Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et p un réel appartenant à $]0,1[$.

Pour générer des graphes non orientés de manière aléatoire, on se donne :

- $S = [\![0, n-1]\!]$ les sommets du graphe ;
- pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ avec $u < v$, $T_{u,v}$ une variable de Bernoulli de paramètre p.
  Les variables $T_{u,v}$, pour $\{u, v\}$ décrivant les paires de sommets avec $u < v$, sont supposées indépendantes ;
- les arêtes d'un graphe G ainsi généré sont les paires $\{u, v\}$ telles que $T_{u,v} = 1$ si $u < v$ ou $T_{v,u} = 1$ si $v < u$.

Dans tout le problème, par convention, une somme portant sur un ensemble d'indices vide vaut 0, un produit vaut 1, une intersection vaut Ω, une réunion vaut $\varnothing$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Un sujet intéressant même si les notations sont parfois lourdes... Une longueur correcte, mais la difficulté de certaines questions est parfois un peu démesurée. Sur la forme, des parties assez déséquilibrées... La partie 4 contient bon nombre de questions abordables à traiter !

Partie 1 – Nombre aléatoire de triangles

☞ Pour info...
Répartition des points de barème :
- partie 1 : 23%
- partie 2 : 8%
- partie 3 : 19%
- partie 4 : 50%

Le 20/20 était à 49% des points de barème.

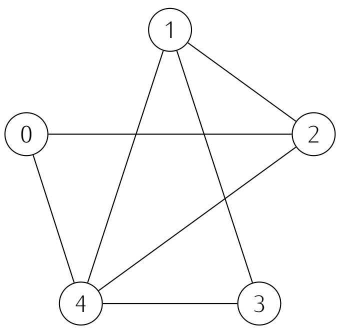
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties $\{u, v, w\}$ à trois éléments de l'ensemble des sommets, r le nombre de ses éléments et on pose

$$\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_r\}$$

Étant donné $t = \{u, v, w\}$, un élément de $\mathcal{T}$, on dit que t est un triangle dans un graphe G généré aléatoirement si $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ et $\{w, u\}$ sont des arêtes de G.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on note Y_k la variable aléatoire de Bernoulli associée à l'événement « t_k est un triangle de G » et Z_n la variable aléatoire égale au nombre de triangle de G.

Par exemple si $n = 5$ et le graphe de G est représenté ainsi,



alors $Z_5 = 3$.

1. Quelle est la valeur de r en fonction de n ?
   r est le nombre de parties à 3 éléments de S, qui est de cardinal n.

   Conclusion : $r = \binom{n}{3}$.

2. 2.a. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Posons $t_k = \{u, v, w\}$ avec $u < v < w$. Montrer que $Y_k = T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w}$.
   Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

   - Si $\omega \in [Y_k = 1]$:
     Dans ce cas :
     - ⋆ $Y_k(\omega) = 1$,
     - ⋆ t_k est un triangle de G, donc les arêtes $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ existent.
       Ainsi : $T_{u,v}(\omega) = 1$, $T_{u,w}(\omega) = 1$ et $T_{v,w}(\omega) = 1$.

     D'où :
     $$Y_k(\omega) = T_{u,v}(\omega) T_{v,w}(\omega) T_{u,w}(\omega)$$
   - Si $\omega \notin [Y_k = 1]$:
     Dans ce cas :
     - ⋆ puisque $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$, on a alors $Y_k(\omega) = 0$,

♣ Méthode !
Il s'agit d'établir une égalité de variables aléatoires, qui sont des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. On met donc en place la même méthode que pour établir l'égalité de deux fonctions ! Montrons donc :

$\forall \omega \in \Omega,\ Y_k(\omega) = T_{u,v}(\omega) T_{v,w}(\omega) T_{u,w}(\omega)$

⋆ t_k n'est pas un triangle de G, donc au moins une des arêtes $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ n'existe pas.
Ainsi : $T_{u,v}(\omega) = 0$ ou $T_{u,w}(\omega) = 0$ ou $T_{v,w}(\omega) = 0$.
Par conséquent :

$$T_{u,v}(\omega)\, T_{v,w}(\omega)\, T_{u,w}(\omega) = 0$$

D'où :

$$Y_k(\omega) = T_{u,v}(\omega)\, T_{v,w}(\omega)\, T_{u,w}(\omega)$$

Dans tous les cas, on a

$$Y_k(\omega) = T_{u,v}(\omega)\, T_{v,w}(\omega)\, T_{u,w}(\omega)$$

Conclusion : $Y_k = T_{u,v}\, T_{v,w}\, T_{u,w}$.

2.b. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^3.

Soit $k \in [\![1; r]\!]$. On sait que Y_k suit une loi de Bernoulli, elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([Y_k = 1]\big)$. Or, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_k = 1]\big) &= \mathbb{P}\big([T_{u,v}\, T_{v,w}\, T_{u,w} = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T_{u,v} = 1] \cap [T_{u,w} = 1] \cap [T_{v,w} = 1]\big) && T_{u,v},\ T_{u,w} \text{ et } T_{v,w} \text{ sont à valeurs dans } \{0;1\} \\
&= \mathbb{P}\big([T_{u,v} = 1]\big)\, \mathbb{P}\big([T_{u,w} = 1]\big)\, \mathbb{P}\big([T_{v,w} = 1]\big) && \text{indépendance de } T_{u,v},\ T_{u,w} \text{ et } T_{v,w} \\
&= p^3
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p^3.

