Devoir surveillé 6

Samedi 10 février 2024 - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Vous n'avez pas besoin d'être constamment le meilleur, vous avez simplement à l'être au bon moment."
Olivier Lockert

Exercice 1

Ce problème comporte trois parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelée modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique. Dans la troisième partie, on établit la formule de Black et Scholes, pour le prix d'une option dans le modèle limite obtenu dans la partie II.

Notations et définitions

- Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, on note φ_{m,σ^2} la densité continue de la loi normale de paramètres (m, σ^2) et Φ_{m,σ^2} sa fonction de répartition. En particulier : $\Phi = \Phi_{0,1}$.
- On note respectivement $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.
- Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I – Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a et b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $aU + b$ suit aussi une loi normale.
   Quels en sont les paramètres ?
2. *Cas où $m = 0$.*
   On suppose dans cette question 2 que $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.
   - 2.a. *Densité.*
     Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ .
     En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par :
     $$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\big(\ln(x)\big)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$
     est une densité de probabilité de X.
   - 2.b. *Espérance.*
     - 2.b.i. Établir l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy$.
     - 2.b.ii. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbb{E}(X)$ en fonction de σ.
   - 2.c. *Variance.*
     - 2.c.i. Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.
     - 2.c.ii. En déduire que X admet une variance et : $\mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.
3. On reprend le cas général : $X \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.
   - 3.a. Soit μ un réel strictement positif.
     Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $\left(m + \ln(\mu), \sigma^2\right)$.
   - 3.b. Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$, de $\mathbb{V}(X)$, et établir :
     $$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \mathrm{e}^{2m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$$

Partie II – Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif. On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\dfrac{kt}{n}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)$$

où :

- μ est une constante réelle strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;

- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$ (autrement dit : $\mathbb{P}([Y_k=1]) = \mathbb{P}([Y_k=-1]) = \dfrac{1}{2}$).
- On suppose que n est assez grand pour que $1+\dfrac{\mu}{n}-\dfrac{v}{\sqrt{n}}>0$.

On admet que $S_{0,n}, \dots, S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$, qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n.*
   - 4.a. Écrire une fonction nommée **simulY()** permettant de simuler, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, une réalisation de la variable aléatoire Y_k.
   - 4.b. Dans la déclaration de fonction qui suit, remplacer les "...", par des expressions en **Python** pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```python
def simulC(n,mu,v):
    C=1
    for k in ... :
        C=...
    return C
```

5. 5.a. Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.
   - 5.b. 5.b.i. Montrer l'égalité : $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\,Y_k\right)$.
     - 5.b.ii. En déduire : $\mathbb{E}(C_n) = \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^n$ et $\mathbb{V}(C_n) = \left(\left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^2+\dfrac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\dfrac{\mu}{n}\right)^{2n}$.
   - 5.c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(C_n)$ et montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{V}(C_n) = e^{2\mu}\left(e^{v^2}-1\right)$.
     Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.
6. 6.a. Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :
$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right) = a_n + b_n Y_k$$
   - 6.b. En déduire : $\ln(C_n) = n\,a_n + b_n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   - 6.c. Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite. On énoncera précisément le théorème utilisé.
7. 7.a. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ au voisinage de 0.
   - 7.b. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions $x\mapsto\ln(1+vx+\mu x^2)$ et $x\mapsto\ln(1-vx+\mu x^2)$.
   - 7.c. Démontrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n a_n = \mu-\frac{v^2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}b_n = v$.
     En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
     On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.
8. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

   Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}$.
   - 8.a. Soit ε un réel strictement positif.
     - 8.a.i. Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que :
$$\Phi(y)-\frac{\varepsilon}{2}\leq\Phi(y-\eta)\leq\Phi(y+\eta)\leq\Phi(y)+\frac{\varepsilon}{2}$$
     - 8.a.ii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n\geq n_1$:
$$y-\eta\leq\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\leq y+\eta$$
     - 8.a.iii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n\geq n_2$:
$$F_n(y+\eta)\leq\Phi(y+\eta)+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{et}\quad F_n(y-\eta)\geq\Phi(y-\eta)-\frac{\varepsilon}{2}$$
     - 8.a.iv. Montrer que pour n assez grand $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right)$, et en déduire :
$$\left|G_n(x)-\Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right)\right|\leq\varepsilon$$
   - 8.b. En conclure que la suite de variables aléatoires $\big(\ln(C_n)\big)_{n\geq1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.
9. Démontrer que $(C_n)_{n\geq1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu-\dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Partie III – La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif. À la date 0, un investisseur achète sur un marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

- Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;
- dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t.

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.
On fait les hypothèses suivantes :

- On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0 c'est-à-dire qu'à cet instant le cours de l'action vaut 1.
- Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).
- On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $\mathrm{e}^r - 1$, où r est un réel strictement positif.
- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel, $f(x) = \max(0, x)$.

10. **10.a.** Justifier que la valeur de l'option à la date t est $f(C - K)$.

10.b. Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat π_K sur l'actif non risqué, quel serait la valeur de son placement à la date t ?

10.c. En déduire qu'il convient de poser $\pi_K = \mathrm{e}^{-r}\mathbb{E}\big(f(C - K)\big)$ si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.
Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

11. **11.a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

11.b. Établir l'existence de $\mathbb{E}\big(f(C - K)\big)$ et l'égalité :

$$\mathbb{E}\big(f(C - K)\big) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (\mathrm{e}^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right) dx$$

12. **12.a.** Montrer l'égalité :

$$\pi_K = \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - K\mathrm{e}^{-r}\Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right)$$

12.b. On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.
Établir la formule de Black-Scholes :

$$\pi_K = \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - K\mathrm{e}^{-r}\Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right)$$

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r - \theta)$.
On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x = \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)$$

On définit alors la fonction $\Psi : v \longmapsto \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) - \mathrm{e}^{-\theta}\Phi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

13.a. Montrer que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $v > 0$:

$$\Psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right)$$

Dresser le tableau de variations de Ψ en y faisant figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
On distinguera les cas $\theta > 0$ et $\theta \leq 0$.

13.b. Déterminer pour quelles valeurs de x il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.
En conclure finalement que l'on peut définir *la* volatilité implicite si et seulement si :

$$f\left(1 - \mathrm{e}^{-\theta}\right) < x < 1$$

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★