Travail estival

Consignes et exercices de révisions

Ce document est là pour vous expliquer l'ensemble du travail demandé pour l'entrée en ECG 2A - Mathématiques appliquées. Il faut commencer par distinguer le travail demandé du travail nécessaire, qui lui, est propre à chacun et dépend des acquis précédents.

Dans tous les cas, la remise en forme (parce-qu'il s'agit bien d'être en pleine forme, avec un esprit vif et des mécanismes solides) pour septembre nécessite de mettre l'accent sur quatre pôles essentiels :

1. le travail du cours (encore et toujours) : apprendre parfaitement les définitions, propriétés et théorèmes (avec leurs hypothèses) et méthodes ;
2. le travail des techniques et d'assimilations des méthodes (sur des petits exercices),
3. le travail d'exercices "type concours" (qui contiennent naturellement des questions `Python`, point à ne pas négliger dans les révisions) pour ancrer les automatismes et s'imprégner de l'articulation entre les questions,
4. le travail de certaines démonstrations de cours et de résultats classiques aux écrits et/ou aux oraux.

Pour le point 1 : il faut bien reprendre le cours de 1A... Pas très original. La forme est propre à chacun : fiches, utilisation de l'application **`Anki`**, autres... Du moment que cela fonctionne.

Pour le point 2 : il faut reprendre le cours de 1A, les exemples traités ainsi que les petits exercices de techniques (études de fonctions, calculs de limites, calculs de sommes, résolutions de systèmes,...).

Pour le point 3 : ce document contient, classés par thème, des exercices "type concours" ou d'annales de concours qui permettent de se tester sur des sujets plus complets.
Ces exercices doivent être **intensément** travaillés, avec le corrigé (qui sera publié sur mon site début août). Travailler un exercice, c'est le faire, le refaire, le re^{k}faire, avec k un entier suffisamment grand... La lecture approfondie des corrigés est l'occasion de s'imprégner de la rédaction. Une devoir surveillé est prévu le jour de la rentrée et sera composé d'exercices parmi ceux qui suivent.

Pour le point 4 : un document annexe, intitulé **Recueil de questions**, regroupe 43 "questions classiques" (résultats de cours ou questions classiques aux écrits et/ou oraux) dont le travail de la démonstration est utile. Les 14 premières questions sont à maitriser pour la rentrée. Les suivantes seront "débloquées" au fur et à mesure de l'année.

> Le travail de cette fiche est naturellement insuffisant pour aborder sereinement la 2A. En effet, un point est fondamental avant de s'atteler à ces exercices : LE COURS, LE COURS, LE COURS ! Définitions, théorèmes et propriétés (avec leurs hypothèses), méthodes doivent être parfaitement connus pour espérer réussir l'année et les concours. Un travail régulier et précis du cours de 1A est indispensable durant l'été mais également durant toute l'année de 2A.

Pour terminer, il serait bon de connaître les lettres grecques ci-dessous...

Alpha	α
Bêta	β
Gamma	γ et Γ
Delta	δ et Δ
Epsilon	ε
Thêta	θ
Lambda	λ

Mu	μ
Pi	π et Π
Rho	ρ
Sigma	σ et Σ
Tau	τ
Phi	φ et Φ
Omega	ω et Ω

N'hésitez pas à me contacter si besoin. Bel été !

Plan du document

I Analyse

Exercice 1 – Inspiré d'exercices de concours

On considère la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n.
2. **Étude de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   - 2.a. Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   - 2.b. Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   - 2.c. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ h_n \geqslant \ln(n+1)$. Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = h_n - \ln(n) \ ;\ v_n = h_n - \ln(n+1)$$
   - 3.a. A l'aide du résultat de la question 2.b, établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
   - 3.b. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers la même limite, notée γ.
   - 3.c. Établir :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1$$
   - 3.d. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n$.
   - 3.e. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoyant en sortie un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à p (cette fonction pourra utiliser la fonction de la question 1.).
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   - 4.a. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = h_{2n} - h_n$.
   - 4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$.
   - 4.c. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 2 – Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{2} + x$.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def f(x)` qui prend un réel x en argument d'entrée et renvoie $f(x)$ en sortie.
2. **Étude de f.**
   - 2.a. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   - 2.b. Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
   - 2.c. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α, dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. **Étude d'une première suite.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - 3.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
   - 3.b. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{e}$.
   - 3.c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$ puis $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n$.
   - 3.d. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
   - 3.e. Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α. *Donnée :* $\ln(10) \simeq 2,303$.
   - 3.f. Créer une fonction **Python** d'en-tête `def u(n):` qui prend n en valeur d'entrée et renvoie u_n en sortie.
4. **Étude d'une seconde suite.**
   - 4.a. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.
   - 4.b. Écrire une fonction **Python** nommée `dicho` qui prend la valeur d'un réel strictement positif p en argument d'entrée et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près, à l'aide de l'algorithme de dichotomie.
   L'exécution de `dicho(0.01)` renvoie $2,11$.
   - 4.c. Déduire de la question 4.a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre, noté x_n, tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.
   - 4.d. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0;3]$.
   - 4.e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer x_n en fonction de n et f^{-1}.
   - 4.f. En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 - Inspiré d'exercices de concours