2.c. Justifier que $Z_n = \sum_{k=1}^{r} Y_k$. En déduire que $\mathbb{E}(Z_n) = \binom{n}{3} p^3$.

- Les r triangles possibles de G sont $t_1, t_2, \ldots, t_r$.
  Or, pour tout $k \in [\![1; r]\!]$, Y_k prend la valeur 1 si t_k est un triangle et 0 sinon.
  Par conséquent, $\sum_{k=1}^{r} Y_k$ compte le nombre de triangles de G ; c'est également ce que fait Z_n.

Conclusion : $Z_n = \sum_{k=1}^{r} Y_k$.

- La variable aléatoire Z_n est une somme de variables aléatoires finies qui admettent donc une espérance, elle admet ainsi également une espérance et, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{r} Y_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \mathbb{E}(Y_k) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=1}^{r} p^3 && \forall k \in [\![1; r]\!],\ Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p^3) \\
&= r p^3 \\
&= \binom{n}{3} p^3 && \text{question 1}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Z_n) = \binom{n}{3} p^3$.

Petite remarque
On peut aussi dire que Z_n est une variable aléatoire finie (car $Z_n(\Omega) \subset [\![0; r]\!]$ ou car c'est une somme de VA finies) et admet ainsi une espérance.

★Subtil...★
La linéarité de l'espérance nécessite que chaque espérance en jeu existe, ce qui est le cas ici, nous l'avons mentionné. Si nous disons simplement que Z_n admet une espérance car elle est finie, il faut mentionner, dans la linéarité de l'espérance, que chaque espérance existe.
En effet, en considérant plus généralement X une variable aléatoire qui n'admet pas d'espérance et en posant $Z = X - X$, Z est finie et admet une espérance ; mais $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas, donc impossible d'appliquer la linéarité de l'espérance.

► On s'intéresse à la variance de Z_n.
Si i et j appartiennent à $[\![1, r]\!]$ et sont différents, on note $i \equiv j$ lorsque t_i et t_j ont exactement deux éléments en commun et $i \not\equiv j$ dans le cas contraire.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (i, j) tels que $i \equiv j$, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (i, j) tels que $i \neq j$ et $i \not\equiv j$.
On désigne par a_n le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$.

3. 3.a. Montrer que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

La variable aléatoire Z_n est une somme de variables aléatoires finies qui admettent donc une variance, elle admet ainsi également une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) &= \mathrm{Cov}(Z_n, Z_n) && \text{question 2.c} \\
&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) && \text{linéarité à gauche de la covariance} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Cov}\left(Y_i, \sum_{j=1}^{r} Y_j\right) && \text{linéarité à droite de la covariance} \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) \\
&= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\mathbb{V}(Z_n) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

3.b. Montrer que si $(i, j) \in \mathcal{F}$, Y_i et Y_j sont indépendantes. En déduire que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

- Soit $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$. Supposons que $(i, j) \in \mathcal{F}$.
  Dans ce cas $i \neq j$ et $i \not\equiv j$. Ainsi t_i et t_j sont deux éléments distincts de $\mathcal{T}$ avec 0 ou 1 sommet de G en commun. Distinguons deux cas :
  - ⋆ si t_i et t_j n'ont aucun sommet en commun :
    Posons alors $t_i = \{u, v, w\}$ et $t_j = \{u', v', w'\}$ avec $u < v < w$ et $u' < v' < w'$. D'après la question 2.a, on a ainsi :

    $$Y_i = T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w} \quad ; \quad Y_j = T_{u',v'}T_{u',w'}T_{v',w'}$$

    Puisque t_i et t_j n'ont aucun sommet commun, on a $t_i \cap t_j = \varnothing$ et ainsi, les variables aléatoires $T_{u,v}$, $T_{u,w}$, $T_{v,w}$, $T_{u',v'}$, $T_{u',w'}$ et $T_{v',w'}$ sont deux à deux distinctes ; et donc indépendantes (énoncé).
    D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}$ et $T_{u',v'}T_{u',w'}T_{v',w'}$ sont doc également indépendantes.
    Conclusion : Y_i et Y_j sont indépendantes.
  - ⋆ si t_i et t_j ont exactement un sommet en commun :
    Posons alors $t_i = \{u, v, w\}$ et $t_j = \{u, v', w'\}$ avec $u < v < w$ et $u < v' < w'$. D'après la question 2.a, on a ainsi :

    $$Y_i = T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w} \quad ; \quad Y_j = T_{u,v'}T_{u,w'}T_{v',w'}$$

    Puisque t_i et t_j n'ont qu'un seul sommet commun, on a $v \neq v', w'$ et $w \neq v', w'$; et ainsi, les variables aléatoires $T_{u,v}$, $T_{u,w}$, $T_{v,w}$, $T_{u,v'}$, $T_{u,w'}$ et $T_{v',w'}$ sont deux à deux distinctes ; et donc indépendantes (énoncé).
    D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}$ et $T_{u,v'}T_{u,w'}T_{v',w'}$ sont doc également indépendantes.
    Conclusion : Y_i et Y_j sont indépendantes.

  Dans les deux cas, Y_i et Y_j sont indépendantes.

  > **Conclusion :** si $(i, j) \in \mathcal{F}$, Y_i et Y_j sont indépendantes.

En gros...
Les éléments de $\mathcal{T}$ sont des ensembles à trois points distincts de G qui peuvent être ou non reliés entre eux.

✓ Rigueur !
On préfère écrire $v \notin \{v', w'\}$ plutôt que $v \neq v', w'$, mais je trouve cette dernière écriture plus "pédagogique".

