Concours blanc 2 - Épreuve 1

Lundi 4 mars - 4h00

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- ***la copie devra présenter une en-tête d'au moins une demi-page ainsi qu'une marge suffisante,***
- ***toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,***
- ***les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),***
- ***les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.***

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet est à rendre avec la copie.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

"Être exigeant, c'est montrer de l'intérêt."
André Maurois

Exercice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $AB - BA$.
2. Déterminer une base de $\ker(A)$.
3. Calculer $A^2 + A$.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.
5. Justifier alors que A est diagonalisable puis donner une matrice $D_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PD_1P^{-1}$.
6. Calculer BP. En déduire une matrice $D_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $B = PD_2P^{-1}$.
7. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = A + tB$ et on considère le système différentiel

$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{ccccccc} x'(t) & = & tx(t) & + & (1+t)y(t) & - & (1+t)z(t) \\ y'(t) & = & (1+t)x(t) & + & ty(t) & - & (1+t)z(t) \\ z'(t) & = & (1+t)x(t) & + & (1+t)y(t) & - & (2+t)z(t) \end{array} \right.$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

7.a. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Établir :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = P\Delta(t)P^{-1}$$

7.b. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Établir : $\big(y' - ty = 0\big) \iff \big(\exists \alpha \in \mathbb{R} \ / \ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \alpha e^{\frac{t^2}{2}}\big)$. On pourra considérer la fonction $t \longmapsto y(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$.

7.c. Résoudre alors le système différentiel (S).

Problème

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.

Les parties **I** et **II** sont largement indépendantes. La partie **III** est indépendante des parties **I** et **II**.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right.$$

1. 1.a. Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

   1.b. Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} f_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$$

   1.c. Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_*^+$.

   1.d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. 2.a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)dx$ et calculer sa valeur.

   2.b. En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_*^+$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

   3.a. Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

   3.b. Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

   3.c. Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

   3.d. Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

   3.e. En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left(Y^r\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^r\right)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi que X.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs vérifiant :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 a_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 b_n = 0$$
On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $M_n = \min_{1\leq k\leq n}(X_k)$ et $J_n = \dfrac{M_n - b_n}{a_n}$.
On admet que M_n et J_n sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question 3.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$ et $S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T+Z$ est à densité et admet pour densité la fonction f_{T+Z} définie pour tout x réel par :
$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y)\,dy$$

5. 5.a. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n est à densité et admet pour densité la fonction g_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5.b. On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité. Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

6. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$.
On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\forall \lambda > 0,\ H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$
Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

7. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{X_k}}$.

7.a. Justifier que λ_n^* est un estimateur de λ. Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

7.b. Construire à partir de λ_n^* un estimateur $\widehat{\lambda}_n$ de λ tel que $\mathbb{E}(\widehat{\lambda}_n) = \lambda$. Calculer $\mathbb{V}(\widehat{\lambda}_n)$.

7.c. Établir : $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\widehat{\lambda}_n - \lambda| \geq \varepsilon]\right) = 0$.

Partie III : Loi à 2 paramètres.

8. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{(\lambda;\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

8.a. Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ (loi de Weibull de paramètre (λ, α)).

8.b. On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

8.c. Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

8.d. En déduire une fonction **`Python`** permettant de simuler W.

9. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_*^+$. On note F_K la fonction de répartition de K. On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln\left(1 - F_K(x)\right)$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la fonction dérivée de R.

9.a. On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés (i) et (ii) suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

9.b. Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées.

9.b.i. Soit $x > 0$. Exprimer $F_K(x)$ en fonction de $r(x)$ puis établir :

$$R'(x) = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$

9.b.ii. Démontrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$.

Dans les questions 10 et 11, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

10. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

10.a. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.

En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

10.b. Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

10.c. On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1\leq k\leq n}(w_k)$.

Montrer que $1 \leq n_0 \leq n-1$.

10.d. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

10.e. Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$)

10.f. En déduire que sur $\mathbb{R}_*^+$ l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

11. On note $(W_1, \ldots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question 8 dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \ldots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.

Soit G la fonction de $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

11.a. Montrer que la fonction G admet un unique point critique $\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}\right)$ sur $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$.

11.b. Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $\left(\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}\right)$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★