On considère la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

Partie A. Étude de f.

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
3. 3.a. Rappeler $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^X - 1}{X}$.

   3.b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x)$

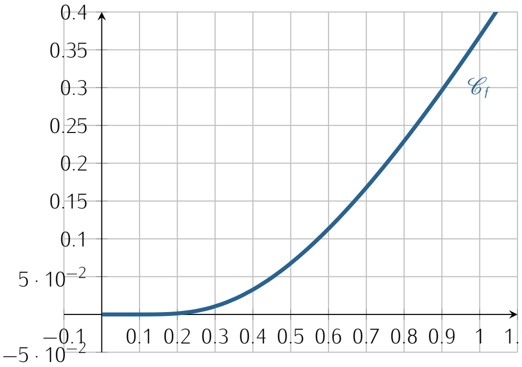
   3.c. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite asymptote aux voisinages de $\pm\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}^*$.
5. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x)$.
6. 6.a. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 1$.

   6.b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.
7. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi. *On veillera à faire figurer toutes les informations établies précédemment permettant d'obtenir la courbe la plus précise possible.*

Partie B. Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

8. Écrire une fonction **Python**, nommée u, qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n en sortie.
9. Représenter les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphique ci-dessous, sur lequel la courbe de la fonction f est représentée. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?



10. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
11. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
12. 12.a. Établir : $\forall x \in]0;1],\ f(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

    12.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

    12.c. Conclure sur l'existence et la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    12.d. Résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1}{e}\right)^n \leqslant 10^{-20}$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$, puis interpréter le résultat obtenu. *Donnée :* $20\ln(10) \simeq 46,05$.

    12.e. Le programme suivant (dans lequel **u** est la fonction **Python** définie à la question 8) affiche la valeur 4. Interpréter cette valeur et la comparer avec celle obtenue à la question précédente.

```
n=0
while u(n)>10**(-20):
    n=n+1
print(n)
```

13. Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

    13.a. Étudier les variations de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

    13.b. A l'aide du résultat établi à la question 12.b démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

    13.c. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 - EDHEC 2013 E

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. 1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   1.b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   1.c. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. 2.a. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.
   2.b. En déduire un programme, rédigé en **Python**, qui permet de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.
3. On définit maintenant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$.
   3.a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(v_k - v_{k+1})$.
   3.b. Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.
   3.c. Montrer alors que la série $\sum v_n^2$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 5 - EDHEC 2010 E

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. 3.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
   3.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3.c. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
   3.d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(u_n) \leqslant 2$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, élément de $[2; e^2]$.
5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   5.a. Justifier que la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   5.b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   5.c. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   5.d. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   5.e. Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
   Conclure quant à la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.
   5.f. 5.f.i. Écrire une fonction **Python** qui prend un entier naturel n en argument d'entrée et renvoie la valeur de u_n en sortie.
   5.f.ii. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ell - u_n \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$.
   5.f.iii. Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $\dfrac{e^2}{2^n} < 10^{-5}$. Interpréter le résultat. *Donnée :* $\dfrac{5\ln(10)+2}{\ln(2)} \simeq 19,5$.