- En reprenant avec le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) &= \sum_{(i,j)\in[\![1,r]\!]^2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{F}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)
\end{aligned}$$

$[\![1; r]\!]^2 = \{(i, i),\ i \in [\![1; r]\!]\} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$, cette union étant une union d'ensembles deux à deux disjoints

d'après ce qui précède, si $(i, j) \in \mathcal{F}$, alors Y_i et Y_j sont indépendantes, donc $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

Conclusion : $\mathbb{V}(Z_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

3.c. En conclure que :

$$\mathbb{V}(Z_n) = rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)\right) - a_n p^6$$

En reprenant avec la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z_n) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) && \text{formule de Koenig-Huygens} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \big(\mathbb{E}(Y_iY_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j)\big) && \text{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{V}(Y_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j) - \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j) && \text{pour tout } i \in [\![1;r]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p^3), \text{ donc } \mathbb{E}(Y_i) = p^3 \text{ et } \mathbb{V}(Y_i) = p^3(1-p^3) \\
&= \sum_{i=1}^{r} p^3(1-p^3) \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j) - \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} p^6 && \mathrm{Card}(\mathcal{E}) = a_n \\
&= rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)\right) - a_n p^6
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(Z_n) = rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)\right) - a_n p^6$

► On note $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)$.

4. Montrer que si $i \equiv j$, alors $\mathbb{E}(Y_iY_j) = p^5$ et en déduire que $\Delta_n = a_n p^5$.
En conclure que : $\mathbb{V}(Z_n) = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + a_n(p^5 - p^6)$.

À retenir...
Profitons de cette question pour rappeler quelques petites choses qu'il est bon de connaître sur les Bernoulli...
- Si X suit une loi de Bernoulli, alors $X^2 = X$.
- Si X et Y suivent des lois de Bernoulli, alors XY suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $(1-X) \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$.

- Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Supposons $i \equiv j$.
Dans ce cas, les ensembles t_i et t_j ont exactement deux sommets de G en commun. Notons alors $t_i = \{u, v, w\}$ et $t_j = \{u, v, w'\}$, avec $u < v < w$, $u < v < w'$ et $w \neq w'$.
Ainsi, d'après la question 2.a :

$$Y_i = T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w} \quad ; \quad Y_j = T_{u,v}T_{u,w'}T_{v,w'}$$

Puisque Y_i et Y_j suivent des lois de Bernoulli, la variable aléatoire Y_iY_j également et donc son espérance est égale à son paramètre, lui-même égal à $\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big)$.
Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\big) &= \mathbb{P}\big([T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}=1]\cap[T_{u,v}T_{u,w'}T_{v,w'}=1]\big) && T_{_,_}(\Omega) = \{0;1\} \\
&= \mathbb{P}\big([T_{u,v}=1]\cap[T_{u,w}=1]\cap[T_{v,w}=1]\cap[T_{u,v}=1]\cap[T_{u,w'}=1]\cap[T_{v,w'}=1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([T_{u,v}=1]\cap[T_{u,w}=1]\cap[T_{v,w}=1]\cap[T_{u,w'}=1]\cap[T_{v,w'}=1]\big) && u<v<w,\ u<v<w' \text{ et } w\neq w', \text{ donc les variables aléatoires } T_{_,_} \text{ en jeu sont indépendantes} \\
&= \mathbb{P}\big([T_{u,v}=1]\big)\mathbb{P}\big([T_{u,w}=1]\big)\mathbb{P}\big([T_{v,w}=1]\big)\mathbb{P}\big([T_{u,w'}=1]\big)\mathbb{P}\big([T_{v,w'}=1]\big) \\
&= p^5
\end{aligned}$$

Conclusion : si $i \equiv j$, alors $\mathbb{E}(Y_iY_j) = p^5$.

Autres méthodes...

Donnons deux autres façons de procéder, les trois méthodes étant intéressantes, à comprendre et à savoir faire ! Le début reste identique en introduisant les notations et la décomposition de Y_i et Y_j avec les variables aléatoires $T_{\_,\_}$.
1# On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_iY_j) &= \mathbb{E}\big(T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}T_{u,v}T_{u,w'}T_{v,w'}\big) \\
&= \mathbb{E}\big(T_{u,v}^2T_{u,w}T_{v,w}T_{u,w'}T_{v,w'}\big) && T_{u,v} \text{ suit une loi de Bernoulli, donc } T_{u,v}^2 = T_{u,v}. \\
&= \mathbb{E}\big(T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}T_{u,w'}T_{v,w'}\big) && u<v<w,\ u<v<w' \text{ et } w\neq w', \text{ donc les variables aléatoires } T_{_,_} \text{ en jeu sont indépendantes} \\
&= \mathbb{E}(T_{u,v})\mathbb{E}(T_{u,w})\mathbb{E}(T_{v,w})\mathbb{E}(T_{u,w'})\mathbb{E}(T_{v,w'}) \\
&= p^5
\end{aligned}$$

Conclusion : si $i \equiv j$, alors $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = p^5$.

2# Par théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_i Y_j) &= \sum_{(k,\ell)\in Y_i(\Omega)\times Y_j(\Omega)} k\ell\,\mathbb{P}\big([Y_i = k]\cap[Y_j = \ell]\big) && Y_i(\Omega) = Y_j(\Omega) = \{0;1\}\\ &= \mathbb{P}\big([Y_i = 1]\cap[Y_j = 1]\big)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Y_i = 1]\cap[Y_j = 1]\big) &= \ldots && \text{détails ci-dessus}\\ &= p^5\end{aligned}$$

Conclusion : si $i \equiv j$, alors $\mathbb{E}(Y_i Y_j) = p^5$.

