Concours blanc 2 - Épreuve 1

Lundi 4 mars - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Être exigeant, c'est montrer de l'intérêt."
André Maurois

Exercice 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I – Un premier système différentiel

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\ker(A)$.
2. Calculer $A^2 + A$.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.
4. Justifier alors que A est diagonalisable puis donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
5. On considère le système différentiel

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & & & y & - & z \\ y' & = & x & & & - & z \\ z' & = & x & + & y & - & 2z \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5.a. Préciser les équilibres de ce système différentiel. Que dire du comportement des trajectoires en $+\infty$?

5.b. Résoudre le système différentiel (S_1).

5.c. Proposer une trajectoire non constante qui converge vers $(0, 0, 0)$.

5.d. Proposer une trajectoire non constante qui converge vers $(1, 1, 1)$.

Partie II – Un second système différentiel

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Démontrer que 2 est la seule valeur propre de la matrice B.
7. La matrice B est-elle diagonalisable ?
8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice B. On considère le vecteur $u_1 = (1, -1)$.

8.a. Soit $u \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $f(u) = 2u + u_1$ puis en donner une solution u_2 dont la première composante est égale à 1.

8.b. Justifier que $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

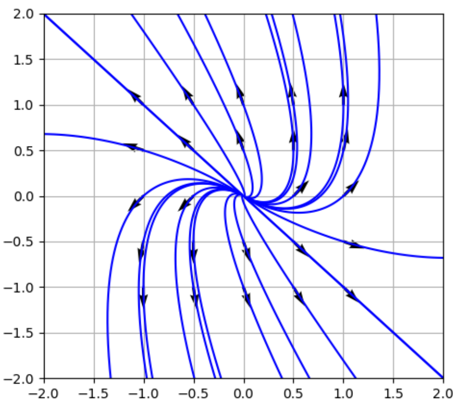
8.c. Donner la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}$, et donner également une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la résolution du système différentiel

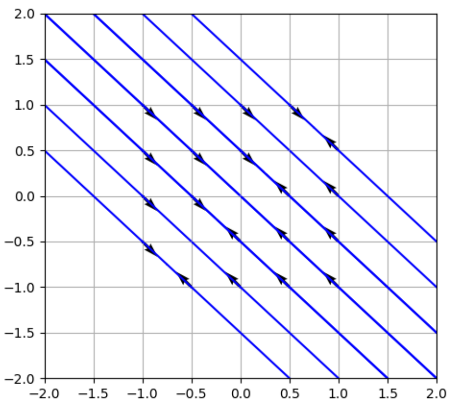
$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{ccccc} x' & = & x & - & y \\ y' & = & x & + & 3y \end{array} \right.$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

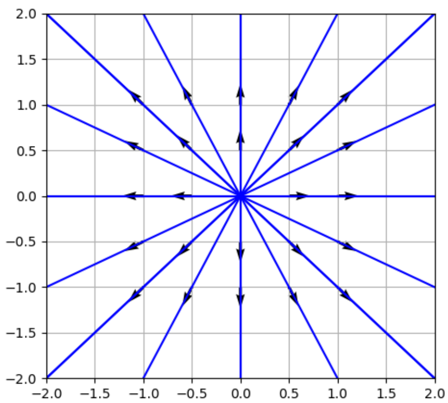
10. Quel résultat permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'une solution X de (S_2) telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La déterminer.
11. En détaillant soigneusement la réponse, préciser lequel des trois graphiques ci-dessous représente des trajectoires du système différentiel (S_2).



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x\mathrm{e}^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé du plan.

Partie I – Étude d'une suite de fonctions

Dans toute cette partie, l'entier naturel non nul n est fixé.

1. 1.a. Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   1.b. Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et préciser la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n, noté $f'_{n,d}(0)$.
2. 2.a. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0 par la gauche.
   2.b. Calculer, pour tout réel x non nul $f'_n(x)$, puis donner le tableau de variations de f_n.
3. Pour tous réels a et b, on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à $\mathcal{C}_n$ au voisinage de $+\infty$ lorsque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)-(ax+b) = 0$.
   3.a. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   3.b. En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$: $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   3.c. Démontrer alors que $\mathcal{C}_n$ admet une droite asymptote d_n au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dont on donnera une équation. Etudier la position relative de d_n et $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
4. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_1$ dans un repère du plan judicieusement choisi. On fera apparaître sur le graphique les différents résultats précédemment obtenus.

Partie II – Étude d'une suite

5. 5.a. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < u_n < 2n$.
   5.c. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = 1 \iff g(x) = n$, où $g : x \longmapsto x\ln(x)$.
   5.d. Démontrer que la fonction g est bijective sur $[1;+\infty[$ dans un intervalle à préciser. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   5.e. Justifier la relation, valable pour tout entier naturel non nul n : $\ln(u_n) + \ln\big(\ln(u_n)\big) = \ln(n)$, puis montrer : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
6. A l'aide des résultats de la question 5., recopier les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **suite_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-4} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def suite_u(n):
    a=...
    b=...
    while ...
        m=(a+b)/2
        if m*np.log(m)>n:
            ...
        elif ...
            ...
        else:
            a,b=m,m
    return (a+b)/2
```

7. En déduire un programme **Python** permettant de représenter les 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
8. 8.a. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   8.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
9. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$.
   9.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer : $u_{n+1} - u_n \leq I_n \leq (u_{n+1} - u_n)\mathrm{e}^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
   9.b. En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   9.c. Déduire des questions précédentes que la série de terme général I_n est divergente.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda|x|e^{-\lambda x^2}$.

1. 1.a. Montrer que la fonction f est paire.

   1.b. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et la calculer.

   1.c. Montrer enfin que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2. 2.a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est convergente.

   2.b. En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.

3. 3.a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2f(x)dx$ est convergente et la calculer.

   3.b. En déduire que la variable aléatoire X possède une variance et donner sa valeur.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

   4.a. Donner l'expression de la fonction de répartition de Y, notée F_Y, à l'aide de celle de la variable aléatoire de X, notée F_X.

   4.b. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité, notée f_Y, puis vérifier que Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   4.c. Retrouver alors la valeur de $\mathbb{V}(X)$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$. On pose $W = \dfrac{-1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire W.

6. 6.a. Déduire des questions précédentes une fonction **Python** d'en-tête `def simulAbsX(lam)` qui simule une réalisation de $|X|$ où $\lambda =$`lam`.

   6.b. Justifier que $\mathbb{P}([X < 0]) = \mathbb{P}([X \geq 0]) = \dfrac{1}{2}$.

   6.c. En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX(lam)` qui simule une réalisation de X où $\lambda =$`lam`.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère n variables aléatoires Y_1,...,Y_n, supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

7. On considère des réels x_1,...,x_n strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[,\ L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

   7.a. Exprimer, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$, $L(\lambda)$, puis $\ln\big(L(\lambda)\big)$ en fonction de λ, x_1,...,x_n.

   7.b. On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0, +\infty[$ par : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

   Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de x_1,...,x_n. Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

8. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k}$.

   On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   8.a. Justifier que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, Z_n est un estimateur de λ. *La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.*

   8.b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   On admet le résultat suivant :
   Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_X et f_Y telles que f_X (ou f_Y) est bornée ; alors la variable aléatoire $X + Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X + Y$ est donnée par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

   En utilisant la propriété admise, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

   8.c. Soit $n \geq 2$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$.

   8.d. Déterminer un estimateur Z'_n de λ, exprimé en fonction de Z_n, dont l'espérance est égale à λ.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★