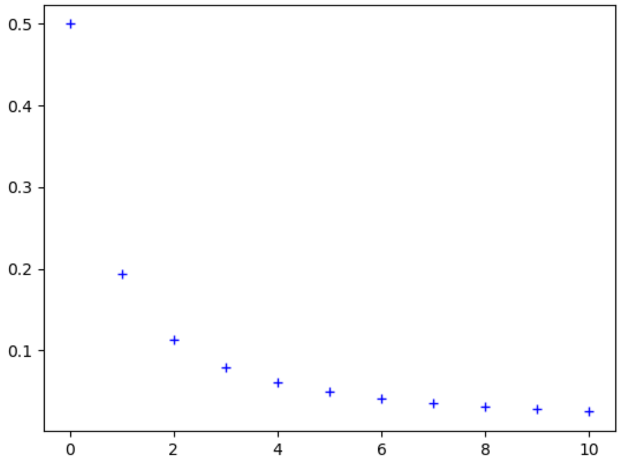
Exercice 6 - EDHEC 2020 E

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Justifier, pour tout entier naturel n, l'existence de I_n et J_n.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. 4.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   4.b. En déduire I_2.
5. 5.a. A l'aide de la relation établie à la question 4.a, écrire une fonction **Python** d'en-tête `def I(n):` qui renvoie la valeur de I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   5.b. On considère le programme suivant :

```
Labs = ................
Lord = ................
plt.plot(Labs,Lord,'b+')
plt.show()
```

Recopier et compléter les lignes de ce programme, de sorte que son exécution permette d'obtenir le graphique suivant, sur lequel les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont représentés.



5.c. On considère la fonction **Python** suivante, dans laquelle on utilise la fonction créée à la question 5(a).

```
def seuil(p):
    n=0
    while I(n)>p:
        n=n+1
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour toute valeur strictement positive de p ?

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
7. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
8. 8.a. Calculer J_0 puis exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} + J_n$ en fonction de n.
   8.b. En déduire J_1.
9. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.
10. 10.a. Utiliser les résultats des questions 6 et 7 pour justifier que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
    10.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ puis donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
    10.c. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 7 - Ecricome 2005 E

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto (1-x)^n e^{-2x}$ ainsi que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
Le but de l'exercice est de montrer l'existence de trois réels a, b, c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ est une expression dépendant de n telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien défini et donner son signe.
2. Calculer I_0.
3. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Que peut-on en déduire ?

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
8. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
9. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(n(nI_n - 1)\big)$.
10. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 8 - EDHEC 2022 E

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{n(x+n)}dx$.

1. Calculer u_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$. Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0;1]$.
3. 3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   3.b. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$. *On note* $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   4.a. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \gamma$.

   4.b. Déterminer les deux réels a, b tels que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{x}{k(x+k)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{x+k}$.

   4.c. Établir alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$.

   4.d. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   5.a. Justifier que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

   5.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Donner finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de γ à l'aide de T_n et S_n.
7. On considère la fonction **Python** définie ci-dessous :

```python
import numpy as np
def gamma(p):
    n=1
    while np.log(1+1/n)>p:
        n=n+1
    L=[1/k for k in range(1,n+1)]
    S=sum(L)-np.log(n+1)
    T=sum(L)-np.log(n)
    return S,T
```

   L'exécution de la commande `gamma(10**(-3))` renvoie : `(0.5767160812351229, 0.5777155815682065)`. Interpréter ce résultat en justifiant soigneusement la réponse.

Exercice 9 - Inspiré de EML 2018 E

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, notées a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Établir : $b \in [3;4]$.
4. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que l'exécution de **`approx_b(p):`** renvoie une valeur approchée de b à p près, où p est un réel strictement positif, obtenue par la méthode de dichotomie.

