On s'intéresse dans ce problème à l'énergie d'un graphe qui est définie à partir de l'énergie de sa matrice d'adjacence.

L'énergie d'un graphe a été introduite en 1978 par Ivan Gutman. Ce n'est qu'à partir des années 2000 que des recherches approfondies sur cette notion ont été entreprises.

Aujourd'hui plus de deux articles par semaine sont publiés sur l'énergie des graphes avec de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes et un bref aide-mémoire `Python` se trouve en fin de sujet.
Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que la notation $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est analogue à la notation $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Un problème intéressant mêlant graphes et matrices. Une bonne connaissance du cours sur les matrices était nécessaire (LE COURS, LE COURS, LE COURS) !
Sujet très calculatoire par ailleurs, avec beaucoup de manipulations d'inégalités.
Quelques lourdeurs par endroits, dues à de nombreux résultats intermédiaires fournis...
Un sujet sur lequel s'entraîner puisqu'il contient suffisamment de questions et méthodes classiques !

☞ Pour info...
Répartition des points de barème :
- partie 1 : 19%
- partie 2 : 17%
- partie 3 : 64%

Le 20/20 était à 60% des points de barème.

Partie 1 – Énergie et trace d'une matrice

1. Soit A une matrice carrée symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $P^{-1}AP$?

   Puisque A est symétrique à coefficients réels, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   - P est inversible,
   - D est diagonale constituée des valeurs propres de A,
   - $A = PDP^{-1}$, donc $D = P^{-1}AP$.

   Par conséquent, $P^{-1}AP$ est diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

► *En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, on pose alors $\mathcal{E}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, on nomme ce réel positif l'énergie de A. On admet que cette somme ne dépend pas du choix de P.*

♡ L'avis du chef ! ♡
On pourrait s'attendre, de la part d'un tel sujet, davantage de soin dans la présentation des énoncés. A la formulation "montrer que ... si ...", on préfère, de très loin, la formulation "montrer que si ... alors ...".

2. Montrer que $\mathcal{E}(A) = 3$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Supposons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminons ses valeurs propres afin de calculer son énergie.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$$
   Or :
   $$\begin{aligned}
   \mathrm{rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) && \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + (1-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda+\lambda^2 & -1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda+\lambda^2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right)
   \end{aligned}$$

☞ Rappel...
Le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

   Or, la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda+\lambda^2 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ est triangulaire ; elle est donc non inversible si, et seulement si, elle possède au moins un coefficient diagonal nul.
   Par conséquent :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \begin{cases} -2-\lambda+\lambda^2 & = 0 \\ \text{ou} & \\ -\lambda & = 0 \end{cases}$$

♣ Méthode !
On aurait également pu faire autrement en remarquant que :
- 0 est valeur propre de A, car A n'est pas inversible...
- -1 est valeur propre de A, car la somme des coefficients de chaque ligne vaut -1 (et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé)
- pour trouver la dernière, on utilise le fait que A est diagonalisable (car symétrique), donc la dernière VP s'obtient en utilisant que la somme des 3 VP égale la somme des coefficients diagonaux de la matrice (on en reparle juste un peu plus loin...) : donc 2 est VP. Il reste à le démontrer par contre (en exhibant un $\overrightarrow{VP}$ par exemple).

$$\iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = 2 \\ \text{ou} \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 0; 2\}$$

Conclusion : $\mathcal{E}(A) = |-1| + |0+| + |2| = 3$.

3. Écrire une fonction **Python** **energie(A)** qui renvoie l'énergie de la matrice symétrique représentée par le tableau **numpy A**.

Proposons le programme suivant :

Important ! Le sujet contient un aide-mémoire **Python**, il est indispensable d'aller le lire à chaque question **Python** !

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def energie(A):
    S=al.eigvals(A)
    E=sum(np.abs(S))
    return E
```

▶ *Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$ par :*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

4. Notons $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

4.a. Montrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i}$.

Notons $C = AB$ et posons $C = (c_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$. Par définition de la multiplication matricielle, on a :

$$\forall i,j \in [\![1;n]\!],\ \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(C) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \\ &= \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}b_{k,i} \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,i}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{j,i}$.

4.b. En déduire que : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}({}^t\!AA) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$.

Que peut-on dire de A si $\mathrm{tr}({}^t\!AA) = 0$?

- Notons $D = BA$ et posons $D = (d_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$. Par définition de la multiplication matricielle, on a :

$$\forall i,j \in [\![1;n]\!],\ \ d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(BA) &= \mathrm{tr}(D) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}\\
&= \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} b_{i,k}a_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}b_{i,k} && \text{les indices des sommes sont muets}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} && \text{question précédente}\\
&= \operatorname{tr}(AB)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

- Prenons $B = {}^tA$. Dans ce cas :
$$\forall i,j \in [\![1;n]\!],\ b_{i,j} = a_{j,i}$$
D'où, d'après la question précédente :
$$\operatorname{tr}(A{}^tA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$$
Et comme, d'après le point précédent, on a $\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(A{}^tA)$, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$.

- Supposons $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$.
Ainsi, d'après le point précédent :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$$
Or :
  - ⋆ $\forall i,j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j}^2 \geqslant 0$
  - ⋆ une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls.

Par conséquent :
$$\forall i, \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j}^2 = 0$$
et donc :
$$\forall i, \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = 0$$

Conclusion : si $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$, alors $A = 0_n$.

Petite remarque
La réciproque est trivialement vraie...

4.c. Si A et B sont semblables, montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
Supposons que A et B sont semblables.
Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que nous considérons ensuite, telle que $A = PDP^{-1}$.
Ainsi :
$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}\big((P^{-1}B)P\big)\\
&= \operatorname{tr}\big(P(P^{-1}B)\big) && \text{premier point de la question précédente}\\
&= \operatorname{tr}(B)
\end{aligned}$$

Conclusion : si A et B sont semblables, alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

★ Classique ! ★
Toutes les questions de cette question 4 sont classiques et à savoir refaire. En appro, la trace d'une matrice est au programme et donc ces questions ne sont que des questions de cours. En appli, elles permettent d'évaluer les candidats et candidats sur leur bonne connaissance du cours sur les matrices.

5. Dans cette question $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique et on utilise les notations de la question 1.

5.a. Montrer que $\big|\operatorname{tr}(A)\big| \leqslant \mathcal{E}(A)$.
Puisque A est symétrique, elle est diagonalisable, donc semblable à une matrice diagonale D, où les éléments diagonaux de D sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Ainsi :

- par définition de la trace, $\operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$,
- d'après la question 4.c : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D)$.

D'où :

$$\left|\mathrm{tr}(A)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right| \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|}_{=\mathcal{E}(A)}$$

inégalité triangulaire

Conclusion : $\left|\mathrm{tr}(A)\right| \leqslant \mathcal{E}(A)$.

5.b. Justifier que $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^2) &= \mathrm{tr}\left((PDP^{-1})^2\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(PDP^{-1}PDP^{-1}\right) \\
&= \mathrm{tr}(PD^2P^{-1}) \\
&= \mathrm{tr}(D^2) && \text{question 4.c} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 && D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ donc } D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

6. Dans la console **Python**, on obtient :