- On a ainsi :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} p^5 && \mathrm{Card}(\mathcal{E}) = a_n\\ &= a_n p^5\end{aligned}$$

- En reprenant avec la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Z_n) &= rp^3(1-p^3) + \left(\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_i Y_j)\right) - a_n p^6 && \text{point précédent}\\ &= rp^3(1-p^3) + a_n p^5 - a_n p^6 && \text{question 1}\\ &= \binom{n}{3}(p^3-p^6) + a_n(p^5-p^6)\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{V}(Z_n) = \binom{n}{3}(p^3-p^6) + a_n(p^5-p^6)$.

5. Calcul de a_n.

5.a. Déterminer le nombre de triplets $\big(\{u,v\},w,y\big)$ où (u,v,w,y) sont quatre éléments distincts de l'ensemble $[\![0,n-1]\!]$.

Choisir un tel triplet c'est choisir successivement :

- une partie à 2 éléments de $[\![0;n-1]\!]$: $\binom{n}{2}$ choix possibles,
- un élément de $[\![0;n-1]\!]$ différents des deux précédemment choisis : $n-2$ choix possibles,
- un élément de $[\![0;n-1]\!]$ différents des trois précédemment choisis : $n-3$ choix possibles.

Il y a donc $\binom{n}{2}(n-2)(n-3)$ tels triplets possibles.

Conclusion : le nombre de triplets $\big(\{u,v\},w,y\big)$ où (u,v,w,y) sont quatre éléments distincts de l'ensemble $[\![0,n-1]\!]$ est égal à $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

5.b. En déduire que $a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

On sait que a_n est le nombre de paires d'éléments de $\mathcal{T}$ différents ayant exactement deux sommets en commun.

Or, choisir deux éléments de $\mathcal{T}$ différents ayant exactement deux sommets en commun, c'est :

- choisir ces deux sommets en commun, donc choisir une partie $\{u,v\}$, avec $u,v \in [\![0;n-1]\!]$,
- choisir deux autres sommets différents et différents des deux premiers, un pour chaque élément de $\mathcal{T}$.

Par conséquent : a_n est égal au nombre de triplets évoqués en question précédente.

Petite remarque

Pas si simple de rédiger cette question sans tomber dans des banalités. Qu'attendaient les correcteurs ?!

Conclusion : $a_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$.

Partie 2 - Nombre aléatoire de triangles

On se donne un graphe G généré par le procédé décrit dans le préambule.

On définit la fonction `supprimeDer(L)` qui, si `L` est la liste des listes d'adjacence du graphe G dont les sommets sont $0, 1, \ldots, n-1$ modifie `L` afin qu'elle devienne la liste des listes d'adjacence du graphe G', dont les sommets sont $0, 1, \ldots, n-2$, obtenu en supprimant dans G le sommet $n-1$ et les arêtes contenant ce sommet.

```python
def supprimeDer(L):
    s = len(L)-1
    L.pop()      # supprime le dernier élément de la liste L
    for a in L:
        if s in a:
            a.remove(s) # supprime s dans la liste a
```

6. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne le nombre de triangles dont un des sommets est le sommet **s** dans le graphe G dont la liste des listes d'adjacence est **L** :

```python
def triangles2s(s,L):
    cpt = 0
    adj = L[s]
    for i in range(len(adj)):
        for j in range(...,len(adj)):
            if ... in L[...]:
                cpt += 1
    return cpt
```

Voici :

```python
def triangles2s(s,L):
    cpt = 0
    adj = L[s] #adj=liste d'adj de s
    for i in range(len(adj)):
        for j in range(i+1,len(adj)):
            if adj[i] in L[adj[j]]:
                cpt += 1
    return cpt
```

Petite remarque

Pas si simple... Il ne faut pas s'embrouiller, puisque i et j parcourent les rangs des sommets dans les listes d'adjacence, et pas les sommets !
On pourrait faire autrement, en parcourant les sommets plutôt que leurs rangs à condition que :
- soit les sommets dans les listes d'adjacences sont rangés par ordre croissant,
- soit on parcourt à chaque fois tous les sommets et on divise alors le compteur par 2 (car on aura compté 2 fois chaque triangle).

Deux autres propositions, un peu différentes

Voici deux autres programmes, très proches, qui fonctionnent également et testés sur le graphe initial.
1# Si les sommets dans les listes d'adjacences sont rangés par ordre croissants (ce qui n'est pas une contrainte forte, au pire, il suffit de les ordonner...) :

```python
S=range(0,5)
L=[[2,4],[2,3,4],[0,1,4],[1,4],[0,1,2,3]]

def triangles2s(s,L):
    cpt=0
    adj=L[s]
    for x in adj:
      for y in adj:
          if y>x and y in L[x]:
              cpt+=1
    return cpt
```

☞ Pour info...

La commande **L.sort()** renvoie la liste **L** ordonnée dans l'ordre croissant...