```
import numpy as np

def f(x):
    return ......
def approx_b(p):
    x1,x2=3,4
    while ......:
        m = ......
        if f(m)==2:
            ......
        elif f(m)<2:
            ......
        else:
            ......
    return ......
```

Partie II : Étude d'une suite

On définit maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant b$.
6. Déterminer alors la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
7. 7.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{3}(u_n - b)$.

   7.b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.

   7.c. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 6, puis déterminer un entier à partir duquel u_n est proche de b à 10^{-3} près.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Considérons la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\,dt$$

8. Montrer que φ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ \varphi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

9. En déduire les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
10. Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant x$.
11. 11.a. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\varphi(0)$.

    11.b. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0$. On admet que la fonction φ est alors dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 0$.
12. 12.a. Démontrer que pour tout $t \in\ [4;+\infty[$: $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant \dfrac{1}{t - \sqrt{t}}$.

    12.b. Considérons la fonction $h : t \longmapsto 2\ln\left(\sqrt{t} - 1\right)$ définie sur $[4;+\infty[$. Dériver h.

    12.c. En déduire que pour tout $x \in [4;+\infty[$: $\ln(2) \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\ln\left(\dfrac{\sqrt{2x} - 1}{\sqrt{x} - 1}\right)$.

    12.d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
13. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ dans un repère orthonormé du plan. On veillera à faire apparaître les différentes tangentes ou asymptotes connues.
    Donnée : $\varphi(2) \simeq 1,1$.

Exercice 10 - EML 2023 Appli

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

On considère également la suit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de f.
   1.b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.
2. 2.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de **EML_1(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n > a$.
   2.b. On admet que l'on a également défini une fonction **Python** tel que, pour tout réel strictement positif a, l'appel de **EML_2(a)** renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n < a$.
   Les appels **EML_1(10**6)** et **EML_2(10**(-6))** renvoient respectivement 6 et 5.
   Qu'en déduire sur u_5 et u_6 ? Commenter le résultat en une ligne.
3. On définit maintenant la fonction g sur $[0;+\infty[$ par : $\forall x \in [0;+\infty[$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.
   3.a. Démontrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans $]-\infty;1]$.
   3.b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $]0;+\infty[$, que l'on notera α.
   3.c. Justifier : $e^{-1} < \alpha < 1$.
4. 4.a. Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
   4.b. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   4.c. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante puis qu'elle converge vers un réel ℓ appartenant à $[0;e^{-1}]$.
5. Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
   5.a. Justifier que la fonction h est continue sur $[0;+\infty[$.
   5.b. Déterminer, pour tout $x \in]0;+\infty[$, une expression de $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
   5.c. Résoudre alors l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.
   5.d. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

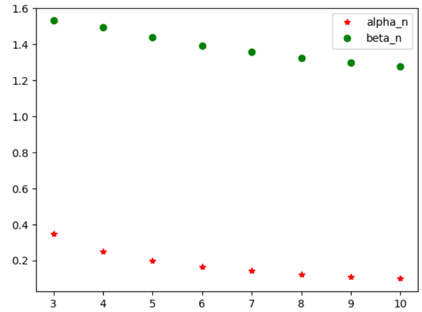
Exercice 11 - Inspiré d'exercices de concours

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Écrire une fonction **Python** de sorte que l'exécution de la commande **f(n,x)** renvoie la valeur de $f_n(x)$, où $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
2. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0;+\infty[$.
3. 3.a. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_2(x) = 0$.
   3.b. Soit $n \in [\![3;+\infty[\![$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notées α_n et β_n, vérifiant :
   $$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$$
   3.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3;+\infty[\![$, $\beta_n < 2$.
4. 4.a. Recopier et compléter les lignes 4,7,8,10,11,12 de la fonction **Python** ci-dessous (où **f** est la fonction **Python** créée à la question 1) afin qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α_n, pour $n \in [\![3;+\infty[\![$.