```
>>> energie(3*np.eye(3)-np.ones([3,3]))
6.0
```

6.a. Déterminer quelle est la matrice A associée au tableau `3*np.eye(3)-np.ones([3,3])`.

La commande `3*np.eye(3)-np.ones([3,3])` désigne la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.b. En calculant $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^2)$ et en déterminant une valeur propre de A, expliciter son spectre et retrouver son énergie.

- $\mathrm{tr}(A) = 6$,
- on trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{tr}(A^2) = 18$,
- on remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 0 est valeur propre de A.

À retenir...
Par définition du produit matriciel, $aC_1 + bC_2 + cC_3 = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, où C_1, C_2, C_3 sont les colonnes de A. Or, ici, on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{3,1}$...

Puisque A est symétrique, elle est diagonalisable. On sait déjà que 0 est valeur propre de A, donc coefficient diagonal de D. Notons λ et μ les deux autres coefficients diagonaux de D.
D'après les questions 5.b et ce qui a été fait en question 5.a :

$$\mathrm{tr}(A) = 0 + \lambda + \mu \quad ; \quad \mathrm{tr}(A^2) = 0^2 + \lambda + \mu^2$$

Important !
L'énoncé mentionne clairement qu'il faut utiliser $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{tr}(A^2)$ et la VP déjà trouvée. Aucun point ne serait attribué pour la mise en place d'une méthode n'utilisant pas ces informations.

Mais $\mathrm{tr}(A) = 6$ et $\mathrm{tr}(A^2) = 18$ et :

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A) = 6 \\ \mathrm{tr}(A^2) = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ \lambda^2 + \mu^2 = 18 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda = 6 - \mu \\ (6-\mu)^2 + \mu^2 = 18 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda = 6 - \mu \\ 2\mu^2 - 12\mu + 18 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda = 6 - \mu \\ \mu^2 - 6\mu + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 6-\mu \\ (\mu-3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients diagonaux de D sont 0, 3 et 3.

> **Conclusion :** $\mathrm{Sp}(A) = \{0; 3\}$ et donc $\mathcal{E}(A) = 6$ (on retrouve l'énergie fournie par la commande `Python` au début de la question 6).

✘ Attention !
L'énergie est la somme des valeurs absolues des VP, **comptées avec leur multiplicité** !

Partie 2 - Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

- Soit $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique et A une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
  On définit $U \star A$ la matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on peut naturellement représenter ainsi $\begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).
- Par exemple, si $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $U \star A = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 0_3 \end{pmatrix}$ par blocs d'où $U \star A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0_3 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).
- Si X est une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$.
  On admet qu'alors la matrice colonne $(U \star A)\,X$ de $\mathcal{M}_{2n,1}$ est égale à $\begin{pmatrix} uAX_1 + vAX_2 \\ vAX_1 + wAX_2 \end{pmatrix}$.

7. 7.a. Écrire une fonction **Python** **prod2K(u,v,w,A)** qui étant donné $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ et A représentée par un tableau **numpy**, renvoie $U \star A$ sous la forme d'un tableau **numpy**. Proposons le programme suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def prod2K(u,v,w,A):
    n,n=np.shape(A)
    M=np.zeros([2*n,2*n])
    M[0:n,0:n]=u*A
    M[0:n,n:2*n]=v*A
    M[n:2*n,0:n]=v*A
    M[n:2*n,n:2*n]=w*A
    return M
```

☞ Rappels...
- Les tableau **numpy** sont numérotés comme les listes : à partir de 0 !
- La commande **M[i,j]** renvoie le coefficient (i,j) du tableau **M**.
- La commande **M[:,j]** renvoie, sous forme de tableau, la j-ième colonne du tableau **M**.
- La commande **M[a:b,j]** renvoie, sous forme de tableau, les coefficients a à $b-1$ de la j-ième ligne du tableau **M**.

On peut également proposer le programme suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def prod2K(u,v,w,A):
    n,n=np.shape(A)
    M=np.zeros([2*n,2*n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i,j]=u*A[i,j]
```

```
                M[i,j+n]=v*A[i,j]
                M[i+n,j]=v*A[i,j]
                M[i+n,j+n]=w*A[i,j]
    return M
```

7.b. Compléter le code suivant s'affichant dans la console **Python** :

