Concours blanc 2 - Épreuve 1

Lundi 4 mars - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Être exigeant, c'est montrer de l'intérêt."
André Maurois

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...
Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir...

✘ Attention !
Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de barème ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés...

Exercice 1 (Fait maison)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I – Un premier système différentiel

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(A)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) &\iff AX = 0 \\
&\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc :

- ⋆ génératrice de $\ker(A)$ par définition,
- ⋆ libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A)$.

Méthode !
On peut procéder autrement...
• On peut montrer que $\operatorname{rg}(A) = 2$ en remarquant au passage que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
• Le fait que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ nous fournit alors :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$$
• On conclut que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A)$ car c'est une famille de $\ker(A)$ à la fois libre (...) et de "bon cardinal" (par théorème du rang).

2. Calculer $A^2 + A$.

Conclusion : $A^2 + A = 0_2$.

3. Déduire des questions précédentes les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

Pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, on notera $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ.

- D'après la question précédente, le polynôme $X^2 + X$ est annulateur de la matrice A.
  Or, les racines de $X^2 + X$ sont 0 et -1. D'où : $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1; 0\}$.
- On sait déjà, d'après la question 1, que 0 est valeur propre de A et que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A)$.
- Ensuite, on :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A + I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) && C_2 = C_1 \text{ (donc } C_1 - C_2 = 0\text{) et } C_3 = -C_1 \text{ (donc } C_1 + C_3 = 0\text{)} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Rappel...
Les valeurs propres de A sont parmi les racines d'un polynôme annulateur de A.

Ainsi, $\text{rg}(A + I_3) < 3$ et donc -1 est valeur propre de A et, par théorème du rang :

$$\text{rg}(A + I_3) + \dim\left(\ker(A + I_3)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$$

D'où :

$$\dim\left(\ker(A + I_3)\right) = 2$$

Puis, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A + I_3)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A + I_3)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de $\ker(A + I_3)$ qui est :

- ⋆ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
- ⋆ de cardinal 2, égal à $\dim\left(\ker(A + I_3)\right)$.

Conclusion. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(A + I_3)$.

♣ Méthode !
On pouvait également résoudre un système pour déterminer $\ker(A + I_3)$...

Conclusion :

- les valeurs propres de A sont 0 et -1,
- la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$,
- la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

Autre possibilité...

Il est bien évidemment possible de déterminer les valeurs propres de A sans aucune indication de l'énoncé. Rappelons ici la méthode, même si elle n'était pas attendue dans cette question. On a :

$$\left(\lambda \text{ est valeur propre de } A\right) \iff \text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & -1-\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Petite remarque
On pouvait également échanger L_2 et L_3, puis effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_2$.

Mais, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ; elle est donc de rang maximal si, et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, si, et seulement si, le produit de ses coefficients diagonaux est non nul.
Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 &\iff 1(-1-\lambda)(\lambda+\lambda)^2) = 0 \\
&\iff -\lambda(1+\lambda)^2 = 0 \\
&\iff \lambda \in \{-1; 0\}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les valeurs propres de A sont -1 et 0.

4. Justifier alors que A est diagonalisable puis donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :

- libre car c'est la concaténation de familles libres de vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes,
- de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

Cette famille est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Conclusion : A est diagonalisable et, en notant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a ainsi :

- D diagonale, constituée des valeurs propres de A,
- P inversible, car matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres évoquée,
- $A = PDP^{-1}$, d'après la formule de changement de base.

5. On considère le système différentiel

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & & & y & - & z \\ y' & = & x & & & - & z \\ z' & = & x & + & y & - & 2z \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5.a. Préciser les équilibres de ce système différentiel. Que dire du comportement des trajectoires en $+\infty$?

Soient x, y, z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de sorte que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ t' \\ z' \end{pmatrix}$. Dès lors :

$$\big(X \text{ est solution de } (S_1)\big) \iff X' = AX$$

- Puisque (S_1) est homogène, les équilibres sont donnés par $\ker(A)$.

Conclusion : l'ensemble des équilibres de (S_1) est $\left\{ t \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

Confusion d'objets !
Un équilibre d'un système différentiel est une solution de ce système... il s'agit donc d'une fonction !

- On sait que :
  - ⋆ A est diagonalisable,
  - ⋆ les valeurs propres de A sont négatives ou nulles.

Conclusion : les trajectoires du système différentiel (S_1) sont toutes convergentes et convergent vers un équilibre (pas nécessairement le même).

Confusion d'objets !
On dit bien "une trajectoire converge vers un équilibre", même si une trajectoire est un ensemble de triplets et qu'un équilibre est une fonction... Grosses confusions d'objets, mais on comprend bien l'idée tout de même !

5.b. Résoudre le système différentiel (S_1).

Avec les notations précédentes, notons $Z = P^{-1}X$ de sorte que, par linéarité de la dérivation (P est constante) : $Z' = P^{-1}X'$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\big(X \text{ est solution de } (S_1)\big) &\iff X' = AX \\
&\iff X' = PDP^{-1}X \\
&\iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \\
&\iff Z' = DZ \qquad \text{en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & 0 \\ z_2' & = & -z_2 \\ z_3' & = & -z_3 \end{array} \right. \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & a \\ z_2(t) & = & be^{-t} \\ z_3(t) & = & ce^{-t} \end{array} \right. \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = P \begin{pmatrix} a \\ be^{-t} \\ ce^{-t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x(t) & = & a & + & be^{-t} & + & ce^{-t} \\ y(t) & = & a & - & be^{-t} & & \\ z(t) & = & a & & & + & ce^{-t} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Petite remarque
On remarque alors que : $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$.
On retrouve le fait que toutes les trajectoires de (S_1) convergent vers un équilibre du système différentiel...

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S_1) est $\left\{ t \longmapsto \begin{pmatrix} a + be^{-t} + ce^{-t} \\ a - be^{-t} \\ a + ce^{-t} \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

5.c. Proposer une trajectoire non constante qui converge vers $(0,0,0)$.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. D'après la question précédente, la fonction $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} a+be^{-t}+ce^{-t} \\ a-be^{-t} \\ a+ce^{-t} \end{pmatrix}$ est solution de (S_1).

On remarque alors, en prenant $a=0$, $b=1$ et $c=0$, que X est non constante et $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : la trajectoire $\left\{(e^{-t}, -e^{-t}, 0),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ est non constante et converge vers $(0,0,0)$.

5.d. Proposer une trajectoire non constante qui converge vers $(1,1,1)$.

Conclusion : la trajectoire $\left\{(1+e^{-t}, 1-e^{-t}, 1),\ t \in \mathbb{R}\right\}$ est non constante et converge vers $(1,1,1)$.

Partie II – Un second système différentiel

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Démontrer que 2 est la seule valeur propre de la matrice B.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (\lambda \text{ est valeur propre de } B) &\iff \det(B-\lambda I_2) = 0 \\ &\iff (1-\lambda)(3-\lambda)+1 = 0 \\ &\iff 3-4\lambda+\lambda^2+1 = 0 \\ &\iff \lambda^2-4\lambda+4 = 0 \\ &\iff (\lambda-2)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 2 \end{aligned}$$

✓ Rigueur !
Il faut raisonner par équivalences ici... Et on aime bien partir de "λ est VP de B"...