```
1  def alpha(n):
2      a=0
3      b=1
4      while ......
5          m=(a+b)/2
6          if f(n,m)==0:
7              ......
8          elif ......
9              b=m
10         elif ......
11             ......
12     return ......
```

   4.b. On admet que l'on a écrit une fonction **beta(n)** qui renvoie une valeur approchée de β_n (pour $n \in [\![3;+\infty[\![$) à 10^{-5} près.
   Proposer un programme dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous :



5. 5.a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 3} \beta_n$ est divergente.

   5.b. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 3} \alpha_n$ est divergente. *Indication : on pourra chercher à la comparer à la série harmonique.*

6. **Étude de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.**

   6.a. Démontrer que : $\forall n \in [\![3; +\infty[\![, \ \forall x \in]0; 1[, \ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

   6.b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

   6.c. Démontrer que pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, $\alpha_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

   6.d. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1$.

   6.e. La série $\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{\alpha_n}{n}$ est-elle convergente ?

7. **Convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$.**

   7.a. Établir : $\forall n \in [\![3; +\infty[\![, \quad \beta_n < n^{\frac{1}{n-1}}$.

   7.b. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 1.

II Algèbre linéaire

Exercice 12 – Fait maison

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.
2. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   3.a. Résoudre l'équation $AX = X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On notera W la solution dont la première composante est égale à -1.
   3.b. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   3.c. Notons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   3.d. Calculer $P^{-1}AP$. On notera T la matrice obtenue.
   3.e. Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, la matrice N^k.
   Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice T^n.
   3.f. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.
4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 0 \ ; \ u_2 = 1 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

Exercice 13 – Ecricome 2008 E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1; 3]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé en i-ième ligne et j-ième colonne, qui vaut 1.

1. **Question de cours.**
   Soient E un espace vectoriel de dimension finie ainsi que F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   1.a. Démontrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   1.b. Établir : $\dim(F \cap G) \leqslant \min\big(\dim(F), \dim(G)\big)$.
2. 2.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_1(A) = \big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\big\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
   2.b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_2(A) = \big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\big\}$ est un espace vectoriel et en donner une base ainsi que la dimension.
   2.c. Établir : $\mathcal{E}_1(A) \cap \mathcal{E}_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   2.d. Démontrer que la famille obtenue en concaténant les bases de $\mathcal{E}_1(A)$ et $\mathcal{E}_2(A)$ (obtenues en questions 2.a et 2.b) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   3.a. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer son inverse, notée P^{-1}.
   3.b. Calculer la matrice $P^{-1}AP$, notée D.
4. On considère les ensembles $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ et $\mathcal{C}_D = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ DN = ND\}$.
   4.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A$ est un espace vectoriel.
   4.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C}_A \iff N \in \mathcal{C}_D$$

   4.c. Démontrer que $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$, puis justifier que la famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est libre.
   4.d. Montrer que la famille $\big(PE_{1,1}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}, PE_{3,2}P^{-1}, PE_{3,3}P^{-1}\big)$ est une base de $\mathcal{C}_A$.
5. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}$$

   On considère également : $\mathcal{E} = \{M(a, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

5.a. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

5.b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que la matrice $P^{-1}M(a, b)P$ est diagonale. On note $D(a, b)$ cette matrice.

5.c. 5.c.i. L'ensemble $\{M \in \mathcal{E} \mid M^2 = I_3\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$?

5.c.ii. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer : $M(a, b)^2 = I_3 \iff D(a, b)^2 = I_3$.
En déduire les matrices $M(a, b)$ telles que $M(a, b)^2 = I_3$.

Exercice 14 - EDHEC 2020 E

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M)$ définie par :

$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2. 2.a. Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

   2.b. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   3.a. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

   3.b. Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

4. 4.a. Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement.

   4.b. En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathscr{B}$.

   4.c. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.

III Probabilités

Exercice 15 - Classique...

On dispose d'une pièce équilibrée qu'on lance jusqu'à l'obtention du premier PILE. Si n désigne le rang de ce premier PILE, on pioche alors une boule de façon équiprobable dans une urne composée de $n!$ boules, numérotées de 1 à $n!$.