```
>>> prod2K(...,-1,...,...)
array([[-2.,   1.,   2.,  -1.],
       [ 1.,  -2.,  -1.,   2.],
       [ 2.,  -1.,  -4.,   2.],
       [-1.,   2.,   2.,  -4.]])
```

> **Conclusion :** `prod2K(1,-1,2,np.array([[-2,1],[1,-2]]))`.

8. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de U pour la valeur propre γ et X un vecteur propre de A pour μ. On pose $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$.

Petite remarque

Pour davantage de cohérence, j'ai choisi de changer de lettre pour désigner la VP associée à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Il était écrit λ dans l'énoncé ; alors qu'en question 9, on choisit plutôt γ...

8.a. Établir l'égalité : $(U \star A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$. En notant $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
(U \star A)Y &= \begin{pmatrix} uAY_1 + vAY_2 \\ vAY_1 + wAY_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} uaAX + vbAX \\ vaAX + wbAX \end{pmatrix} \qquad Y_1 = aX \text{ et } Y_2 = bX \\
&= \begin{pmatrix} ua\mu X + vb\mu X \\ va\mu X + wb\mu X \end{pmatrix} \qquad X \text{ est vecteur propre de } A \text{ pour la valeur propre } \mu, \text{ donc } AX = \mu X \\
&= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $(U \star A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$.

8.b. Montrer que Y est un vecteur propre de $U \star A$ et préciser pour quelle valeur propre.

♣ Méthode !

Pour montrer que Z est $\overrightarrow{\text{VP}}$ d'une matrice M, il faut :
- montrer que $Z \neq 0$,
- montrer l'existence d'un réel α tel que $MZ = \alpha Z$.

- Puisque X est vecteur propre de A, $X \neq 0_{n,1}$.
  Et puisque $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0_{2,1}$, donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
  Par conséquent :
  $$aX \neq 0_{n,1} \text{ ou } bX \neq 0_{n,1}$$
  D'où :
  $$Y \neq 0_{2n,1}$$
- On sait que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U pour la valeur propre γ. D'où :
  $$U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
  Autrement dit :
  $$\begin{pmatrix} ua + vb \\ va + wb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a \\ \gamma b \end{pmatrix}$$
  Ainsi, d'après la question précédente :
  $$(U \star A)Y = \mu \begin{pmatrix} \gamma aX \\ \gamma bY \end{pmatrix}$$
  Autrement dit :
  $$(U \star A)Y = \mu\gamma Y$$

> **Conclusion :** Y est un vecteur propre de $U \star A$ associé à la valeur propre $\gamma\mu$.

9. 9.a. Justifier l'existence d'une base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et d'une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propres de U et de A respectivement.

- Puisque U est symétrique à coefficients réels, elle est diagonalisable. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de U.

- Puisque A est symétrique à coefficients réels, elle est diagonalisable. Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

▶ *On note γ_1 et γ_2 les valeurs propres associée à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et $\mu_1, \dots, \mu_n$ celles associées à $X_1, \dots, X_n$ respectivement.*

On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$.

9.b. Montrer que la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n \in \mathbb{R}$. Supposons $\alpha_1 Y_1 + \beta_1 Z_1 + \dots + \alpha_n Y_n + \beta_n Z_n = 0_{2n,1}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 Y_1 + \beta_1 Z_1 + \dots + \alpha_n Y_n + \beta_n Z_n = 0_{2n,1} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a\alpha_i X_i + c\beta_i X_i) = 0_{n,1} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b\alpha_i X_i + d\beta_i X_i) = 0_{n,1} \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a\alpha_i + c\beta_i) X_i = 0_{n,1} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (b\alpha_i + d\beta_i) X_i = 0_{n,1} \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [\![1; n]\!], \ a\alpha_i + c\beta_i = 0 \\ \forall i \in [\![1; n]\!], \ b\alpha_i + d\beta_i = 0 \end{array} \right. \\
&\implies \forall i \in [\![1; n]\!], \ \alpha_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta_i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0_{2,1} \\
&\implies \forall i \in [\![1; n]\!], \ \alpha_i = \beta_i = 0
\end{aligned}$$

la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (car une base)

la famille $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ est libre dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (car une base)

> **Conclusion :** la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre.

9.c. En déduire que $U \star A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

- D'une part, la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est une famille de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ qui est :
  - ✓ libre d'après la question précédente,
  - ✓ de cardinal $2n$ égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})\right)$.

  Conclusion : la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.
- D'autre part, on sait que :
  - ✓ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est vecteur propre de U associé à la valeur propre γ_1,
  - ✓ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i est vecteur propre de A associé à la valeur propre μ_i,
  - ✓ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$.

  Ainsi, d'après la question 8.b, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, Y_i est vecteur propre de $U \star A$ associé à la valeur propre $\gamma_1\mu_i$.
  De la même façon, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, Z_i est vecteur propre de $U \star A$ associé à la valeur propre $\gamma_2\mu_i$.

Par conséquent, il existe une base de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $U \star A$; donc $U \star A$ est diagonalisable.

> **Conclusion :** $U \star A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres de la base exhibée, c'est-à-dire les réels $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

9.d. En conclure que $\mathcal{E}(U \star A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

Par définition de l'énergie d'une matrice :

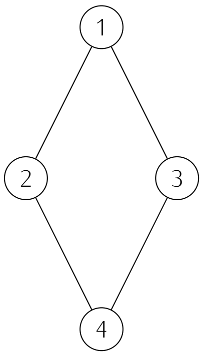
$$\mathcal{E}(U \star A) = \sum_{i=1}^{n} \left(|\gamma_1\mu_i| + |\gamma_2\mu_i| \right) \quad ; \quad \mathcal{E}(U) = |\gamma_1| + |\gamma_2| \quad ; \quad \mathcal{E}(A) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$$

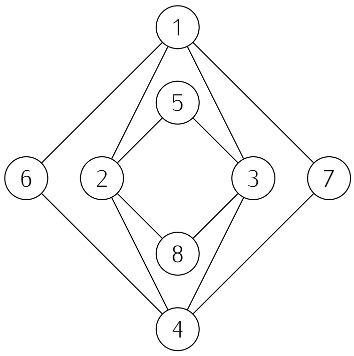
D'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A) &= \left(|\gamma_1| + |\gamma_2| \right) \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \\
&= |\gamma_1| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| + |\gamma_2| \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(|\gamma_1\mu_i| + |\gamma_2\mu_i| \right) \\
&= \mathcal{E}(U \star A)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{E}(U \star A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

10. Un exemple. On considère un graphe G_n non orienté et sans boucle, dont les sommets sont $1, \dots, n$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}_n$. On définit le graphe G_{2n} dont les sommets sont $1, \dots, 2n$ et les arêtes sont celles de G_n ainsi que, pour toute arête $\{i, j\} \in \mathcal{A}_n$, les arêtes $\{i+n, j\}$ et $\{i, j+n\}$.