2# Si on parcourt à chaque fois tous les sommets et on divise alors le compteur par 2 :

```python
S=range(0,5)
L=[[2,4],[2,3,4],[0,1,4],[1,4],[0,1,2,3]]

def triangles2s(s,L):
    cpt=0
    adj=L[s]
    for x in adj:
      for y in adj:
          if y in L[x]:
              cpt+=1
    return cpt/2
```

7. Écrire une fonction **nbTriangles(L)**, utilisant les deux fonctions précédentes, qui retourne le nombre de triangles du graphe G dont la liste des listes d'adjacence est représentée par **L**.
Voici :

```python
def nbTriangles(L):
    cpt=0
```

```python
    n=len(L) #nb de sommets du graphe
    for i in range(n):
        s=n-1-i #supprimeDer supprime le dernier sommet, pas le premier
        cpt+=triangles2s(s,L)
        supprimeDer(L)
    return cpt
```

8. On suppose que la fonction **`graphe(n,p)`** génère un graphe aléatoire suivant les hypothèses décrites dans le préambule. Expliquer ce que retourne la fonction suivante :

```python
def fonctionMystere(n):
    cpt = 0
    for i in range(1000):
        L = graphe(n,1/n)
        if nbTriangles(L) == 0:
            cpt += 1
    return cpt/1000
```

La fonction ci-dessus simule la création de 1000 graphes aléatoires à n sommets, avec une probabilité de création de chaque arête égale à $\frac{1}{n}$.
Elle renvoie ensuite la fréquence, sur ces 1000 graphes, du nombre de graphes ne contenant aucun triangle. Par conséquence de la loi faible des grands nombres, la fonction **`fonctionMystere`** renvoie une valeur approchée de la probabilité qu'un tel graphe aléatoire ne contienne aucun triangle.

Conclusion : la fonction **`fonctionMystere`** renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}\left([Z_n = 0]\right)$ lorsque $p = \frac{1}{n}$.

Précisions sur la LfGN...

Rappelons l'énoncé de la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes **la même espérance** $\boldsymbol{m}$ et **la même variance** $\boldsymbol{\sigma^2}$ (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([|\overline{X_n} - m| \geqslant \varepsilon]\right) = 0$$

Conséquence : pour n suffisamment grand, on peut considérer qu'une réalisation de $\overline{X_n}$ fournit une valeur approchée de m.

Appliquée dans le cas où les X_k suivent des lois de Bernoulli de paramètre p, on a $m = p$ et $\overline{X_n}$ est le quotient du nombre de succès sur le nombre de répétitions : $\overline{X_n}$ est donc la fréquence de succès sur n répétitions.
Puisque la loi faible des grands nombres affirme que, lorsque n est grand, les réalisations de $\overline{X_n}$ sont proches de m, dans ce cas, elle permet d'affirmer que lorsque n est grand la fréquence d'apparition du succès est proche de p, qui est la probabilité du succès.

Partie 3 - Inégalité de Harris

k désigne un entier naturel non nul.

- Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Si $k \geqslant 2$, on dit que f est k-croissante sur $\mathcal{D}$ si, pour tout $(x_1, \dots, x_k)$ élément de $\mathcal{D}$ et $i \in [\![1, k]\!]$, $t \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k)$ est croissante sur son ensemble de définition.
  Si $k = 1$, une fonction 1-croissante sur $\mathcal{D}$ est simplement une fonction croissante sur $\mathcal{D}$.

En gros...
f est k-croissante sur $\mathcal{D}$ lorsque toutes ses applications partielles sont croissantes sur leur ensemble de définition (qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).

- On définit de même la notion de fonction k-décroissante.
- On considère $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires finies.
  On admet le résultat suivant (théorème de transfert d'ordre k) :

Si f est une fonction définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega)$ et $Y_k = f(X_1, \dots, X_k)$ alors

$$\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_k(\Omega)} f(x_1, \dots, x_k)\mathbb{P}\left([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k]\right)$$

On note (H_k) la propriété suivante :

Si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \ldots \times X_k(\Omega)$ et k-croissantes sur cet ensemble, et si l'on pose $Y_k = f(X_1, \ldots, X_k)$ et $Z_k = g(X_1, \ldots, X_k)$, alors :

$$\mathbb{E}(Y_k Z_k) \geqslant \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Z_k) \qquad \text{(inégalité de Harris)}$$

9. Dans cette question, $k = 1$, on pose $X = X_1$ une variable aléatoire finie, f et g sont deux fonctions croissantes sur $X(\Omega)$.

9.a. Montrer que pour tout $(x, y) \in \big(X(\Omega)\big)^2$, $\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$.

Soit $(x, y) \in \big(X(\Omega)\big)^2$. Distinguons deux cas :

- Si $x \leqslant y$:
  Comme f et g sont croissantes sur $X(\Omega)$, on a alors :
  $$f(x) \leqslant f(y) \quad ; \quad g(x) \leqslant g(y)$$
  D'où :
  $$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$$
- Si $x > y$:
  Comme f et g sont croissantes sur $X(\Omega)$, on a alors :
  $$f(x) \geqslant f(y) \quad ; \quad g(x) \geqslant g(y)$$
  D'où :
  $$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$$

Conclusion : pour tout $(x, y) \in \big(X(\Omega)\big)^2$, $\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$.

9.b. Montrer que pour tout $y \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

Soit $y \in X(\Omega)$.
D'après la question précédente :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$$

Autrement dit, en développant et ajustant :

$$\forall x \in X(\omega),\ f(x)g(x) + f(y)g(y) \geqslant f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

D'où :

$$\forall x \in X(\omega),\ f(x)g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) + f(y)g(y)\mathbb{P}\big([X = x]\big) \geqslant f(x)g(y)\mathbb{P}\big([X = x]\big) + f(y)g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big)$$

Puis, en sommant pour $x \in X(\Omega)$, licite car $X(\Omega)$ est fini et par linéarité de la somme :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) + f(y)g(y) \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\big) \geqslant g(y) \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) + f(y) \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)$$

Or :

- $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 1$,
- par théorème de transfert : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) = \mathbb{E}\big(f(X)\big)$ et $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) = \mathbb{E}\big(g(X)\big)$,
- et par théorème de transfert sur les couples : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big) = \mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big)$.