On note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue de l'expérience. On admet que X et Y sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Y(\Omega)$.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big)$.
4. Quelle est la probabilité que la boule obtenue soit numérotée 1 ?

Exercice 16 - EML 2009 E

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
   1.a. Reconnaître la loi de T. Donner son espérance et sa variance.
   1.b. Exprimer U en fonction de T. En déduire que U possède une espérance et une variance et les donner.
2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note :
   - X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués,
   - Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues,
   - Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues,
   - pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, B_i l'évènement "obtenir une boule blanche au i-ème tirage" et $N_i = \overline{B_i}$.

   2.a. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel $p \in]0; 1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X.
   2.b. **Loi de X.**
      2.b.i. Sans justifier, donner $X(\Omega)$.
      2.b.ii. Montrer que pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big) = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.
      2.b.iii. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) = 1$.
      2.b.iv. Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
   2.c. **Loi de Y.**
      2.c.i. Pour tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, déterminer $\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 1]\big)$. *On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$.*
      2.c.ii. En déduire que $\mathbb{P}\big([Y = 1]\big) = q(1 + p)$.
      2.c.iii. Déterminer la loi de Y.
   2.d. Donner la loi de Z.

Exercice 17 - Ecricome 2014 E

Soient $p \in]0; 1[$ et $q = 1 - p$.
On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p et on procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*". On suppose les résultats des lancers indépendants les uns des autres.
On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer" ; et $P_j = \overline{F_j}$;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.
On admet que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big)$ pour $k \in X_n(\Omega)$. Préciser $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
2. Donner $Y(\Omega)$.
3. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements $[Y = n]$ et $[X_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$ sont égaux.
4. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n+1)p^2q^n$$
5. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance et la calculer.
6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
   6.a. Soit Z la variable aléatoire égale au rang du premier PILE. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
   6.b. Exprimer Y_1 en fonction de Z puis en déduire la loi de Y_1 ainsi que son espérance.
   6.c. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.

Exercice 18 - EDHEC 2018 E

On dispose de trois pièces indiscernables au toucher :

- une pièce numérotée 0 donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et FACE avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- une pièce numérotée 1 donnant PILE à coup sûr
- une pièce numérotée 2 donnant FACE à coup sûr

L'expérience consiste à choisir de façon équiprobable l'une de ces trois pièces puis la lancer indéfiniment. On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé associé à cette expérience.
Pour $i \in \{0; 1; 2\}$, on note A_i l'évènement "on a choisi la pièce numérotée i". Ainsi, (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'évènements.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k l'évènement : "on obtient PILE au lancer numéro k" et $F_k = \overline{P_k}$.
On considère les deux variables aléatoires :

- X donnant le rang d'apparition du premier PILE
- Y donnant le rang d'apparition du premier FACE

On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais PILE et de donner à Y la valeur 0 si l'on obtient jamais FACE.

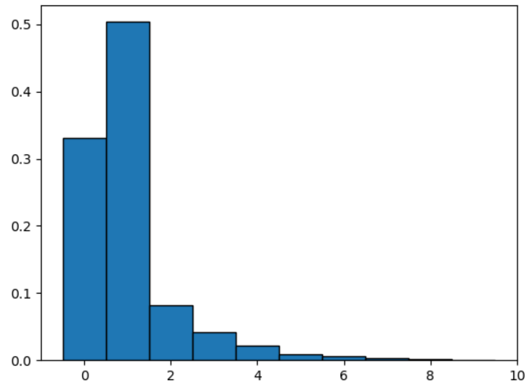
1. **Loi de X.**
   1.a. Donner $X(\Omega)$.
   1.b. Déterminer $\mathbb{P}\big([X = 1]\big)$.
   1.c. Montrer que : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   1.d. En déduire la valeur de $\mathbb{P}\big([X = 0]\big)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. 5.a. Montrer que pour tout $j \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X = 1] \cap [Y = j]\big) = \mathbb{P}\big([Y = j]\big)$.
   5.b. Montrer que pour tout $i \in [\![2; +\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = 1]\big) = \mathbb{P}\big([X = i]\big)$.
   5.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
6. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.
   6.a. Expliquer pourquoi Z prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   6.b. Montrer que $\mathbb{P}\big([Z = 1]\big) = \frac{2}{3}$.
   6.c. Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$[Z = n] = \big([X = 1] \cap [Y = n - 1]\big) \cup \big([Y = 1] \cap [X = n - 1]\big)$$
   6.d. En déduire que :
   $$\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Z = n]\big) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
7. **Simulation informatique.** On rappelle que, en **Python**, la commande **rd.random()** renvoie un réel aléatoire de $]0; 1[$, et que la commande **rd.randint(a,b)** renvoie un entier aléatoire de $[\![a; b[\![$.
   7.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme **Python** suivant afin que la fonction **simulX** renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulX():
    piece=rd.randint(... ,...)
    x=1
    if piece==0:
        lancer=rd.random()
        while ..............
            ..............
            ..............
    else:
        if piece==2:
            ..............
    return(x)
```