Voici un exemple de représentation de G_4 et G_8 :





On note A_n et A_{2n} les matrices d'adjacence de G_n et G_{2n}.

10.a. Déterminer U telle que $A_{2n} = U \star A_n$.

Puisque G_n et G_{2n} sont d'ordre n et $2n$ respectivement, on a :

$$A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad ; \quad A_{2n} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

Considérons $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad \text{(écriture pas blocs)}$$

Ensuite :

- puisque les arêtes de G_n sont des arêtes de G_{2n} et qu'aucune autre arête en les sommets $1, \dots, n$ n'est ajoutée, on a déjà :
$$B_1 = A_n$$
- on sait que, pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, $\{i, j+n\}$ est une arête de G_{2n} si, et seulement si, $\{i, j\}$ est une arête de G_n, donc :
$$B_2 = A_n$$
- on sait que, pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$, $\{i+n, j\}$ est une arête de G_{2n} si, et seulement si, $\{i, j\}$ est une arête de G_n, donc :
$$B_3 = A_n$$
- aucune arête n'est créée entre les sommets $n+1, \dots, 2n$, donc :
$$B_4 = 0_n$$

D'où :

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \star A_n \end{aligned}$$

Conclusion : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A_{2n} = U \star A_n$.

10.b. En déduire que $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\mathcal{E}(A_n)$.

Commençons par remarquer que les matrices A_n et A_{2n} sont symétriques, comme matrices d'adjacence de graphes non orientés ; et que U est également symétrique. Le contexte de l'énoncé est donc respecté.

Pourquoi ?
De façon assez surprenante, le produit de Kronecker et l'énergie d'une matrice n'ont été définis que pour des matrices symétriques...

- On sait que $A_{2n} = U \star A_n$, où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; donc, d'après la question **9.d** :

$$\mathcal{E}(A_{2n}) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A_n)$$

- Déterminons les valeurs propres de U.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(U) &\iff \left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \right) \\
&\iff \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \\
&\iff -\lambda(1-\lambda) - 1 = 0 \\
&\iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathrm{Sp}(U) = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(U) &= \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| + \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| && \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\
&= -\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\mathcal{E}(A_n)$.

Partie 3 – Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

Soit m, n et p des entiers tels que $m \geqslant 1$ et $n \geqslant p \geqslant 2$.
On suppose dans cette partie de $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$, non orienté, sans boucle, à n sommets $1, \dots, n$, à m arêtes et $n-p$ sommets isolés, c'est-à-dire de degré 0.
On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$.

11. 11.a. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$.

- Si k est un sommet isolé, alors :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,k} = 0 \quad ; \quad \forall j \in [\![1;n]\!],\ a_{k,j} = 0$$

D'où :

$$\forall (i,j) \notin I^2,\ a_{i,j} = 0$$

Par conséquent :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}$$

✘ Attention !
Il se peut que $a_{i,j} = 0$, même si $(ij) \in I^2$. Il n'y a qu'une implication :

$$(i,j) \notin I^2 \implies a_{i,j} = 0$$

Il est possible que $a_{1,2} = 0$ sans que les sommets 1 et 2 soient isolés…

- Ensuite, d'après la formule d'Euler, puisque le graphe $G(A)$ est non orienté :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(i) = 2m$$

Or :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \deg(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

Par conséquent :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = 2m$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$.

11.b. Établir que : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p-1$.

Commençons déjà par remarquer que p est le nombre de sommets non isolés ; autrement dit :

$$p = \text{Card}(I)$$

Ensuite :

- d'après la question précédente :

$$\sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} &= \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i=j}} a_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} a_{i,j} + \sum_{i\in I} a_{i,i} && G(A) \text{ est sans boucle, donc : } \forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} = 0 \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} a_{i,j} && \textbf{en supposant le graphe sans arête multiple : } \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} \leqslant 1 \\
&\leqslant \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} 1
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} 1 &= \text{Card}\left(\left\{(i,j) \in I^2 \ / \ i \neq j\right\}\right) \\
&= \text{Card}(I^2) - \text{Card}(I) \\
&= p^2 - p
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$2m \leqslant p^2 - p$$

Conclusion : puisque $p > 0$ (car $p \geqslant 2$), on obtient :

$$\frac{2m}{p} \leqslant p - 1$$

- d'après la question précédente :

$$\sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} &= \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} a_{i,j} && \text{pour tout } i \in I,\ i \text{ est non isolé, donc il existe au moins un } j \\
&\geqslant \sum_{i\in I} 1 && \text{tel que } a_{i,j} = 1 \text{ et ainsi } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geqslant 1
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i\in I} 1 = \text{Card}(I) = p$$

Par conséquent :

$$2m \geqslant p$$

Conclusion : puisque $p > 0$ (car $p \geqslant 2$), on obtient :

$$\frac{2m}{p} \geqslant 1$$

Conclusion : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p-1$.

Important !

Vue la structure des questions, il est normal de déduire le résultat voulu de la question précédente...

✘ Attention !

Il manquait l'hypothèse "sans arête multiple" pour le graphe $G(A)$. Il fallait donc considérer que $G(A)$ est un graphe simple (sans boucle ni arête multiple). L'inégalité demandée est fausse sinon : il suffit de considérer un graphe d'ordre 3 contenant 5 arêtes entre les sommets 1 et 2. On aurait alors $p = 2$ et $m = 5$...

Autre méthode...

Remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{2m}{p} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \deg(i)}{p} \\ &= \frac{\sum\limits_{i\in I} \deg(i)}{p}\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{2m}{p}$ est le degré moyen des sommets de I.

Or, chaque sommet de I est :

- non isolé, donc de degré au moins 1 ;
- relié au plus aux $p-1$ autres sommets non isolés et donc, en supposant que le graphe est sans arête multiple, est de degré au plus $p-1$.

Par conséquent, chaque sommet non isolé est de degré compris entre 1 et $p-1$. Ainsi, la moyenne des degrés des sommets non isolés est également comprise entre 1 et $p-1$.

Conclusion : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p-1$.

12. 12.a. Justifier qu'il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.

- Puisque $G(A)$ est non orienté, sa matrice d'adjacence A est symétrique.
  Par conséquent, A est diagonalisable. Il existe donc deux matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