Conclusion : la matrice B admet 2 comme unique valeur propre.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Raisonnons par l'absurde. Supposons que B est diagonalisable. Il existe alors :

- une matrice D diagonale composée des valeurs propres de B, donc telle que $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
- une matrice P inversible,

telles que $B = PDP^{-1}$. Ainsi $B = 2I_2$: absurde !

Conclusion : la matrice B n'est pas diagonalisable.

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice B. On considère le vecteur $u_1 = (1,-1)$.

8.a. Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $f(u) = 2u + u_1$ puis en donner une solution u_2 dont la première composante est égale à 1.

Considérons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (x,y)$. Notons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f(u) = 2u + u_1 &\iff BU = 2U + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff (B-2I_2)U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & -1 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1-y \\ y & = & y \end{array} \right. \\ &\iff u = (-1-y, y) \end{aligned}$$

✘ Attention !
Il ne faut surtout pas rajouter "$\iff u = (1;-2)$", ce qui signifierait que $(1;-2)$ est la seule solution...

En prenant $y=-2$, on obtient le vecteur u_2 demandé.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $f(u) = 2u + u_1$ est $\left\{(-1-y, y),\ y \in \mathbb{R}\right\}$ et $u_2 = (1,-2)$.

8.b. Justifier que $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La famille (u_1, u_2) est une famille de $\mathbb{R}^2$ qui est :

- ⋆ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires ($u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (1, -2)$),
- ⋆ de cardinal 2, égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

8.c. Donner la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}$, et donner également une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

- On a :
  - ⋆ $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
    Ainsi : $f(u_1) = 2u_1$.
  - ⋆ d'après la question précédente, $f(u_2) = 2u_2 + u_1$.

  D'où :

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Important !
Il n'est pas nécessaire d'utiliser le vecteur u_2 trouvé ; et aucun calcul n'est nécessaire !

- Posons maintenant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice Q est inversible car il s'agit de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base $\mathscr{B}$.

Ainsi, par formule de changement de base :

$$B = QTQ^{-1}$$

Conclusion : $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ sont telles que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & - & y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Z = QX$ de sorte que $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et, par linéarité de la dérivation (Q est constante) : $Z' = QX'$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\big(X \text{ est solution de } (S_2)\big) &\iff X' = BX \\
&\iff X' = QTQ^{-1}X \\
&\iff Q^{-1}X = TQ^{-1}X \\
&\iff Z' = TZ \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z_1' & = & 2z_1 + z_2 \\ z_2' & = & 2z_2 \end{array} \right. && \text{en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists b \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & 2z_1(t) + be^{2t} \\ z_2(t) & = & be^{2t} \end{array} \right. && \text{en remarquant que } t \longmapsto bte^{2t} \text{ est solution particulière de } y' - 2y = be^{2t} \\
&\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(t) & = & ae^{2t} + bte^{2t} \\ z_2(t) & = & be^{2t} \end{array} \right. \\
&\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \ X(t) = Q\begin{pmatrix} ae^{2t} + bte^{2t} \\ be^{2t} \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & ae^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ y(t) & = & -ae^{2t} - b(t+2)e^{2t} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S_2) est $\left\{ t \longmapsto \begin{pmatrix} ae^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ -ae^{2t} - b(t+2)e^{2t} \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

10. Quel résultat permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution X de (S_2) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La déterminer.

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy : $\left\{ \begin{array}{l} X' = BX \\ X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

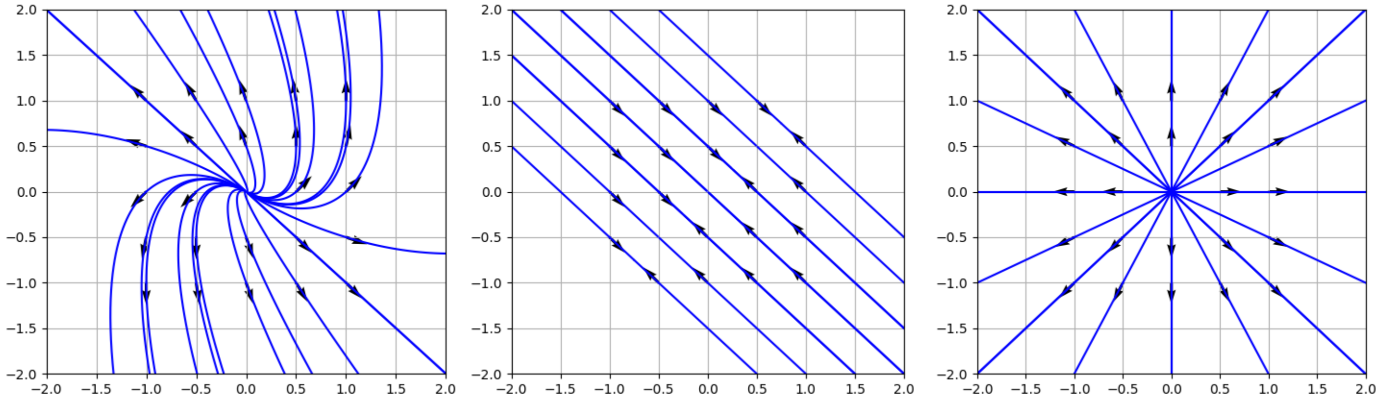
- Soit X une solution de $X' = AX$. Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} a e^{2t} + b(t+1)e^{2t} \\ -ae^{2t} - b(t+2)e^{2t} \end{pmatrix}$.

  Ainsi :

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \iff \begin{pmatrix} a+b \\ -a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ -a & - & 2b & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & -1 \\ & - & b & = & -1 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcr} a & = & -2 \\ b & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}$ est l'unique solution de (S_2) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. En détaillant soigneusement la réponse, préciser lequel des trois graphiques ci-dessous représente des trajectoires du système différentiel (S_2).



Graphique 1 Graphique 2 Graphique 3

Examinons sur ces trois graphiques la trajectoire associée à la solution trouvée en question précédente. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cette solution et on rappelle qu'on a obtenu : $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ -te^{t} \end{pmatrix}$... Nous savons que cette trajectoire passe par le point de coordonnées $(-1, 0)$.

- Sur le graphique 3, la trajectoire passant par le point de coordonnées $(-1, 0)$ a une ordonnée constante. S'il s'agissait de la trajectoire associée à la solution X, on aurait : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = 0$. Ce qui n'est pas le cas.
  Le graphique 3 ne représente donc pas des trajectoires de (S_2).
- Sur le graphique 2, la trajectoire passant par le point de coordonnées $(-1, 0)$ converge (vers $(-0.5, -0.5)$). Or, $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$. La trajectoire associée à X n'est donc pas convergente. Le graphique 2 ne représente donc pas des trajectoires de (S_2).

