockert

Exercice 1

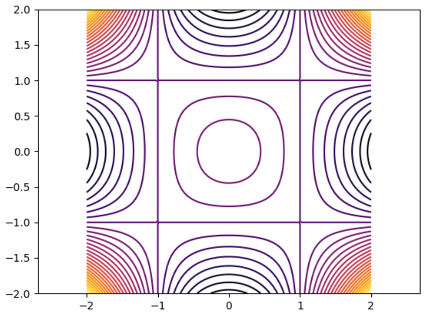
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f possède trois points critiques : $(0;0)$, $(1,-1)$ et $(1,-1)$.
3. **3.a.** Écrire la hessienne de f en chaque point critique.

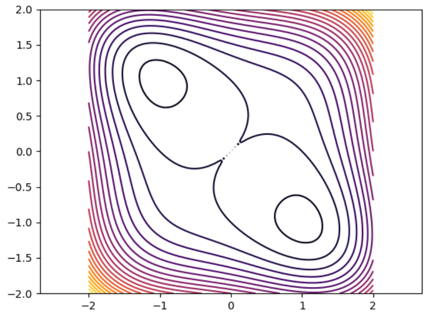
   3.b. Montrer que f possède un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum. Quelle information les valeurs propres de la hessienne en le troisième point critique nous permettent elles d'obtenir ?

   3.c. Etudier les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ lorsque x est au voisinage de 0. Conclure quant à la nature du troisième point critique de f.
4. **4.a.** Compléter l'égalité suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) + 2 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + \ldots$.

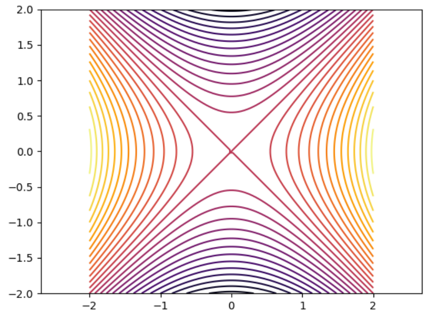
   4.b. Que peut-on conclure quant au minimum de f ?
5. Parmi les trois graphiques ci-dessous, lequel représente des lignes de niveaux de f sur $[-2;2] \times [-2;2]$? Justifier la réponse.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ la base canonique de E.
On définit l'application f sur E qui à toute fonction polynomiale $P \in E$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = -3xP(x) + x^2 P'(x)$$

1. **1.a.** Montrer que f est une application linéaire.

   1.b. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.
   Expliciter, pour tout réel x, $f(P)(x)$ et en déduire que f est un endomorphisme de E.

   1.c. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.

   1.d. La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

   1.e. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
   Soient u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

   2.a. Calculer $g \circ (\mathrm{id}_E - u)$. Qu'en déduire sur g ?

   2.b. Soit $P \in E$ tel que $P \notin \ker(u^3)$. Montrer que la famille $\mathscr{B}' = \big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

   2.c. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans l'urne. Si cette boule tirée porte le numéro k, on place alors dans une seconde urne toutes les boules suivantes : une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2, et plus généralement pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, j boules numérotées j, jusqu'à k boules numérotées k. Les boules de cette deuxième urne sont aussi indiscernables au toucher. On effectue alors un tirage au hasard d'une boule dans cette seconde urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la deuxième boule tirée.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   3.a. On suppose l'événement $[X = k]$ réalisé. Déterminer, en fonction de k, le nombre total de boules présentes dans la seconde urne.

3.b. Pour tout entier j de $[\![1,n]\!]$, exprimer $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y=j])$ en fonction de k et j. *On distinguera les cas $j \leq k$ ou $j \geq k+1$.*

4. 4.a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

4.b. En déduire que, pour tout élément j de $Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([Y=j]) = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

5. Justifier que Y admet une espérance et démontrer : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.

6. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

7. 7.a. Démontrer : $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

7.b. En déduire : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{n^2-1}{18}$.

8. 8.a. Écrire une fonction en langage **Python**, nommée **seconde_urne**, prenant en entrée un entier naturel **k** non nul, et renvoyant une liste contenant 1 élément valant 1, 2 éléments valant 2, . . ., j éléments valant j, . . ., jusqu'à k éléments valant k.
Par exemple, l'appel de **seconde_urne(4)** renverra **[1,2,2,3,3,3,4,4,4,4]**.

8.b. Recopier et compléter les lignes manquantes de la fonction en langage **Python** suivante pour qu'elle prenne en entrée un entier naturel **n** non nul, et qu'elle renvoie une réalisation du couple de variables aléatoires (X,Y).

```python
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X=...
    urne2=seconde_urne(...)
    nb=len(urne2)
    i=rd.randint(0,nb)
    Y=...
    return X,Y
```

8.c. On considère la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier naturel **n** non nul.