  - ⋆ P est inversible,
  - ⋆ D est diagonale constituée des valeurs propres de A,
  - ⋆ $A = PDP^{-1}$, donc $D = P^{-1}AP$.

  Par conséquent, $P^{-1}AP$ est diagonale.
- Si $P^{-1}AP$ était nulle, alors on aurait $PP^{-1}APP^{-1}$ qui serait également nulle ; autrement dit, A serait nulle et donc $G(A)$ n'aurait que des sommets isolés : absurde car $p \geqslant 2$.

Conclusion : il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.

► Dans la suite, on note D cette matrice diagonale.

12.b. En déduire que $\mathrm{tr}(D) = 0$, $\mathrm{tr}(D^2) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 2m$.

- Puisque A et D sont semblables, en débutant avec la question 4.c :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(D) &= \mathrm{tr}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} && G(A) \text{ est sans boucle, donc : } \forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} = 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{tr}(D) = 0$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}D^2 &= (P^{-1}AP)^2 \\ &= P^{-1}APP^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^2P\end{aligned}$$

Donc D^2 et A^2 sont semblables et ainsi, en débutant avec la question 4.c :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(D^2) &= \mathrm{tr}(A^2) && G(A) \text{ est non orienté, donc } A \text{ est symétrique, d'où : } {}^tA = A \\ &= \mathrm{tr}({}^tAA) && \text{question 4.b} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 && \text{pour tous } i,j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} = 0, \text{ donc } a_{i,j}^2 = a_{i,j} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} && \text{question 11.a} \\ &= 2m\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{tr}(D^2) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 2m$.

▶ *On suppose dans la suite que P est telle que les éléments diagonaux de D, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient : $|\lambda_1| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$. On pose $\theta = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$.*

13. 13.a. Soit k un sommet isolé. Montrer que $E_k \in \ker(A)$.
En déduire que $\dim\big(\ker(A)\big) \geqslant n - p$ puis que, si $p < n$, alors $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

- Par définition du produit matriciel, la matrice AE_k est égale à la k-ième colonne de la matrice A. Autrement dit :
$$AE_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$$
Or le sommet k est isolé, donc :
$$\forall i \in [\![1; n]\!], \ a_{i,k} = 0$$
Par conséquent :
$$AE_k = 0_{n,1}$$

Conclusion : $E_k \in \ker(A)$.

- D'après le point précédent :
$$\forall k \notin I, \ E_k \in \ker(A)$$
Par conséquent, la famille $(E_k)_{k \notin I}$ est une famille de $\ker(A)$ qui est libre, comme sous-famille d'une famille libre (sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
D'où :
$$\dim\big(\ker(A)\big) \geqslant \mathrm{Card}\big((E_k)_{k \notin I}\big)$$
Or :
$$\mathrm{Card}\big((E_k)_{k \notin I}\big) = n - \mathrm{Card}(I) = n - p$$

Conclusion : $\dim\big(\ker(A)\big) \geqslant n - p$.

☞ Rappels...
Soit E un EV de dimension finie.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$

- Supposons $p < n$.
D'après ce qui précède :
$$\dim\big(\ker(A)\big) \geqslant n - p > 0$$
Par conséquent, 0 est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension au moins $n - p$. Ainsi, la valeur propre 0 apparaît au moins $n - p$ fois dans les coefficients diagonaux de D. Puisque ces coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant de leur valeur absolue, on en déduit que les (au moins) $n - p$ derniers sont nuls. D'où le résultat.

Petite remarque
On est peut-être un peu à la limite du programme avec ces arguments...

Conclusion : si $p < n$, alors $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

13.b. Montrer que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$ puis que $0 < \theta \leqslant \sqrt{2m}$.

- Puisque $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ et donc :
$$\mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$
Distinguons ensuite deux cas :
  - ⋆ si $p = n$:
$$\mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$$
  - ⋆ si $p < n$:
$$\mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 + \sum_{i=p+1} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$$
question précédente : $\forall i \geqslant p+1, \ \lambda_i = 0$

Dans les deux cas :
$$\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$$
Or, d'après la question 12.b :
$$\operatorname{tr}(D^2) = 2m$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$.

- ⋆ Raisonnons par l'absurde et supposons que $\theta \leqslant 0$.
  Puisque $\theta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k$, on obtient dans ce cas :
  $$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k \leqslant 0$$
  Or, d'après la question 12.a, D n'est pas la matrice nulle. Il existe au moins un des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qui soit non nul, et donc strictement négatif.
  Par conséquent :
  $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k < 0$$
  Autrement dit :
  $$\operatorname{tr}(D) < 0 \quad : \quad \text{absurde d'après la question 12.b}$$
  Conclusion : $\theta > 0$.

  ⋆ D'après ce qui précède :
  $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$$
  Puisque $\theta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k$ et que $\theta > 0$, on a même, que $p = n$ ou $p < n$:
  $$\theta = \max_{1\leqslant k\leqslant p} \lambda_k$$
  Ainsi, il existe $k_0 \in [\![1;n]\!]$, que nous considérons ensuite, tel que $\theta = \lambda_{k_0}$. D'où :
  $$\theta^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} \lambda_k^2 = 2m$$
  Or $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} \lambda_k^2 \geqslant 0$, d'où :
  $$\theta^2 \leqslant 2m$$
  Puis, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$:
  $$|\theta| \leqslant \sqrt{2m}$$
  Or, d'après le point précédent, $\theta > 0$, donc $|\theta| = \theta$. **Conclusion :** $\theta \leqslant \sqrt{2m}$.

Conclusion : $0 < \theta \leqslant \sqrt{2m}$.

✘ Attention !
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|$

13.c. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_r$ des réels. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} 2x_ix_j \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} \left(x_i^2 + x_j^2\right)$.

En déduire que $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right)$.

- On a :
  $$\forall i,j \in [\![1;r]\!],\ (x_i - x_j)^2 \geqslant 0$$
  D'où, en développant :
  $$\forall i,j \in [\![1;r]\!],\ x_i^2 + x_j^2 - 2x_ix_j \geqslant 0$$
  Autrement dit :
  $$\forall i,j \in [\![1;r]\!],\ 2x_ix_j \leqslant x_i^2 + x_j^2$$
  En sommant pour $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, licite car il s'agit d'une somme double finie, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} 2x_ix_j \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} \left(x_i^2 + x_j^2\right)$.

★ Classique ! ★
Cette inégalité est très classique :
$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ 2xy \leqslant x^2 + y^2$$