Conclusion : le graphique 1 est celui qui représente des trajectoires de (S_2).

Important !

Même s'il existe un cas général de comportement des trajectoires, le seul cas au programme est celui où la matrice du système différentiel est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas ici. Je propose donc d'autres arguments.

☞ Pour info...

On voit également, sur le graphique 2, que le système différentiel associé possède une infinité d'équilibres de la forme $t \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. La matrice associée (s'il s'agit bien d'un système homogène) n'est donc pas inversible...

Exercice 2 (EDHEC 2004 E)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé du plan.

Partie I - Étude d'une suite de fonctions

Dans toute cette partie, l'entier naturel non nul n est fixé.

1. 1.a. Montrer que f_n est continue à droite en 0.

On a :

- ⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, donc, puisque $n > 0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{-n}{x} = -\infty$
- ⋆ $\lim\limits_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$

Donc, par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f_n(x) = 0 = f_n(0)$$

Conclusion : la fonction f_n est continue à droite en 0.

✍ Rédaction
On détaille suffisamment les premières questions de technique demandées (dérivées, limites,...).

1.b. Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et préciser la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n, noté $f'_{n,d}(0)$.

Soit $h > 0$. On a :

$$\frac{f_n(0+h) - f_n(0)}{h} = \frac{h\mathrm{e}^{-\frac{n}{h}}}{h} = \mathrm{e}^{-\frac{n}{h}}$$

Or, puisque $n > 0$, par composition de limites :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\h>0}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{h}} = 0$$

D'où :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\h>0}} \frac{f_n(0+h) - f_n(0)}{h} = 0$$

Conclusion : la fonction f_n est dérivable à droite en 0 et $f'_{n,d}(0) = 0$.

2. 2.a. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0 par la gauche.

Par composition et opérations, on trouve :

$$\lim_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f_n(x) = -\infty$$

Ensuite, pour tout $x \neq 0$: $f_n(x) = -n \times \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}}{\frac{-n}{x}}$. Or :

- ⋆ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, donc, puisque $n > 0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{-n}{x} = +\infty$,
- ⋆ par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$.

D'où, par composition :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}}}{\frac{-n}{x}} = +\infty$$

et puisque $-n < 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f_n(x) = -\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f_n(x) = -\infty$.

✍ Rédaction
Il faut détailler cette limite en faisant apparaître la croissance comparée convenablement ainsi que la composition.
Détailler c'est s'assurer de ne pas avoir à réfléchir et de ne faire qu'appliquer des résultats de cours. INDISPENSABLE donc...

2.b. Calculer, pour tout réel x non nul $f'_n(x)$, puis donner le tableau de variations de f_n.

- On sait que :
  - ⋆ $x \longmapsto \frac{-n}{x}$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$;

⋆ exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction $x \longmapsto e^{-\frac{n}{x}}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Conclusion : f_n est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme produit de telles fonctions.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{-\frac{n}{x}} + x\frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{x}} \\ &= \left(1+\frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}} \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{x+n}{x}e^{-\frac{n}{x}} \end{aligned}$$

- D'où, en complétant par les limites obtenues en question précédente :

x	$-\infty$		$-n$		0		$+\infty$
$x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+n}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$-ne$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; 0$	$\nearrow$	$+\infty$

✍ Rédaction

Détailler c'est s'assurer d'avoir un raisonnement correct.
Une phrase du type "f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$" ne convient pas ; et ne conviendra jamais pour les composées ! On doit s'assurer de la concordance des ensembles :
⋆ u est dérivable sur I et à valeurs dans J
⋆ g est dérivable sur J ;
donc $g \circ u$ est dérivable sur I.

C'est une blague ?

NE PAS METTRE SOUS MÊME DÉNOMINATEUR, C'EST CHOISIR D'ÉCHOUER AU CONCOURS !
Comment peut-on à ce point ne pas écouter les conseils que je donne ?

✘ Attention !

Pas de valeur interdite en 0 pour f_n, car $f_n(0)$ existe (et vaut 0).
En revanche, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_n(x) = -\infty$...

3. Pour tous réels a et b, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $+\infty$ lorsque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) - (ax+b) = 0$.

3.a. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

Conclusion : $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$.

3.b. En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$: $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On a :

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-n}{x} = 0$
- $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$

D'où :

$$e^{-\frac{n}{x}} = 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{n^2}{x^2}\right)$$

Et ainsi :

$$xe^{-\frac{n}{x}} = x - n + \frac{n^2}{2x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{n^2}{x}\right)$$

Conclusion : puisque $n > 0$, $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

★Subtil...★

A part dire que $n \neq 0$, pas de justification pour dire que $\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{n^2}{x}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$...
C'est une propriété qui découle de la définition.
En revanche, le fait que $\dfrac{n^2}{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ ont même limite ne suffit pas !

3.c. Démontrer alors que $\mathcal{C}_n$ admet une droite asymptote d_n au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dont on donnera une équation. Etudier la position relative de d_n et $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

- D'après la question précédente :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) - (x-n) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{n^2}{2x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Conclusion : La droite d_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

- A nouveau d'après la question précédente, et puisque $n^2 \neq 0$:

$$f_n(x) - (x-n) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{n^2}{2x}$$

Or, si $x < 0$, alors $\dfrac{n^2}{2x} < 0$. Ainsi, au voisinage de $-\infty$: $f_n(x) - (x-n) < 0$.
De même, au voisinage de $+\infty$: $f_n(x) - (x-n) > 0$.

Élémentaire...

$y = x - n - \dfrac{n^2}{x}$ n'est pas une équation de droite... Il serait bon de le savoir, même si l'énoncé rappelle dans la définition énoncée plus haut ce qu'il faut établir. Un peu de bon sens !!

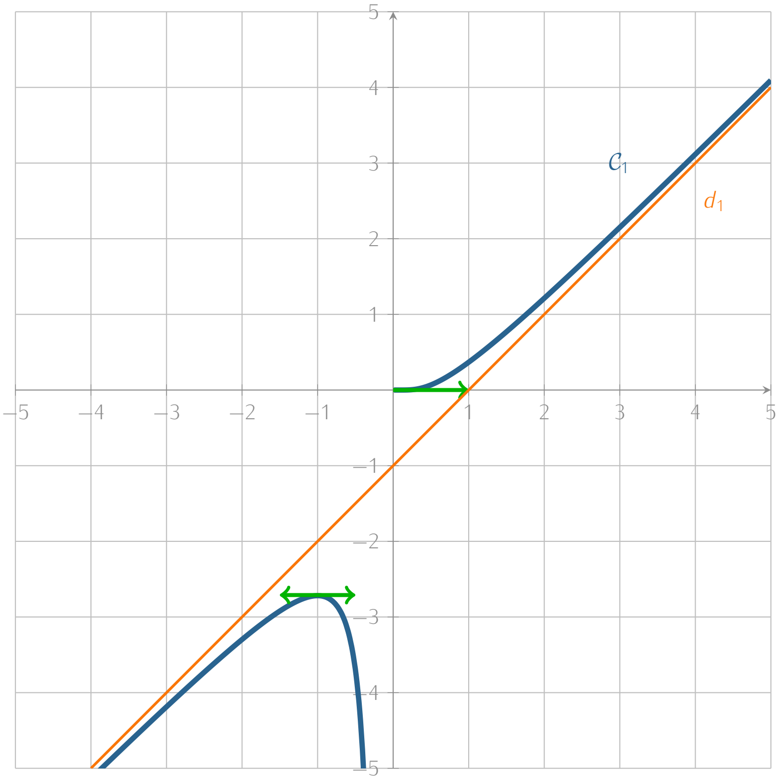
☞ Rappel...