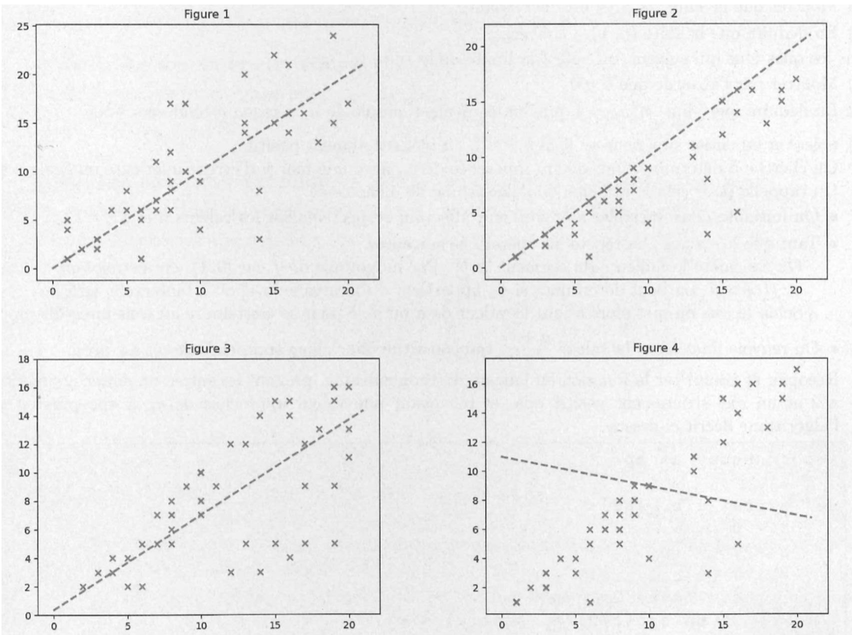
```python
def fonction(n):
    liste =[0]*n
    for i in range(10000):
        j=simu_XY(n)[1]
        liste[j-1]=liste[j-1]+1/10000
    return liste
```

Quelles valeurs les éléments de la liste renvoyée permettent-ils d'estimer ?

9. Dans toute cette question, on suppose $n = 20$. On simule 50 réalisations du couple de variables aléatoires (X,Y) à l'aide de la fonction **simul_XY** définie à la question 8.b. On représente alors les valeurs obtenues sous forme d'un nuage de points, où les valeurs des réalisations de X sont représentées en abscisse et les valeurs des réalisations de Y en ordonnée. On trace également, sur la même figure, la droite de régression linéaire associée à ce nuage de points.

9.a. Déterminer par un calcul une valeur approchée des coordonnées du point moyen du nuage de points. Quel théorème de probabilités permet de justifier cette approximation ?

9.b. Parmi les figures représentées ci-dessous, en justifiant soigneusement votre réponse, indiquer celle qui correspond au nuage de points et à la droite de régression linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés étudiés.



Exercice 4

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. **1.a.** Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ peut être considérée comme une densité de probabilité. *Dans la suite, on considère W une variable aléatoire définie sur cet espace, admettant f comme densité de probabilité. On dit que W suit la loi de Gumbel. On notera F_W sa fonction de répartition.*

   1.b. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

   1.c. Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1 telle que $V(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$, dont la fonction de répartition est notée F_V. On pose $T = -\ln(V)$ et on admet que T est une variable aléatoire.
   Démontrer que T et W ont la même loi.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathscr{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. On admet que Y_n est une variable aléatoire.

2. **2.a.** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   2.b. En déduire que Y_n est à densité et en donner une densité f_{Y_n}.

3. **3.a.** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,dt$ est convergente.

   3.b. Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,dt = x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\,dt$$

   3.c. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\big(1 - F_{Y_n}(x)\big) = 0$.

   3.d. En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,dt$$

4. **4.a.** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\,du$$

   4.b. En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F_{Y_n}(t)\big)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   5.a. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

   5.b. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel, noté γ.

   5.c. Démontrer finalement : $\mathbb{E}(Y_n) = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

6. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

   6.a. Écrire une fonction **Python** de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'exécution de **simulZ(n)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z_n.

   6.b. Voici deux scripts :

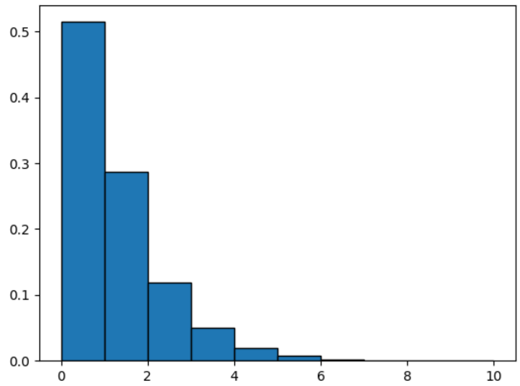
```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

V=[rd.exponential(1) for k in range(10000)]
W=-np.log(V)
x=[k for k in range(0,11)]
plt.hist(W,x,density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

Script (1)

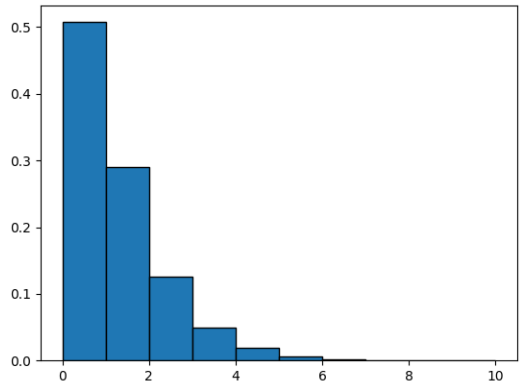
```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=int(input('n=?'))
L=[simulZ(n) for k in range(10000)]
x=[k for k in range(0,11)]
plt.hist(L,x,density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

Script (2)

Le script (1) renvoie l'histogramme (1) et le script (2) renvoie l'histogramme (2) après avoir pris $n = 100$.



Histogramme (1)



Histogramme (2)

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

7. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

7.a. Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

7.b. Déterminer explicitement, pour tout réel x, $F_{Z_n}(x)$.

7.c. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

7.d. Démontrer le résultat conjecturé à la question 5.b.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★