Elle sert, entre autres, dans le chapitre sur les couples de variables aléatoires pour démontrer que si X et Y sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance, et donc $\operatorname{Cov}(X,Y)$ existent.

- On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\left(x_i \sum_{j=1}^{r} x_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} x_i x_j \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} x_i x_j \qquad \text{point précédent} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}\left(x_i^2 + x_j^2\right)
\end{aligned}$$

Petite remarque

Je détaille ces premières lignes pour celles et ceux qui ne sont pas habitués, mais ce n'est pas nécessaire, on peut passer directement à la quatrième étape du calcul.

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant r}\left(x_i^2 + x_j^2\right) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} x_i^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant r} x_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right) \\
&= r\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) + r\left(\sum_{j=1}^{r} x_j^2\right) \\
&= 2r\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Conclusion : $\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right)$.

13.d. En conclure que $\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A) &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \qquad \text{que } p = n \text{ ou } p < n \\
&= \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k| \qquad \text{en considérant } k_0 \in [\![1;p]\!] \text{ tel que } \theta = \lambda_{k_0} \text{ (car } \theta > 0) \\
&= |\theta| + \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k| \qquad \theta > 0 \\
&= \theta + \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|
\end{aligned}$$

Ensuite :

- d'après la question précédente :

$$\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|\right) \leqslant (p-1)\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2$$

D'où, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2 \leqslant \sqrt{p-1}\sqrt{\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2}$$

- puis :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k|^2 &= \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|^2 - \theta^2 \qquad \text{question 13.b} \\
&= 2m - \theta^2
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{p} |\lambda_k| \leqslant \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$$

D'où le résultat.

Conclusion : $\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$.

14. ▶ *On admet qu'on peut choisir la matrice P de la question 12.a de sorte que $P^{-1} = {}^tP$. On pose $Q = {}^tP$.*

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = QX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

▶ *On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Z une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(MZ) = {}^tZ\,{}^tM$.*

▶ *Si U et V sont deux matrices colonnes appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tUV$ est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ que l'on identifie à son unique coefficient. Donc ${}^tUV \in \mathbb{R}$.*

☞ Pour info...
Là, pour le coup, c'est le théorème spectral dans sa version complète : si A est une matrice symétrique à coefficients réels, alors il existe P et D à coefficients réels telles que :
- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice orthogonale),
- D est diagonale,
- $A = PDP^{-1}$.

14.a. Montrer que $Q^{-1} = {}^tQ$ puis que $A = {}^tQDQ$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

- Puisque $Q = {}^tP$ et que P est inversible, la matrice Q est également inversible et :

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= ({}^tP)^{-1} \\ &= {}^t(P^{-1}) \\ &= {}^tQ \end{aligned} \qquad P^{-1} = {}^tP = Q$$

☞ Rappels...
- ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$
- Si M est inversible, alors ${}^tM$ également et $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$. En effet : ${}^tM \times {}^t(M^{-1}) = {}^t(M^{-1}M) = I$, donc ${}^tM$ est inversible, d'inverse ${}^t(M^{-1})$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= {}^tQDQ \end{aligned} \qquad P = {}^t({}^tP) = {}^tQ \text{ et } P^{-1} = {}^tP = Q$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} {}^tYY &= {}^t(QX)QX \\ &= {}^tX\,{}^tQQX \\ &= {}^tXX \end{aligned} \qquad Q^{-1} = {}^tQ, \text{ donc } {}^tQQ = I_n$$

Conclusion : $Q^{-1} = {}^tQ$, $A = {}^tQDQ$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

Élémentaire...
Des manipulations assez classiques et simples qu'il faut savoir mener.

14.b. Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

On a, en débutant avec la question précédente :

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX\,{}^tQDQX \\ &= {}^tYDY \qquad Y = QX \text{ et donc } {}^tY = {}^tX\,{}^tQ \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \end{aligned}$$

Conclusion : ${}^tXAX = {}^tYDY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

14.c. En remarquant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^tYY$, en déduire que ${}^tXAX \leqslant \theta\,{}^tXX$.

- On a bien :

$${}^tYY = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

★ Classique ! ★
Très, très classique !

- Ensuite :
  - ⋆ d'après la question précédente :

$$^tXAX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

  - ⋆ d'après la question 14.a :

$$^tXX = {}^tYY$$

D'où, d'après le point précédent :

$$^tXAX \leqslant \theta\, {}^tXX \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Mais on a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \lambda_k \leqslant \theta$$

D'où, puisque pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $y_k^2 \geqslant 0$ puis en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Ce qui prouve le résultat.

Conclusion : $^tXAX \leqslant \theta\, {}^tXX$.

Important !
Les questions 14 sont abordables et relativement classique, à retravailler autant que nécessaire pour les réussir.

15. Soit U la matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le i-ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

15.a. Montrer que $^tUAU = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$. En déduire que $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$.

- Notons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, avec :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ u_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On a :

$$\begin{aligned}
^tUAA &= \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} u_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} u_j \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_j \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} u_i u_j \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{j\in I} a_{i,j} \\
&= 2m
\end{aligned}$$

$\forall k \in [\![1;n]\!],\ u_k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$

question 11.a

Conclusion : $^tUAU = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$.

- D'après la question précédente :

$$^tUAU \leqslant \theta\, {}^tUU$$

Or :

⋆ d'après le point précédent :

$$ {}^tUAU = 2m $$

⋆ et, en débutant par la question 13.c :

$$ \begin{aligned} {}^tUU &= \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \\ &= \sum_{k \in I} 1 \\ &= \text{Card}(I) \qquad = p \end{aligned} \qquad \forall k \in [\![1;n]\!],\ u_k = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. $$