D'où le résultat.

★ Classique ! ★
Le théorème de transfert (pour une seule VA ou pour un couple de VA) est un résultat très souvent utilisé dans les sujets TOP3.
Attention à sa version "à densité" qui nécessite la continuité de la fonction en jeu sur $X(\Omega)$...

Conclusion : pour tout $y \in X(\Omega)$, $\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$.

Autre méthode...

Procédons différemment...
Soit $y \in X(\Omega)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, d'après la question précédente appliquée avec $x = X(\omega)$, licite car $X(\omega) \in X(\Omega)$, on a :

$$\Big(f\big(X(\omega)\big) - f(y)\Big)\Big(g\big(X(\omega)\big) - g(y)\Big) \geqslant 0$$

Autrement dit, en développant et ajustant :

$$\forall \omega \in \Omega,\ f\big(X(\omega)\big)g\big(X(\omega)\big) + f(y)g(y) \geqslant f\big(X(\omega)\big)g(y) + f(y)g\big(X(\omega)\big)$$

Nous avons ainsi établi l'inégalité de variables aléatoires suivante :

$$f(X)g(X) + f(y)g(y) \geqslant f(X)g(y) + f(y)g(X)$$

D'où le résultat, par croissance de l'espérance et linéarité de l'espérance, licite car chaque variable aléatoire en jeu est finie donc admet une espérance...
Conclusion : pour tout $y \in X(\Omega)$, $\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$.

9.c. En déduire que (H_1) est vraie.

Pour démontrer (H_1), démontrons, sous les hypothèses de la question 9 :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

D'après la question précédente :

$$\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + f(y)g(y) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

D'où :

$$\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big)\mathbb{P}\big([Y=y]\big) + f(y)g(y)\mathbb{P}\big([Y=y]\big) \geqslant g(y)\mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{P}\big([Y=y]\big) + f(y)\mathbb{E}\big(g(X)\big)\mathbb{P}\big([Y=y]\big)$$

Puis, en sommant pour $y \in X(\Omega)$, licite car $X(\Omega)$ est fini et par linéarité de la somme :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big)\sum_{y\in X(\Omega)}\mathbb{P}\big([Y=y]\big) + \sum_{y\in X(\Omega)} f(y)g(y)\mathbb{P}\big([Y=y]\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X)\big)\sum_{y\in X(\Omega)} g(y)\mathbb{P}\big([Y=y]\big) + \mathbb{E}\big(g(X)\big)\sum_{y\in X(\Omega)} f(y)\mathbb{P}\big([Y=y]\big)$$

D'où, par les mêmes arguments qu'en question précédente :

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) + \mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big) + \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

Autrement dit :

$$2\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geqslant 2\mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

Conclusion : (H_1) est vraie : si X est une variable aléatoire finie et que f et g sont deux fonctions croissantes sur $X(\Omega)$, alors $\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$.

Petite remarque
On retrouvait presque la même question dans la question 6 de `ESSEC 2020 E`, disponible ici et dont un corrigé est visible là.

10. On suppose que (H_k) est vraie pour un certain k et on considère $X_1, \dots, X_{k+1}$ des variables aléatoires finies indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k+1}(\Omega)$ et $(k+1)$-croissantes.
On pose $Y_{k+1} = f(X_1, \dots, X_{k+1})$ et $Z_{k+1} = g(X_1, \dots, X_{k+1})$.

10.a. À l'aide des théorèmes de transfert d'ordre $k+1$ et k, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x)\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = x]\big)$$

☞ Rappels...
De façon générale :
• l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ ne suffit pas à l'existence de $\mathbb{E}(XY)$ (prendre $X = Y$ pour s'en convaincre)
• si $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ existent, alors $\mathbb{E}(XY)$ existe (démonstration à connaître).

Notation : dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{D}_k = X_1(\Omega) \times \dots \times X_k(\Omega)$ et $\mathcal{D}_{k+1} = X_1(\Omega) \times \dots \times X_{k+1}(\Omega)$.
Puisque Y_{k+1} et Z_{k+1} sont finies, $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1})$ existe et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) &= \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_{k+1})g(X_1, \dots, X_{k+1})\big) \\
&= \mathbb{E}\big((fg)(X_1, \dots, X_{k+1})\big) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_{k+1})\in\mathcal{D}_{k+1}} (fg)(x_1, \dots, x_{k+1})\mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_{k+1} = x_{k+1}]\big) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_{k+1})\in\mathcal{D}_{k+1}} (fg)(x_1, \dots, x_{k+1})\mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k]\big) \times \mathbb{P}\big([X_{k+1} = x_{k+1}]\big) \\
&= \sum_{x_{k+1}\in X_{k+1}(\Omega)} \left(\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in\mathcal{D}_k} (fg)(x_1, \dots, x_{k+1})\mathbb{P}\big([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_k = x_k]\big) \right) \mathbb{P}\big([X_{k+1} = x_{k+1}]\big) \\
&= \sum_{x_{k+1}\in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big((fg)(X_1, \dots, X_k, x_{k+1})\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = x_{k+1}]\big)
\end{aligned}$$

théorème de transfert à l'ordre $k+1$

indépendance de $X_1, \dots, X_{k+1}$

théorème de transfert à l'ordre k appliqué à la fonction $(x_1, \dots, x_k) \longmapsto (fg)(x_1, \dots, x_{k+1})$ (fonction de k variables)

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x)\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1} = x]\big)$.