   7.b. Justifier que le cas où l'on joue la pièce numérotée 1 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.
   7.c. On souhaite obtenir un histogramme des fréquences des valeurs de X sur 10000 réalisations de l'expérience.
      7.c.i. Créer une liste **L** contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire X (on pourra faire appel à la fonction **simulX** précédente).
      7.c.ii. A l'aide d'une écriture en compréhension, recopier et compléter les lignes manquantes du programme suivant afin que la liste **Labs** contiennent les valeurs $-0.5, 0.5, ..., 9.5$.

```
Labs = .....................
plt.hist(L,Labs, density=True,edgecolor='k')
plt.show()
```

7.c.iii. L'exécution des lignes précédentes permet d'obtenir le graphique suivant :



Expliquer l'intérêt des options **density=True** et **edgecolor='k'**.
Ce graphique permet-il de confirmer la loi obtenue pour la variable aléatoire X ?

Exercice 19 - EDHEC 2009 E

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivantes toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X; Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   1.a. Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}\big([Z > k]\big)$.
   1.b. Établir :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$
   1.c. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   $$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \begin{cases} \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ \dfrac{1 + X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair} \end{cases}$$
   2.a. Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction **Python** suivante.

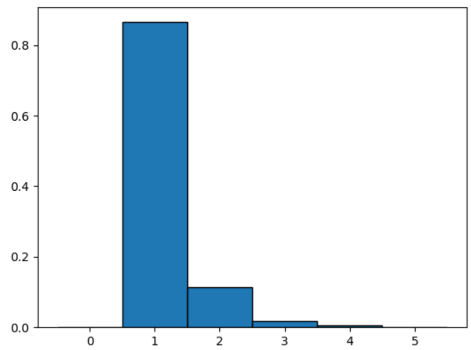
```
import numpy.random as rd
def mystere(p):
    n=1
    while rd.random()<1-p:
        n=n+1
    return n
```

   2.b. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un réel p de $]0;1[$ et renvoyant une réalisation de la variable aléatoire T.
   Ce programme pourra utiliser la fonction **mystere** précédente et on rappelle qu'en **Python**, l'exécution de **a%b** renvoie le reste de la division euclidienne de **a** par **b**.
   2.c. Montrer que T prend des valeurs entières positives non nulles.
   2.d. Réciproquement, justifier que tout entier naturel non nul k est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   2.e. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction de certains évènements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Exercice 20 - Inspiré de EML 2010 E et EDHEC 2007 E

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1 etX_2 les variables aléatoires égales aux durées respectives des opérations des clients C_1 et C_2. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0;1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

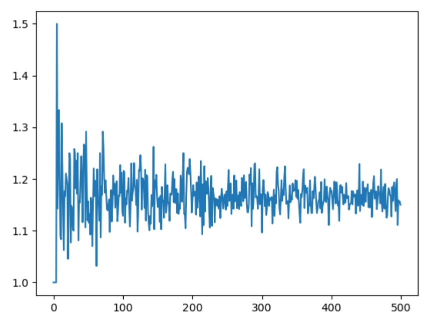
1. 1.a. Rappeler la loi de la variable aléatoire X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
   1.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant n]\big) = 1 - q^n$. Cette relation est-elle encore valable quand $n = 0$?
2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente du client C_3 avant de pouvoir se présenter à un guichet. De cette façon, $T = \min(X_1, X_2)$.
   2.a. Sans utiliser la commande **min**, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simulT(p)** renvoie une réalisation de la variable aléatoire T dans le cas où X_1 et X_2 suivent des lois géométriques de paramètre p.
   2.b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}\big([T > n]\big)$.
   2.c. En déduire que T suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
3. On définit maintenant la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
   3.a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big)$.
   3.b. Soit n un entier naturel non nul. Établir :
$$\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) = 2\frac{pq^n}{1+q}$$
   3.c. Justifier alors que $\Delta(\Omega) = \mathbb{N}$.
   3.d. Montrer que Δ admet une espérance et la calculer.
4. Dans cette question, on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, d'après le résultat de la question 2.c. la variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{3}{4}$. Afin de compenser son attente, le client C_3 se voit proposer une réduction sur son prochain billet de train.
   Si $n \in \mathbb{N}^*$ désigne l'attente subie par C_3 (représentée par la variable aléatoire T), alors celui-ci pioche au hasard un jeton dans une urne composée de n jetons numérotés de 1 à n.
   Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, le tirage du jeton numéro k entraînera une réduction de k euros. On note R la variable aléatoire égale au montant de la réduction obtenue par le client C_3.
   4.a. Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}_{[T=n]}\big([R = k]\big)$. *On distinguera les cas $k > n$ et $k \leqslant n$.*
   4.b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big([R = k]\big) = 3\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   4.c. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simulR()** renvoie une réalisation de la variable aléatoire R.
   4.d. Écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir le graphique ci-dessous, représentant l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire R.



   4.e. On considère la fonction **mystere** écrite en **Python** :

```python
def mystere():
    LE=[]
    for n in range(1,501):
        LR=[simulR() for k in range(n)]
        E=sum(LR)/n
        LE.append(E)
    plt.plot(range(500),LE)
    plt.show()
```

   L'exécution de **mystere()** affiche le graphique ci-dessous :



Interpréter ce graphique. On veillera en particulier à décrire le contenu de la liste **LE** après l'exécution de **mystere()**.

4.f. 4.f.i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$.

4.f.ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \ln(4) - \ln(3) - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}dx.$

4.f.iii. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^n}{1-x}dx = 0.$

4.f.iv. Établir alors que $\mathbb{P}\big([R=1]\big) = 3\big(\ln(4) - \ln(3)\big)$ puis donner la valeur de $\mathbb{P}\big([R=2]\big)$.