Par conséquent :

$$ 2m \leqslant \theta p $$

D'où le résultat, puisque $p > 0$ ($p \geqslant 2$).

Conclusion : $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$.

15.b. Établir que : $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

Puisque $\sqrt{2m} > 0$, on a :

$$ \frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1 \iff \sqrt{\frac{2m}{p}} \leqslant \frac{2m}{p} \leqslant \theta \leqslant \sqrt{2m} $$

Or :

- d'après la question 11.b : $\dfrac{2m}{p} \geqslant 1$, d'où :

$$ \sqrt{\frac{2m}{p}} \leqslant \frac{2m}{p} $$

À retenir...
$\forall x \in \mathbb{R}^+$:
$$ \sqrt{x} \leqslant x \iff x \leqslant x^2 \iff x(1-x) \leqslant 0 \iff x \geqslant 1 $$

- d'après la question précédente :

$$ \frac{2m}{p} \leqslant \theta $$

- d'après la question 13.b :

$$ \theta \leqslant \sqrt{2m} $$

D'où :

$$ \sqrt{\frac{2m}{p}} \leqslant \frac{2m}{p} \leqslant \theta \leqslant \sqrt{2m} $$

et le résultat voulu en découle, par équivalence.

Conclusion : $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

16. 16.a. Étudier la fonction $F : x \longmapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ sur $[0, 1]$.

- On sait que :
  ✓ la fonction $x \longmapsto (p-1)(1-x^2)$ est dérivable sur $[0;1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ sur cet intervalle,
  ✓ la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

  Par conséquent, la fonction F est dérivable sur $[0;1[$.

✍ Rédaction
On détaille bien la dérivabilité d'une composée... et on se souvient que la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0 !

- Soit $x \in [0;1[$. On a :

$$ \begin{aligned} F'(x) &= 1 + \frac{-2(p-1)x}{2\sqrt{(p-1)(1-x^2)}} \\ &= 1 - \frac{(p-1)x}{\sqrt{(p-1)(-x^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{(p-1)(1-x^2)} - (p-1)x}{\sqrt{(p-1)(-x^2)}} \end{aligned} $$

  Or $\sqrt{(p-1)(-x^2)} > 0$, donc :

$$ \begin{aligned} F'(x) \geqslant 0 &\iff \sqrt{(p-1)(1-x^2)} - (p-1)x \geqslant 0 \\ &\iff \sqrt{(p-1)(1-x^2)} \geqslant (p-1)x \end{aligned} $$

stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}+$, licite car $p-1>0$ et $x \geqslant 0$, donc $(p-1)x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\iff (p-1)(1-x^2) \geqslant (p-1)^2x^2 \\
&\iff 1-x^2 \geqslant (p-1)x^2 && p-1>0\\
&\iff px^2 \leqslant 1 \\
&\iff x^2 \leqslant \frac{1}{p} && p>0\\
&\iff \frac{-1}{\sqrt{p}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}} \\
&\iff x \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}} && x \geqslant 0
\end{aligned}$$

Or $p \geqslant 2$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{p}} < 1$ et on obtient finalement le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{p}}$		1
$F'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
F	$\sqrt{p-1}$	$\nearrow$	$\sqrt{p}$	$\searrow$	1

16.b. En déduire que $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} \qquad (1)$$

D'après la question 13.d :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)} &= \theta + \sqrt{(p-1)2m\left(1-\frac{\theta^2}{2m}\right)} && 2m>0\\
&= \theta + \sqrt{2m}\sqrt{(p-1)\left(1-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}\\
&= \sqrt{2m}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}} + \sqrt{(p-1)\left(1-\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}\right)\\
&= \sqrt{2m}F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la question 15.b :

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$$

D'où, par décroissance de F sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{p}};1\right]$:

$$F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) \geqslant F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)$$

D'où le résultat, puisque $\sqrt{2m} > 0$ et par transitivité.

Conclusion : $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$.

17. On suppose dans cette question que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet de sommets $1, \dots, n$ donc $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$.

17.a. Représenter la matrice A.

$$\textbf{Conclusion : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

17.b. Montrer que -1 est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A+I_n) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{toutes les colonnes sont égales à } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{n,1} \end{aligned}$$

✓ **Rigueur !**
Il y a deux arguments : les colonnes sont toutes identiques, et non nulles ! En détaillant ainsi, on évite d'oublier un des deux arguments et donc de perdre un point...

Par conséquent, la matrice $A+I_n$ n'est pas inversible et donc -1 est valeur propre de A.
Ensuite, par théorème du rang :

$$\dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) = \mathrm{rg}(A+I_n) + \dim\left(\ker(A+I_n)\right)$$

D'où :

$$\dim\left(\ker(A+I_n)\right) = n-1$$

Conclusion : -1 est valeur propre de A et l'espace propre associé est de dimension $n-1$.

17.c. Établir aussi que $n-1$ est une valeur propre de A. En déduire que $\mathcal{E}(A) = 2(n-1)$ et que l'inégalité (1) est alors une égalité.

- Remarquons que $A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$: donc $n-1$ est valeur propre de A.
- Ensuite, on sait que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieure ou égale à n.
  Mais :
  $$\dim\left(\ker(A+I_n)\right) = n-1 \quad ; \quad \dim\left(\ker(A-(n-1)I_n)\right) \geqslant 1$$
  Ainsi, par saturation des dimensions, on a $\dim\left(\ker(A-(n-1)I_n)\right) = 1$ et A ne possède aucune autre valeur propre.
- Par conséquent, A est diagonalisable (car symétrique) et semblable à la matrice $\mathrm{diag}(-1; -1; \dots, -1; n-1)$.
  D'où :
  $$\begin{aligned} \mathcal{E}(A) &= (n-1) \times |-1| + 1 \times (n-1) \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$
- Ici, on a :
  $$p = n \quad ; \quad m = \frac{n(n-1)}{2}$$
  D'où :
  $$\begin{aligned} \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} &= \frac{n(n-1)}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)n(n-1)(n^2-n(n-1))} \\ &= n-1+\frac{1}{n}\sqrt{n^2(n-1)^2} \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$
  D'où l'égalité dans (1).

♡ **Astuce du chef !** ♡
• Si la somme des coefficients de chaque ligne d'une matrice est identique pour toutes les lignes, alors cette valeur commune est VP et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$ associé.
• Puisqu'une matrice et sa transposée ont les mêmes VP, on en déduit que si la somme des coefficients de chaque colonne d'une matrice est identique pour toutes les colonnes, alors cette valeur commune est VP. Attention : pas de $\overrightarrow{\mathrm{VP}}$ évident par contre.

► *On note $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$ et $\beta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$. On note aussi d le degré maximal des sommets du graphe $G(A)$.*

18. Écrire une fonction **Python** `degMax(A)` qui renvoie le maximum des degrés des sommets du graphe $G(A)$, celui-ci étant donné par sa matrice d'adjacence sous la forme du tableau `numpy A`.

Écrivons un programme qui renvoie donc le maximum des sommes des lignes de A... Sans se préoccuper de l'efficacité du programme :