Si deux fonctions sont équivalentes au voisinage de a, alors elles ont même signe au voisinage de a.

Conclusion : la droite d_n d'équation $y = x - n$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$, et :

- au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_n$ est au-dessus de d_n,
- au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ est au-dessous de d_n.

4. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_1$ dans un repère du plan judicieusement choisi. On fera apparaître sur le graphique les différents résultats précédemment obtenus.



♣ Méthode !
On fait apparaître :
● les tangentes horizontales, ● l'asymptote "verticale" d'équation $x = 0$ au voisinage de 0 par la gauche (car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_n(x) = -\infty$)
● l'asymptote "oblique" d'équation $y = x - 1$ aux voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ en veillant à la position relative avec $\mathcal{C}_1$...

Partie II – Étude d'une suite

5. 5.a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Sur $]-\infty; 0[$: f_n admet un maximum égal à $-ne$, donc l'équation $f_n(x) = 1$ ne possède aucune solution sur $]-\infty; 0[$.
- Sur $[0; +\infty[$:
  - ⋆ f_n est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$,
  - ⋆ f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (car strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et continue à droite en 0).

  Donc, par théorème de bijection, f_n est bijective de $[0; +\infty[$ dans $f_n([0; +\infty[) = [0; +\infty[$.
  Or $1 \in [0; +\infty[$. Ainsi, l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $[0; +\infty[$.

☞ Rappel...
Si une fonction f est continue sur $[a; b]$ et strictement croissante sur $]a; b]$, alors f est strictement croissante sur $[a; b]$.

☞ Rappel...
C'est le théorème des valeurs intermédiaires qui assure que, puisque f_n est continue et que $[0; +\infty[$ est un intervalle, alors $f_n([0; +\infty[)$ est également un intervalle. Ses bornes ne sont alors données que par l'étude des variations de f_n...

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < u_n < 2n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $f_n(u_n) = 1$
- $f_n(1) = e^{-n}$. Or $n > 0$, donc $-n < 0$ et ainsi, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $e^{-n} < 1$.
- $f_n(2n) = 2ne^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}n = \sqrt{\dfrac{4}{e}}n$. Or $0 < e < 3$, donc $\dfrac{4}{e} > 1$ et ainsi, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{\dfrac{4}{e}} > 1$. D'où, puisque $n > 0$: $f_n(2n) > n \geq 1$.

➠Réflexe !
Pour comparer les antécédents, on compare les images ! C'est toujours ainsi que l'on procède pour les suites implicites.

On a ainsi établi :

$$f_n(1) < f_n(u_n) < f_n(2n)$$

Puis, par stricte croissance de f_n sur $[0; +\infty[$, on obtient :

$$1 < u_n < 2n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < u_n < 2n$.

5.c. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = 1 \iff g(x) = n$, où $g : x \longmapsto x\ln(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\begin{aligned} f_n(x) = 1 &\iff x e^{-\frac{n}{x}} = 1 && e^{\frac{n}{x}} \neq 0 \\ &\iff x = e^{\frac{n}{x}} && x > 0,\ e^{-\frac{n}{x}} > 0 \\ &\iff \ln(x) = \frac{n}{x} && x \neq 0 \\ &\iff x\ln(x) = n \\ &\iff g(x) = n \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = 1 \iff g(x) = n$.

5.d. Démontrer que la fonction g est bijective sur $[1; +\infty[$ dans un intervalle à préciser. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- La fonction g est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$.
  Soit $x \in [1; +\infty[$. On a :
  $$g'(x) = \ln(x) + 1$$
  Or $x \geq 1$, donc $\ln(x) \geq 0$ et ainsi :
  $$g'(x) > 0$$
  Conclusion : la fonction g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.
- On a ainsi :
  - ⋆ g est continue sur $[1; +\infty[$ car dérivable sur cet intervalle,
  - ⋆ g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

  Donc, par théorème de bijection, g est bijective de $[1; +\infty[$ dans $g([1; +\infty[)$.
  Or, g est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$, d'où : $g([; +\infty[) = [g(1); \lim\limits_{+\infty} g[= [0; +\infty[$.

  Conclusion : La fonction g est bijective de $[1; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ et voici le tableau de variations de g^{-1} :

x	0	$+\infty$
g^{-1}	1 ↗	$+\infty$

- Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = 1$. Ainsi, d'après la question précédente, licite car $u_n > 1 > 0$: $g(u_n) = n$. Autrement dit, puisque g_n est bijective de $[1; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ et que $u_n \in [1; +\infty[$ et $n \in [0; +\infty[$: $u_n = g^{-1}(n)$. Enfin, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty$.

  Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

➠Réflexe ! Ca ne coûte pas grand chose, et ça sert très certainement (c'est le cas ici...).

Important ! On vient de transformer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en le second type de suites implicites, qui est nettement plus simple à étudier !

Quelques rappels sur les suites implicites...

On peut classer les suites implicites en deux types :

1# les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est l'unique solution de $f_n(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$ et f_n une fonction bijective sur un certain intervalle...

2# les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n est l'unique solution de $g(x) = a_n$, avec g une fonction (**ne dépendant pas de n**) bijective sur un certain intervalle et a_n une expression dépendant de n.

Tandis que l'étude du premier cas demande des techniques particulières :

- étude des variations en comparant $f_n(v_n)$ et $f_{n+1}(v_n)$ (en passant parfois par l'étude du signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$), puis en utilisant le fait que $f_n(v_n) = a = f_{n+1}(v_{n+1})$ et la stricte monotonie de f_n pour conclure ;
- étude du comportement en $+\infty$ en utilisant soit un théorème de comparaison ou d'encadrement, soit un théorème de convergence monotone (couplé éventuellement avec un raisonnement par l'absurde et un théorème de divergence monotone)...

l'étude du second type est nettement plus simple : puisque $g(w_n) = a_n$ et que g est bijective, on obtient $w_n = g^{-1}(a_n)$ qui est une forme semi-explicite de w_n ! Elle permet ensuite :

- d'étudier les variations de w_n : on compare aisément a_n et a_{n+1} (souvent a_n vaut n, ou $\frac{1}{n}$...), puis il suffit d'appliquer g^{-1} ;
- d'obtenir la limite de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en donnant $\lim\limits_{n \to +\infty} g^{-1}(a_n)$...