10.b. Justifier que pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$:

$$\mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)g(X_1, \dots, X_k, x)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X_1, \dots, X_k, x)\big)\mathbb{E}\big(g(X_1, \dots, X_k, x)\big)$$

Soit $x \in X_{k+1}(\Omega)$.
Posons :

$$\widetilde{f} : (x_1, \dots, x_k) \longmapsto f(x_1, \dots, x_{k+1}) \quad ; \quad \widetilde{g} : (x_1, \dots, x_k) \longmapsto g(x_1, \dots, x_{k+1})$$

Puisque f est $(k+1)$-croissante sur $\mathcal{D}_{k+1}$, la fonction $\widetilde{f}$ est k-croissante sur $\mathcal{D}_k$; de même pour $\widetilde{g}$. Ainsi, d'après (H_k), licite car $X_1, \dots, X_k$ sont finies et indépendantes :

$$\mathbb{E}\big(\widetilde{f}(X_1, \dots, X_k)\widetilde{g}(X_1, \dots, X_k)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(\widetilde{f}(X_1, \dots, X_k)\big)\mathbb{E}\big(\widetilde{g}(X_1, \dots, X_k)\big)$$

D'où le résultat.

Conclusion : pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$:

$$\mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)g(X_1,\dots,X_k,x)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)\big)\mathbb{E}\big(g(X_1,\dots,X_k,x)\big)$$

10.c. On pose pour tout $x \in X_{k+1}(\Omega)$, $u(x) = \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)\big)$ et $v(x) = \mathbb{E}\big(g(X_1,\dots,X_k,x)\big)$.
Montrer que u et v sont croissantes sur $X_{k+1}(\Omega)$ et $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant \mathbb{E}\big(u(X_{k+1})v(X_{k+1})\big)$.

- Soient $x, y \in X_{k+1}(\Omega)$. Supposons $x \leqslant y$.
Puisque f est $(k+1)$-croissante sur $\mathcal{D}_{k+1}$, pour tout $(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{D}_k$, la fonction $t \longmapsto f(x_,1\dots,x_k,t)$ est croissante sur $X_{k+1}(\Omega)$. D'où :

$$\forall (x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{D}_k,\ f(x_1,\dots,x_k,x) \leqslant f(x_1,\dots,x_k,y)$$

Ainsi :

$$\forall (x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{D}_k,\ f(x_1,\dots,x_k,x)\mathbb{P}\big([X_1=x_1]\cap\dots\cap[X_k=x_k]\big) \leqslant f(x_1,\dots,x_k,y)\mathbb{P}\big([X_1=x_1]\cap\dots\cap[X_k=x_k]\big)$$

Puis, en sommant pour $(x_1,\dots,x_k) \in \mathcal{D}_k$, licite car D_k est fini (produit cartésien d'ensembles finis) :

$$\sum_{(x_1,\dots,x_k)\in\mathcal{D}_k} f(x_1,\dots,x_k,x)\mathbb{P}\big([X_1=x_1]\cap\dots\cap[X_k=x_k]\big) \leqslant \sum_{(x_1,\dots,x_k)\in\mathcal{D}_k} f(x_1,\dots,x_k,y)\mathbb{P}\big([X_1=x_1]\cap\dots\cap[X_k=x_k]\big)$$

Autrement dit, par théorème de transfert d'ordre k appliqué à $(x_1,\dots,x_k) \longmapsto f(x_1,\dots,x_k,x)$ et $(x_1,\dots,x_k) \longmapsto f(x_1,\dots,x_k,y)$:

$$\mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)\big) \leqslant \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,y)\big)$$

C'est-à-dire :

$$u(x) \leqslant u(y)$$

Conclusion : u est croissante sur $X_{k+1}(\Omega)$.

- On raisonne de la même façon pour v...

Conclusion : v est croissante sur $X_{k+1}(\Omega)$.

- Ensuite :
  - ⋆ d'après la question **10.a** :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) = \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)g(X_1,\dots,X_k,x)\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1}=x]\big)$$

  - ⋆ d'après la question **10.b** :

$$\forall x \in X_{k+1}(\Omega),\ \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)g(X_1,\dots,X_k,x)\big) \geqslant \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)\big)\mathbb{E}\big(g(X_1,\dots,X_k,x)\big)$$

    Autrement dit :

$$\forall x \in X_{k+1}(\Omega),\ \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)g(X_1,\dots,X_k,x)\big) \geqslant u(x)v(x)$$

    Et ainsi :

$$\sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} \mathbb{E}\big(f(X_1,\dots,X_k,x)g(X_1,\dots,X_k,x)\big)\mathbb{P}\big([X_{k+1}=x]\big) \geqslant \sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} u(x)v(x)\mathbb{P}\big([X_{k+1}=x]\big)$$

  - ⋆ par théorème de transfert :

$$\sum_{x\in X_{k+1}(\Omega)} u(x)v(x)\mathbb{P}\big([X_{k+1}=x]\big) = \mathbb{E}\big(u(X_{k+1}v(X_{k+1})\big)$$

  D'où le résultat, en combinant ces trois points.

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant \mathbb{E}\big(u(X_{k+1})v(X_{k+1})\big)$.

Petite remarque
Peut-être que les liens auraient mieux été aperçus en introduisant u et v en début de question **10.a**...