4.f.v. Utiliser les résultats précédents pour donner une valeur approchée de $\mathbb{P}\big([R \geqslant 3]\big)$. *On donne :* $\mathbb{P}\big([R=1]\big) \simeq 0,86$.

Exercice 21 - EDHEC 2019 E

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une balle noire non numérotée et $n-1$ balles blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces balles au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la balle noire.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : "le i–ème tirage donne une balle blanche", on pose $N_i = \overline{B_i}$ et on note X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la balle noire.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X_n.
2. 2.a. Pour tout $i \in [\![2; n-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i)$.

   2.b. Établir alors :
$$\forall k \in X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{1}{n}$$

   2.c. En déduire l'espérance et la variance de X_n, notées respectivement $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la balle numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

   3.a. Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, montrer que :
$$\mathbb{P}\Big([X_n = k] \cap [Y = 0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

   3.b. En déduire, grâce à la formule des probabilités totales, la valeur de $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$.

   3.c. Déduire alors la loi de Y.
4. 4.a. Recopier et compléter le script **Python** suivant de sorte que l'exécution de **simul_X(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie la valeur de X_n associée. *On admettra que la balle noire est codée tout au long de ce script par le nombre **N**.*

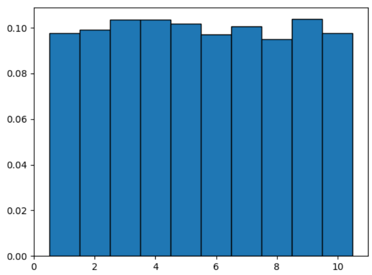
```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simul_X(n):
    N=n
    u=rd.randint(1,N+1)
    X=1
    while u!=N:
        N=...
        u=...
        X=...
    return X
```

   4.b. En utilisant la fonction créée à la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **esp_var_X(n)** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ et une de $\mathbb{V}(X_n)$.

   4.c. Recopier et compléter le programme suivant afin que son exécution affiche l'histogramme obtenu à partir de 10000 réalisations de la variable aléatoire X_n, où n est saisi par l'utilisateur.

```python
n=int(input("n=?"))
Labs=
LX=
plt.hist(LX,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```

   4.d. On a exécuté le programme de la question précédente en saisissant $n=10$ et on a obtenu le graphique qui suit. Expliquer en quoi le graphique est cohérent avec la loi de X_n obtenue en question 2.b.



4.e. Écrire une fonction de sorte que l'exécution de **simul_XY(n)** simule une réalisation de l'expérience décrite ci-dessus, où n est le nombre total de balles, et renvoie les valeurs de X_n et Y associées.

Exercice 22 - EDHEC 2018 S

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$. Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n puis donner son espérance et sa variance.
2. On note Y l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Y la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   - 2.a. Justifier que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   - 2.b. Pour tout entier naturel i non nul, exprimer l'événement $[Y = i]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_i$.
   - 2.c. En déduire : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big([Y = i]\big) = \dfrac{1}{i(i+1)}$.
   - 2.d. Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y = i]\big) = 1$.
   - 2.e. Déterminer alors $\mathbb{P}\big([Y = 0]\big)$ et interpréter le résultat.
   - 2.f. Démontrer que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.
3. On note Z l'instant auquel le mobile se trouve pour la deuxième fois à l'origine (sans compter son positionnement initial), et on attribue à Z la valeur 0 si le mobile revient au plus une fois à l'origine. On admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big) = 0$.
   - 3.a. Sans justifier, donner $Z(\Omega)$.
   - 3.b. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2; +\infty[\![$ tel que $i \geqslant j$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z = j]\big)$.
   - 3.c. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2; +\infty[\![$ tel que $i \leqslant j - 1$. Établir : $\mathbb{P}_{[Y=i]}\big([Z = j]\big) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.
   - 3.d. Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $\mathbb{P}\big([Z = j]\big)$ comme une somme finie.
   - 3.e. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?
4. 4.a. Recopier et compléter le programme suivant de sorte que l'exécution de **simulYZ()** renvoie une réalisation de Y et Z.

```python
import numpy.random as rd
def simulYZ():
    n=1
    while ................:
        n = ......
    Y = ......
    n=n+1
    while ................:
        n = ......
    Z = ......
    return Y,Z
```

   - 4.b. En utilisant la fonction de la question précédente, écrire un programme **Python** dont l'exécution permettrait d'obtenir l'histogramme des fréquences sur 10000 réalisations de la variable aléatoire Y.