Petite remarque En fait, le second est un cas particulier du premier... En effet, si $g(w_n) = a_n$, alors $g(w_n) - a_n = 0$ et, en posant $f_n = g - a_n$, w_n est l'unique solution de $f_n(x) = 0$.

Dans cet exercice, on a pu passer du premier type au second type puisque le n dans l'expression de $f_n(x)$ peut être isolé.
D'autres exercices sur les suites implicites : EDHEC2021E_Exercice1, Ecricome2020E_Exercice2, EDHEC2021E_Exercice1, EDHEC2016E_Exercice2, EDHEC2009E_Exercice1, EDHEC2000E_Exercice3.

5.e. Justifier la relation, valable pour tout entier naturel non nul n : $\ln(u_n)+\ln\left(\ln(u_n)\right) = \ln(n)$, puis montrer : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait, d'après la question 5.c, que $u_n \ln(u_n) = n$.
Or $u_n > 1$, donc $u_n > 0$ et $\ln(u_n) > 0$; d'où :
$$\ln(u_n) + \ln\left(\ln(u_n)\right) = \ln(n)$$
- Puisque $\ln(u_n) \neq 0$ et d'après ce qui précède :
$$1 + \frac{\ln\left(\ln(u_n)\right)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)}$$
Or :
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = +\infty$,
  - ⋆ par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$.

  D'où, par composition :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\ln(u_n)\right)}{\ln(u_n)} = 0$$
Par conséquent :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = 1$$

Conclusion : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

✘ Attention !
On sait bien qu'il est interdit de composer les équivalents (surtout pas l'exponentielle... on sait que $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et pourtant $\cancel{e^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n}$). Il serait donc faux d'affirmer que u_n est équivalent à n...

- On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ln(u_n) = n$. Ainsi, puisque $\ln(u_n) \neq 0$:
$$u_n = \frac{n}{\ln(u_n)}$$
Et, d'après le point précédent, on obtient :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$$

Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

6. A l'aide des résultats de la question 5., recopier les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **suite_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-4} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```
import numpy as np

def suite_u(n):
    a = ...
    b = ...
    while ...
        m=(a+b)/2
        if m*np.log(m)>n:
            ...
        elif ...
            ...
        else:
            a,b=m,m
    return (a+b)/2
```

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    a=1
    b=2*n #d'après la question 5b
    while b-a>10**(-4):
        m=(a+b)/2
        if m*np.log(m)>n: #car g est croissante
            b=m
        elif m*np.log(m)<n:
            a=m
        else:
            a,b=m,m
    return (a+b)/2
```

Petite remarque

On connaît un algorithme de dichotomie général traitant de la résolution d'une équation du type $h(x) = 0$ (il est toujours possible de se ramener à ce cas). Ici, l'énoncé oriente vers une variante utilisant la fonction g et sa monotonie... En effet, si $g(m) > n$, autrement dit, si $g(m) > g(u_n)$, alors, par stricte croissance de g : $m > u_n$.
Et dans ce cas, il convient de remplacer la valeur b par m...
La connaissance des variations de g est alors indispensable compléter l'algorithme !

7. En déduire un programme **Python** permettant de représenter les 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