```python
import numpy as np

def degMax(A):
    n,n=np.shape(A)
    L=[np.sum(A[i,:]) for i in range(0,n)] #Liste contenant chaque degré
    return max(L)
```

Petite remarque
On pourrait bien entendu proposer un programme effectuant moins de calculs... Mais ce n'est ni demandé ni nécessaire.

19. 19.a. Montrer que pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, $|\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$.

Soit $j \in [\![1;p]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
|\lambda_j|(\alpha+\beta) - \lambda_j^2 - \alpha\beta &= |\lambda_j|\alpha + |\lambda_j|\beta - |\lambda_j|^2 - \alpha\beta \\
&= \alpha\big(|\lambda_j| - \beta\big) + |\lambda_j|\beta - |\lambda_j|^2 \\
&= \alpha\big(|\lambda_j| - \beta\big) + |\lambda_j|\big(\beta - |\lambda_j|\big) \\
&= -\alpha\big(\beta - |\lambda_j|\big) + |\lambda_j|\big(\beta - |\lambda_j|\big) \\
&= \big(|\lambda_j| - \alpha\big)\big(\beta - |\lambda_j|\big) \\
&\geqslant 0 && \text{par définition de } \alpha \text{ et } \beta : \beta - |\lambda_j| \geqslant 0 \text{ et } |\lambda_j| - \alpha \geqslant 0
\end{aligned}$$

Réflexe !
- Pour comparer deux expressions, on étudie le signe de la différence.
- Pour étudier le signe d'une expression, on cherche à la factoriser.

Conclusion : pour tout $j \in \{1, ..., p\}$, $|\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$.

19.b. En déduire que $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta$, puis que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m + p\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

On a établi en question précédente :

$$\forall j \in [\![1;p]\!],\ |\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$$

D'où, en sommant pour $j \in [\![1;p]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \sum_{j=1}^{p} (\lambda_j^2 + \alpha\beta)$$

Or :

- on a déjà :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j|(\alpha+\beta) &= (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| \\
&= (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| && \text{question 13.a : les valeurs propres éventuelles de } p+1 \text{ à } n \text{ sont nulles} \\
&= (\alpha+\beta)\mathcal{E}(A)
\end{aligned}$$

- et :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j^2 + \alpha\beta) &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \alpha\beta \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 + p\alpha\beta && \text{question 13.a} \\
&= \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta && \text{question 5.b} \\
&= 2m + p\alpha\beta && \text{directement à partir de la première ligne et la question 13.b}
\end{aligned}$$

Petite remarque
A vouloir donner des étapes intermédiaires, l'énoncé nous fait tourner en rond...

On a ainsi démontré :

$$(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta$$

ainsi que

$$(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant 2m + p\alpha\beta$$

Et comme A possède au moins une valeur propre non nulle, on a $\beta > 0$ et donc, puisque $\alpha = 0$, on a : $\alpha + \beta > 0$.

Conclusion : $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta$ et $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m + p\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

19.c. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b^2$. Étudier les variations de $\varphi : t \longmapsto \dfrac{a+bt}{b+t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

- La fonction φ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ (car $b > 0$). Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{b(b+t)-(a+bt)}{(b+t)^2} \\ &= \frac{b^2-a}{(b+t)^2} \\ &\geqslant 0 \quad \text{$a \leqslant b^2$} \end{aligned}$$

Conclusion : φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

19.d. Montrer que $2m \leqslant p\beta^2$. En déduire que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}$.

- D'après la question 15.b, on obtient :

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{2m}{p}} \leqslant \frac{2m}{p} \leqslant \theta$$

Or :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k \leqslant |\lambda_k|$$

D'où :

$$\theta \leqslant \beta$$

Par transitivité, on a ainsi :

$$0 \leqslant \sqrt{\frac{2m}{p}} \leqslant \beta$$

Puis, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{2m}{p} \leqslant \beta^2$$

D'où le résultat, puisque $p > 0$ ($p \geqslant 2$).

Conclusion : $2m \leqslant p\beta^2$.

- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta} &= p\,\frac{\frac{2m}{p}+\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ &= p\varphi(\alpha) \quad \text{en posant $a = \frac{2m}{p}$ et $b = \beta$, on a bien, d'après le point précédent : $a \leqslant b^2$} \\ &\geqslant \underbrace{p\varphi(0)}_{=\frac{2m}{\beta}} \quad \text{φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha \geqslant 0$, donc $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0)$, puis $p \geqslant 0$} \end{aligned}$$

D'où le résultat, par transitivité.

Conclusion : $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}$.

Petite remarque

On pourrait penser à $p\varphi(\beta)$, avec $a = \dfrac{2m}{p}$ et $b = \alpha$, mais l'hypothèse $a \leqslant b^2$ n'est alors pas vérifiée…

✍ Rédaction

En fin de sujet, on peut se permettre de manipuler ainsi les inégalités, du moment que tous les arguments sont présents. Ici, il est indispensable de voir que p doit être positif (même si sa mention n'est certainement pas attendue à ce stade du sujet)…

20. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \beta$.

20.a. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta|x_i| \leqslant d \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On sait que X est vecteur propre de A pour la valeur propre β, donc $AX = \beta X$. La i-ème ligne de cette égalité matricielle donne :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \beta x_j$$

D'où, puisque $\beta \geqslant 0$:

$$\beta|x_i| = |\beta x_i|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right|$$

inégalité triangulaire et : $\forall j \in [\![1;n]\!],\ a_{i,j} \geqslant 0$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j|$$

Or :

$$\forall j \in [\![1;n]\!],\ |x_j| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

D'où, puisque pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,j} \geqslant 0$ puis en sommant pour $j \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \sum j = 1^n a_{i,j}$$

Enfin :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \deg(i)$$
$$\leqslant d$$

D'où le résultat demandé, puisque $\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \geqslant 0$ et par transitivité...

Conclusion : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta |x_i| \leqslant d \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.

20.b. En conclure que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$ (2).

- $\star$ D'après la question 19.d :

$$\mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m}{\beta}$$

  $\star$ Il suffit alors de démontrer que $\dfrac{2m}{\beta} \geqslant \dfrac{2m}{d}$.
  Notons i l'indice de $[\![1;n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.
  D'après la question précédente, on a donc en particulier :

$$\beta \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \leqslant d \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$$

  Or X est un vecteur propre, donc X est non nul. Par conséquent : $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \neq 0$. Ainsi $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| > 0$ et on obtient finalement :

  Pourquoi ?
  Immédiat en raisonnant par l'absurde...

$$\beta \leqslant d$$

  Or $\beta > 0$ (justifié en question 19.b), donc :

$$0 < \beta \leqslant d$$

  Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$ et puisque $2m \geqslant 0$:

$$\frac{2m}{\beta} \geqslant \frac{2m}{d}$$

  Conclusion : par transitivité, on a $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d}$.

- Puisque $G(A)$ est un graphe simple, chaque sommet non isolé est au maximum relié aux $p-1$ autres sommets non isolés.
  Par conséquent, chaque degré est inférieur ou égal à $p-1$.
  D'où :

$$d \leqslant p - 1$$

  Conclusion : $\dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$.

Conclusion : $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$ (2).

20.c. Montrer que l'égalité dans (2) est réalisée pour la matrice A carrée appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au graphe dont l'unique arrête est $\{1, 2\}$.

Dans ce cas, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad m = 1 \quad ; \quad p = 2 \quad ; \quad d = 1$$

Ensuite :

- 0 est valeur propre de A et, par théorème du rang, l'espace propre associé est de dimension $n-2$;
- en écrivant $A + I_n$ et $A - I_n$, on remarque que chacune est de rang $n-1$ (deux colonnes colinéaires, puis une famille échelonnée). Ainsi, -1 et 1 sont valeurs propres de A et les espaces propres associés sont chacun de dimension 1.

Par saturation des dimensions, A ne possède aucune autre valeur propre.
La matrice A est alors diagonalisable (car symétrique) et semblable à la matrice $\mathrm{diag}(-1; 1; 0; \dots; 0)$.
D'où :

$$\mathcal{E}(A) = 2$$

Et on a ainsi :

$$\mathcal{E}(A) = \frac{2m}{d} = \frac{2m}{p-1}$$

Conclusion : pour un tel graphe, il y a égalités dans (2).

Aide-mémoire Python

On suppose que l'on a exécuté **`import numpy as np, numpy.linalg as al`** en début de session.

- Si **`T`** est un tableau **`numpy`**, **`np.shape(T)`** renvoie le nombre de lignes et le nombre de colonnes de **`T`**, dans cet ordre, sous la forme d'un couple.
- **`np.zeros([p,q])`** crée un tableau **`numpy`** à p lignes et q colonnes ne contenant que des 0.
- **`np.ones([p,q])`** crée un tableau **`numpy`** à p lignes et q colonnes ne contenant que des 1.
- **`np.eye(p)`** crée un tableau **`numpy`** à p lignes et p colonnes ne contenant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.
- La fonction **`al.eigvals`**, appliquée à un tableau **`numpy`** représentant une matrice symétrique A, renvoie le tableau des coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable à A.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★