L=[suite_u(n) for n in range(1,21)]
plt.plot(range(1,21),L,'r+')
plt.show()
```

8. 8.a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $g(u_n) = n$... Débutons avec :

$$n < n+1$$

Autrement dit :

$$g(u_n) < g(u_{n+1})$$

D'où, par stricte croissance de g sur $[1;+\infty[$ (licite car $u_n, u_{n+1} \in [1;+\infty[$) :

$$u_n < u_{n+1}$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Petite remarque

On peut procéder de façon légèrement différente...
On a :

$$n < n+1$$

D'où, par stricte croissance de g^{-1} sur $\mathbb{R}^+$ (licite car $n, n+1 \in \mathbb{R}^+$) :

$$g^{-1}(n) < g^{-1}(n+1)$$

Autrement dit :

$$u_n < u_{n+1}$$

8.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$$

➠Réflexe !
On revient à la définition de la suite implicite...

Autrement dit :

$$u_{n+1}e^{-\frac{n+1}{u_{n+1}}} = 1$$

Et ainsi :

$$u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}}e^{-\frac{1}{u_{n+1}}} = 1$$

D'où :

$$u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

Autrement dit :

$$f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

9. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$.

9.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

➠Réflexe !
Pour encadrer une intégrale, on encadre l'intégrande...

- Soit $t \in [u_n; u_{n+1}]$. On a :

$$u_n \leq t \leq u_{n+1}$$

D'où, par croissance de f_n sur $\mathbb{R}^+$, licite car $u_n, t, u_{n+1} \geq 0$:

$$f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1})$$

Or $f_n(u_n) = 1$ et, d'après la question précédente, $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$. D'où :

$$1 \leq f_n(t) \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

- On a ainsi établi :
$$\forall t \in [u_n; u_{n+1}],\ 1 \leq f_n(t) \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale, licite car la fonction f est continue sur le segment $[u_n; u_{n+1}]$ (car $[u_n; u_{n+1}] \subset \mathbb{R}^+$) et que $u_n \leq u_{n+1}$ ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante) :
$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1 dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}} dt$$
Autrement dit :
$$u_{n+1} - u_n \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t) dt \leq (u_{n+1} - u_n)\mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)\mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

9.b. En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante (question **8.a**), donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, d'après la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$ (question **5.d**). D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}} = 1$$
Par théorème d'encadrement, on obtient ainsi :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} = 1$$

Conclusion : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} - u_n$.

9.c. Déduire des questions précédentes que la série de terme général I_n est divergente.

En sommant l'inégalité de gauche de la question **9.a** :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) \leq \sum_{k=1}^{n} I_k$$
Autrement dit, par télescopage :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_1 \leq \sum_{k=1}^{n} I_k$$
Or, d'après la question **8.a** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$.
Par théorème de comparaison, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} I_k = +\infty$$

Conclusion : la série $\sum\limits_{n\geq 1} I_n$ est divergente.

Autre possibilité...

En utilisant la question précédente.
On a :
- $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} - u_n$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante) ; $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 0$ (car $I_n \geq u_{n+1} - u_n$).

Ainsi, par critère d'équivalence sur les séries à terme général positif, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} I_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Or, on sait que $\sum\limits_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont également même nature... Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ (question **5.d**), on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ est également divergente.
D'où le résultat.

☞ Rappel...
La positivité de (I_n) n'est pas nécessaire, puisque I_n est équivalent à $u_{n+1} - u_n$ qui est positif, donc à partir d'un certain rang, $I_n \geq 0$ et cela est suffisant pour appliquer le critère.

Pourquoi ?
$\sum\limits_{n=1}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_1$... On démontre alors, en raisonnant par double implication que $\sum\limits_{n\geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ CV ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV.

Exercice 3 (EDHEC 2012 E)

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}$.

1. 1.a. Montrer que la fonction f est paire.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est un ensemble symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \lambda|-x|e^{-\lambda(-x)^2} \\ &= \lambda|x|e^{-\lambda x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : La fonction f est paire.

1.b. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et la calculer.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $A \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x)dx &= \int_0^A \lambda|x|e^{-\lambda x^2}dx \quad A \geq 0, \text{ donc } \forall x \in [0, A],\ |x| = x \\ &= \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x^2}dx \\ &= \left[\frac{-1}{2}e^{-\lambda x^2}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda A^2} = 0$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

1.c. Montrer enfin que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On sait que :

- f est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$,
- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$. Puis, par parité de f, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est également convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et vaut 1.

Petite remarque

On utilise ici ce résultat, qui est à la limite du programme. Il faut être capable de le démontrer à l'aide d'un changement de variable si nécessaire.

Conclusion : f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. 2.a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

- La fonction $x \longmapsto xf(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} xf(x)dx &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2}dx \quad \text{en posant } \sigma > 0 \text{ tel que } \sigma^2 = \frac{1}{2\lambda} \text{ (licite car } \lambda > 0) \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \\ &= \sqrt{2\pi\sigma^2}\int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ est convergente puisqu'il s'agit du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$ est également convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

Remarques

1# On pourrait calculer la valeur de cette intégrale (l'énoncé aurait pu le demander, même si ce n'est pas nécessaire pour traiter la suite de l'exercice).

En reprenant le calcul, on a, après avoir posé $\sigma^2 = \dfrac{1}{2\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xf(x)dx &= \sqrt{2\pi\sigma^2}\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx && \text{par parité de } x \longmapsto x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\\
&= \sqrt{2\pi\sigma^2}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx && \text{en considérant } Z \text{ telle que } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma^2)\\
&= \sqrt{2\pi\sigma^2}\frac{1}{2}\mathbb{E}(Z^2) && \text{formule de Koenig-Huygens}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2}\left(\mathbb{V}(Z)+\mathbb{E}(Z)^2\right) && Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma^2)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\times\frac{1}{4\lambda}
\end{aligned}$$

2# On aurait aussi pu raisonner à l'aide d'un critère de négligeabilité...

Montrons : $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Pour tout $x \geq 1$:

$$\frac{xf(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lambda x^4 e^{-\lambda x^2} = \lambda\frac{x^4}{\left(e^{x^2}\right)^\lambda}$$

Or :

- $\star$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- $\star$ puisque $\lambda > 0$, par croissance comparée : $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{X^2}{e^X} = 0$

D'où, par composition :

$$\lim_{x\to+\infty}\lambda\frac{x^4}{\left(e^{x^2}\right)^\lambda} = 0$$

et ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

Par conséquent :

$$xf(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a ainsi :

- $xf(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$,
- $\forall x \geq 1,\ xf(x) \geq 0,\ \dfrac{1}{x^2} \geq 0$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemman impropre en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$, elle est donc convergente.

Par critère de négligeabilité sur les intégrales à intégrandes positives, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

or $x \longmapsto xf(x)$ est continue sur le segment $[0;1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$ n'est pas impropre, donc convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

✓ Rigueur !
On détaille suffisamment la croissance comparée qui apparaît dans le calcul de cette limite.

2.b. En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.

- On sait que :

X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ est absolument convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}|x|f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0|x|f(x)dx$ sont convergentes

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}xf(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ sont convergentes

- Or :

⋆ d'après la question précédente, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente ;

⋆ puisque f est paire, la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est impaire et ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 xf(x)dx$ est également convergente et vaut $-\int_0^{+\infty} xf(x)dx$.

Petite remarque
On utilise ici ce résultat, qui est à la limite du programme. Il faut être capable de le démontrer à l'aide d'un changement de variable si nécessaire.

- On en déduit que X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 xf(x)dx + \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= -\int_0^{+\infty} xf(x)dx + \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.

3. 3.a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente et la calculer.

- La fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $B \in [0; +\infty[$. On a, pour tout $x \in [0; B]$:

$$\begin{aligned}x^2 f(x) &= x^2 \lambda |x| \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \\ &= x^2 \times \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\end{aligned}$$

$|x| = x$ car $x \geq 0$

Posons ensuite : $\left| \begin{array}{l} u : x \longmapsto x^2 \\ v : x \longmapsto \dfrac{-1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x^2} \end{array}\right.$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; B]$ et pour tout $x \in [0; B]$: $\left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v'(x) = \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \end{array}\right.$.

Petite remarque
On peut également poser u : $x \longmapsto \dfrac{-1}{2}x^2$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$...

Par intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B x^2 f(x)dx &= \left[\frac{-1}{2}x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\right]_0^B - \int_0^B -x\mathrm{e}^{-\lambda x^2}dx \\ &= \frac{-1}{2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda B^2} + \int_0^B x\mathrm{e}^{-\lambda x^2}dx \\ &= \frac{-1}{2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda B^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^B \lambda|x|\mathrm{e}^{-\lambda x^2}dx \\ &= \frac{-1}{2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda B^2} + \frac{1}{\lambda}\int_0^B f(x)dx\end{aligned}$$

$\forall x \in [0; B],\ |x| = x$

Or :

⋆ $\dfrac{-1}{2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda B^2} = \dfrac{-1}{2}\dfrac{B^2}{\left(\mathrm{e}^{B^2}\right)^\lambda}$ et :

◇ $\lim\limits_{B\to+\infty} B^2 = +\infty$

◇ par croissance comparée (car $\lambda > 0$) $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\left(\mathrm{e}^X\right)^\lambda} = 0$

D'où par composition :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{-1}{2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda B^2} = 0$$

⋆ d'après la question **1.b**, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$; ainsi :

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^B f(x)dx = \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^B x^2 f(x)dx = \frac{1}{2\lambda}$$

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2\lambda}$.

3.b. En déduire que la variable aléatoire X possède une variance et donner sa valeur.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$:

X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est absolument convergente

si, et seulement si, les intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx$ sont convergentes, car il s'agit d'intégrales à intégrandes positives

- Or :
  - ⋆ d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx$ est convergente ;
  - ⋆ puisque f est paire, la fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ est paire et ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx$ est également convergente et vaut $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

Petite remarque
On utilise ici ce résultat, qui est à la limite du programme. Il faut être capable de le démontrer à l'aide d'un changement de variable si nécessaire.

- On en déduit que X admet un moment d'ordre 2 et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \qquad \text{question précédente}
\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens, X admet une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \qquad \text{question 2.b} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Conclusion : X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

★ Classique ! ★
Question (ainsi que la suivante) très classique qui ne doit poser aucun souci ! On remarque au passage le caractère très général de cette question (seul l'ensemble $Y(\Omega)$ peut changer si $X(\Omega) \neq \mathbb{R}$...).
On pourra au passage retravailler les exemples 5 du chapitre 6 (LE COURS, LE COURS, LE COURS !!!).

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

4.a. Donner l'expression de la fonction de répartition de Y, notée F_Y, à l'aide de celle de la variable aléatoire de X, notée F_X.

- On considère que $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Ainsi : $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :
  - ⋆ si $x < 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leq x]\big) \qquad Y(\Omega) = \mathbb{R}^+ \text{ et } x < 0 \\
&= \mathbb{P}(\varnothing) \\
&= 0
\end{aligned}$$

  - ⋆ si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leq x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([X^2 \leq x]\big) \qquad x \geq 0 \\
&= \mathbb{P}\big([-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}]\big) \qquad X \text{ est à densité} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Rappel de seconde
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$:
$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$
Et les "malins" qui appliquent $\sqrt{\cdot}$ oublient que $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$!!!

☞ Rappel...
De façon générale, pour tous a, b avec $a < b$: $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}\big([a < X \leq b]\big)$.
Ici, comme X est à densité, on a également $\mathbb{P}\big([a < X \leq b]\big) = \mathbb{P}\big([a \leq X \leq b]\big)$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

4.b. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité, notée f_Y, puis vérifier que Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

- Continuité de F_Y :
  - ⋆ sur $]-\infty; 0[$: F_Y est continue car constante.
  - ⋆ sur $]0; +\infty[$:
    - ◇ $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $]0; +\infty[$,
    - ◇ F_X est continue sur $\mathbb{R}$, comme fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

    Par composition : F_Y est continue sur $]0; +\infty[$.

Petite remarque
On pourrait également chercher à expliciter $F_Y(x)$, mais il faudrait déjà commencer par déterminer $F_X(x)$. C'est peut-être un peu plus court, mais moins dans l'esprit de l'exercice ; et je ne doute pas que c'est une méthode que vous préférez. Je détaille donc l'autre façon de traiter la question.

⋆ en 0 : Par continuité à droite en 0 de $\sqrt{\cdot}$ et continuité de F_X en 0, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_Y(x) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = F_X(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F_Y(x)$$

Par conséquent, F_Y est continue en 0.

Conclusion : F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

- Par des arguments similaires, F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité et on obtient f_Y en :

✘ Attention !
On dérive sur les intervalles ouverts et on pose une valeur "arbitraire" positive ailleurs.

⋆ dérivant F_Y sur les intervalles ouverts :

◇ pour tout $x < 0$, $f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$;

◇ pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F_Y'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} F_X'(\sqrt{x}) - \frac{-1}{2\sqrt{x}} F_X'(-\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) - \frac{-1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x}) && f \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) && x > 0 \text{ et } \sqrt{x} > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \lambda \sqrt{x} \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Petite remarque
Et dire que sur certaines copies, la dérivée de $x \longmapsto F_X(\sqrt{x})$ est fausse...

⋆ posant $f_Y(0) = \lambda$

Conclusion : Y est à densité et admet pour densité la fonction $f_Y : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.
On reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi : $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

4.c. Retrouver alors la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

Important !
Il faut traiter et réussir cette question, que l'on ait réussi la précédente ou non !!

On avait $Y = X^2$ et on vient d'établir que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi, Y admet une espérance et : $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$.
D'où l'existence du moment d'ordre 2 de X et :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

On conclut avec la formule de Koenig-Huygens...

Conclusion : on retrouve que X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$. On pose $W = \frac{-1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire.
Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire W.

Notons $h : x \longmapsto \frac{-1}{\lambda}\ln(1-x)$, définie sur $[0;1[$; ainsi que F_W la fonction de répartition de W et F_U celle de U.

- On a :

$$\begin{aligned} W(\Omega) &= \big(h(U)\big)(\Omega) \\ &= h\big(U(\Omega)\big) \\ &= h\big([0;1[\big) && U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1[) \\ &= [h(0); \lim_1 h[&& h \text{ est continue et strictement croissante sur } [0;1[\\ &= [0;+\infty[&& \text{car } \lambda > 0 \end{aligned}$$

★Subtil...★
La continuité permet d'affirmer que $h([0;1[)$ est un intervalle.
En effet : "l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle" (version bis du TVI).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

⋆ Si $x < 0$:
On a :

$$\begin{aligned} F_W(x) &= \mathbb{P}([W \leq x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && x < 0 \text{ et } W(\Omega) = [0;+\infty[\\ &= 0 \end{aligned}$$

⋆ Si $x \geq 0$:
On a :

$$\begin{aligned} F_W(x) &= \mathbb{P}([W \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{-1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right]\right) && \text{⤸ } \lambda > 0 \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-U) \geq -\lambda x]) && \text{⤸ stricte croissance de exp sur } \mathbb{R} \\ &= \mathbb{P}([1-U \geq \mathrm{e}^{-\lambda x}]) \\ &= \mathbb{P}([U \leq 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}]) \\ &= F_U(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}) && \text{⤸ } \lambda > 0 \text{ et } x \geq 0\text{, donc } \mathrm{e}^{-\lambda x} \in]0;1] \text{ et ainsi } 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0;1[\\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Important !
La **stricte** croissance est indispensable ! En effet, cachée derrière cette égalité de probabilités, il y a une égalité d'ensembles :
$[\ln(1-U) \geq -\lambda x] = [U \leq 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}]$.
Et on a, par stricte croissance de l'exponentielle (pour conserver l'équivalence), pour tout $\omega \in \Omega$: $\ln\big(1-U(\omega)\big) \geq -\lambda x \iff 1-U(\omega) \geq \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

☞ Rappel...
La fonction de répartition d'une VA suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ (ou $[0;1[$, ou $]0;1]$, ou $]0;1[$) est :

$$F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On a finalement obtenu :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît ici la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Or, la fonction de répartition caractérise la loi...

Conclusion : $W \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

6. 6.a. Déduire des questions précédentes une fonction **Python** d'en-tête `def simulAbsX(lam)` qui simule une réalisation de $|X|$ où $\lambda =$`lam`.

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np

def simulAbsX(lam):
    U=rd.random()
    Y=-1/lam*np.log(1-U)
    return np.sqrt(Y)
```

6.b. Justifier que $\mathbb{P}([X < 0]) = \mathbb{P}([X \geq 0]) = \dfrac{1}{2}$.
On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X<0]) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx && \text{⤸ } f \text{ est paire} \\ &= \int_{0}^{+\infty} f(x)dx && \text{⤸ question 1.b} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X < 0]) = \mathbb{P}([X \geq 0]) = \dfrac{1}{2}$.

6.c. En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(lam)` qui simule une réalisation de X où $\lambda =$`lam`.
La fonction `simulAbsX` permet de simuler une réalisation de $|X|$. Puisque, d'après la question précédente, X prend des valeurs positives ou négatives avec la même probabilité, il suffit d'attribuer à X la valeur $-|X|$ ou $|X|$ de façon équiprobable... D'où le programme :

```python
def simulX(lam):
    AbsX=simulAbsX(lam)
    if rd.random()<1/2:
        X=AbsX
    else:
        X=-AbsX
    return X
```

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires $Y_1,\ldots,Y_n$, supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

7. On considère des réels $x_1,\ldots,x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall \lambda \in]0,+\infty[,\ L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

7.a. Exprimer, pour tout $\lambda \in]0;+\infty[$, $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, $x_1,\ldots,x_n$.
Soit $\lambda \in]0;+\infty[$.

- On a :

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k) && \forall k \in [\![1;n]\!],\ x_k > 0 \\ &= \prod_{k=1}^{1} \left(\lambda e^{-\lambda x_k}\right) \\ &= \lambda^n \prod_{k=1}^{1} e^{-\lambda x_k} \\ &= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \end{aligned}$$

- Puis, comme $L(\lambda) > 0$:

$$\begin{aligned} \ln\left(L(\lambda)\right) &= \ln\left(\lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) && \lambda^n > 0,\ \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right) > 0 \\ &= \ln(\lambda^n) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k && \lambda > 0 \\ &= n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \end{aligned}$$

Tiens tiens...
Il est rassurant de trouver des résultats obtenus par le calcul dans l'énoncé...

7.b. On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0, +\infty[$ par : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1,\ldots,x_n$.
Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme somme fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$ (fonction ln et fonction affine).
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\ &\underset{\text{Réflexe !}}{=} \frac{n - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{\lambda} \end{aligned}$$

Et, puisque $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k > 0$, on a :

$$n - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k > 0 \iff \lambda < \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$$

D'où, en notant $z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$:

λ	0	z	$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$	‖ $+$	0	$-$
φ	‖ ↗	$\cdots$	↘

Conclusion : la fonction φ admet un maximum atteint en un seul réel z, avec $z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$.

- Comme φ admet un maximum en z, on a : $\forall \lambda > 0,\ \ \varphi(\lambda) \leq \varphi(z)$. Or, pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) \leq \varphi(z) &\iff \ln\left(L(\lambda)\right) \leq \ln\left(L(z)\right) && \text{stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_*^+ \\ &\iff L(\lambda) \leq L(z) \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction L admet un maximum atteint uniquement en z, où $z = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$.

8. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

8.a. Justifier que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, Z_n est un estimateur de λ. *La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.*

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On sait que :

- $(Y_1, ..., Y_n)$ est un n-échantillon de Y, suivant la loi exponentielle de paramètre λ (car $Y_1, ..., Y_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que Y),
- Z_n est une variable aléatoire fonction de $Y_1, ..., Y_n$,
- l'expression de Z_n ne fait pas mention de λ.

Par conséquent, Z_n est un estimateur de λ.

> **Conclusion :** pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, Z_n est un estimateur de λ.

8.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

On admet le résultat suivant :
Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X (ou f_Y) est bornée ; alors la variable aléatoire $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x - t) dt$$

En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

♣ Indication...
Avant de traiter cette question, il peut être utile de travailler la fiche sur la somme de variables aléatoires à densité, ici.

Par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$:
  $S_1 = Y_1$ et $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, d'où :
  $$\forall t \in \mathbb{R},\ f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$
  Et c'est exactement ce qui est fourni par l'énoncé dans le cas où $n = 1$... L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons que "S_n est à densité, de densité la fonction $f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$"
  et montrons que "S_{n+1} est à densité, de densité la fonction $f_{n+1} : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!} t^{n} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$".
  On a $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$. Puis :
  - ⋆ Y_{n+1} est à densité et, par hypothèse de récurrence, S_n également ;
  - ⋆ $Y_1, ..., Y_n, Y_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $Y_1 + ... + Y_n$ et Y_{n+1} le sont aussi ; autrement dit, S_n et Y_{n+1} sont indépendantes ;
  - ⋆ $Y_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, dont une densité est bornée sur $\mathbb{R}$.

  D'après le résultat énoncé, on en déduit que $S_n + Y_{n+1}$ est à densité, autrement dit, S_{n+1} est à densité, et admet pour densité la fonction f_{n+1} définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) dt \end{aligned}$$
  f_n est nulle sur $]-\infty; 0[$

  Soit ensuite $x \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :
  - ⋆ si $x < 0$:
    dans ce cas, pour tout $t \geq 0$, $x - t \leq 0$ et ainsi : $\forall t \geq 0,\ f_{Y_{n+1}}(x - t) = 0$.
    D'où : $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) dt = 0$.
    Conclusion : si $x < 0$, alors $f_{n+1}(x) = 0$.

⋆ si $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^{+\infty} f_n(t) f(x-t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} f_{Y_{n+1}}(x-t)\,dt \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} f_{Y_{n+1}}(x-t)\,dt && \forall t > x,\ f_{Y_{n+1}}(x-t) = 0 \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{x} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} f(x-t)\,dt && x \geq 0, \text{ donc pour tout } t \in [0;x],\ x-t \geq 0 \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)}\,dt \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^{x} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{e}^{\lambda t}\,dt \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^{x} t^{n-1}\,dt \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{x^n}{n} \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

Conclusion : si $x \geq 0$, alors $f_{n+1}(x) = \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

On a ainsi établi que S_{n+1} est à densité, de densité la fonction $f_{n+1} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par : $f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

8.c. Soit $n \geq 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$.

- Puisque f_{n-1} est une densité, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt$ est convergente et vaut 1. Or f_{n-1} est nulle sur $]-\infty;0[$...
  Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt = 1$.
- On a $Z_n = \dfrac{n}{S_n}$. Ensuite :
  ⋆ Par théorème de transfert, licite car $x \longmapsto \dfrac{n}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 :

Pourquoi ? Revoir les hypothèses du théorème de transfert dans le cas des variables aléatoires à densité...

Z_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\,dt$ est absolument convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\,dt$ est absolument convergente, car f_n est nulle sur $]-\infty;0[$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ est convergente, car l'intégrande est positive sur $\mathbb{R}_*^+$

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-2} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\lambda}{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\lambda}{n-1} f_{n-1}(t)\,dt$ est convergente

⋆ Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt$ est convergente, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\lambda}{n-1} f_{n-1}(t)\,dt$ également.

⋆ On en déduit que Z_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{n\lambda}{n-1} f_{n-1}(t)\,dt \\
&= \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt \\
&= \frac{n\lambda}{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion : Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n\lambda}{n-1}$.

☞ **Pour info...**
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \lambda$, Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de λ.

8.d. Déterminer un estimateur Z'_n de λ, exprimé en fonction de Z_n, dont l'espérance est égale à λ.

Posons $Z_n = \dfrac{n-1}{n} Z_n = \dfrac{n-1}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k}$. Ainsi :

- de la même façon que Z_n (question **8.a**), Z'_n est un estimateur de λ ;
- puisque Z_n admet une espérance, Z'_n également et, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z'_n) &= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(Z_n) \qquad \text{question précédente} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Conclusion : $\dfrac{n-1}{n} Z_n$ est un estimateur de λ d'espérance égale à λ.

☞ **Pour info...**
On a donc construit un estimateur sans biais de λ.

Si l'on souhaite poursuivre...

L'énoncé pourrait être allongé de trois questions...

8.e. Montrer que Z_n admet une variance égale à $\dfrac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2$.

8.f. En déduire que Z'_n admet une variance et la calculer.

8.g. Établir : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([|Z'_n - \lambda| \geq \varepsilon]\big) = 0$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★