10.d. En conclure que (H_{k+1}) est vraie. Conclure.

- D'après la question précédente, u et v sont croissantes sur $X_{k+1}(\Omega)$, ainsi, d'après (H_1) :

$$\mathbb{E}\big(u(X_{k+1})v(X_{k+1})\big) \geqslant \mathbb{E}\big(u(X_{k+1})\big)\mathbb{E}\big(v(X_{k+1})\big)$$

Ainsi, d'après la question précédente et par transitivité :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant \mathbb{E}\big(u(X_{k+1})\big)\mathbb{E}\big(v(X_{k+1})\big)$$

Or, d'après la question **10.a** avec $g : (x_1,\dots,x_{k+1}) \longmapsto 1$, qui est $(k+1)$-croissante sur $\mathcal{D}_{k+1}$, on obtient :

$$\mathbb{E}\big(u(X_{k+1})\big) = \mathbb{E}(Y_{k+1})$$

et de façon analogue :

$$\mathbb{E}\big(v(X_{k+1})\big) = \mathbb{E}(Z_{k+1})$$

Conclusion : $\mathbb{E}(Y_{k+1}Z_{k+1}) \geqslant \mathbb{E}(Y_{k+1})\mathbb{E}(Z_{k+1})$.
On a donc finalement démontré (H_{k+1}).

- On a ainsi établi :
  - (H_1), en question **9.c** ;
  - $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\big((H_k) \Longrightarrow (H_{k+1})\big)$ en question **10**.

Conclusion : on a démontré, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, (H_k) est vraie.

10.e. La propriété (H_k) reste-t-elle vraie si f et g sont k-décroissantes ? Justifier votre réponse.
Que se passe-t-il si l'une est k-croissante et l'autre k-décroissante ?

- Si f et g sont k-croissantes, l'inégalité de Harris reste vraie.
  En effet :
  - (H_1) sera vraie, car le résultat de la questin **9.a** est encore valable si f et g sont décroissantes...
  - on pourra établir $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\big((H_k) \Longrightarrow (H_{k+1})\big)$ comme précédemment, en utilisant les fonctions u et v qui seront cette fois décroissantes sur $X_{k+1}(\Omega)$, mais (H_1) étant valable pour les fonctions décroissantes, on aboutira au même résultat.
- Si l'une est k-croissante et l'autre est k-décroissante, alors l'inégalité de Harris est la suivante :

$$\mathbb{E}(Y_k Z_k) \leqslant \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Z_k)$$

En effet, le résultat de la question **9.a** serait alors dans le cas où f est décroissante et g croissante :

$$\forall (x,y) \in \big(X(\Omega)\big)^2,\ \big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big) \leqslant 0$$

Et le reste suivrait de façon analogue...

Partie 4 – Inégalité de Janson et application

On reprend les notations de la partie 1.

De plus, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Z_{n,i} = \sum_{k=1}^{i} Y_k$. On remarquera que $Z_{n,r} = Z_n$.

Dans cette partie on établit un encadrement de $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$.

11. Justifier que $\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0] \subset [Z_n = 0]$. En déduire que

$$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant (1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$$

- Supposons l'évènement $\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0]$ réalisé.
  Autrement dit, pour tout $(u,v) \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $u < v$ l'évènement $[T_{u,v} = 0]$ est réalisé. Par conséquent, le graphe en question ne contient aucune arête ; et donc ne contient aucun triangle.
  L'évènement $[Z_n = 0]$ est donc également réalisé.

Conclusion : $\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0] \subset [Z_n = 0]$.

- D'après ce qui précède, par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0]\right) \leqslant \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)$$

Or, par indépendance des $T_{\_,\_}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0]\right) &= \prod_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} \mathbb{P}\big([T_{u,v} = 0]\big) && T_{\_,\_} \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \\ &= \prod_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} (1-p) && \text{choisir 2 élments distincts de } [\![0; n-1]\!] : \binom{n}{2} \text{ choix possibles ; puis une seule façon de les ordonner} \\ &= (1-p)^{\binom{n}{2}}\end{aligned}$$

Puisque $p \in]0;1[$, on a bien $(1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$...

♡ Astuce du chef ! ♡
L'énoncé mentionne de "justifier" cette inclusion ; une explication suffit donc. S'il avait été question de "démontrer", on aurait mis en place un raisonnement plus mathématique (en considérant une issue de $\bigcap_{0 \leqslant u < v \leqslant n-1} [T_{u,v} = 0]$...).

Petites remarques
- On peut justifier autrement le cardinal de $\{(u,v) \mid 0 \leqslant u < v \leqslant n-1\}$:
  u peut prendre les valeurs de 0 à $n-2$...
  Si $u = 0$, il y a $n-1$ choix pour v ; si $u = 1$, il y a $n-2$ choix pour v... ; si $u = n-2$, il y a un seul choix pour v. Il y a donc $\sum_{i=1}^{n-1} i$ choix possibles...
- On peut aussi s'amuser à colorier les cases d'un tableau à n lignes (pour $u \in [\![0; n-1]\!]$) et n colonnes (pour $v \in [\![0; n-1]\!]$) qui satisfont $u < v$: il s'agit alors du triangle supérieur strict de ce tableau, qui contient $\frac{n(n-1)}{2}$ cases (n^2 cases au total dans le tableau, moins la diagonale, et on divise par 2...).

> **Conclusion :** $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant (1-p)^{\binom{n}{2}} > 0$.

12. Montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) = \mathbb{E}(1 - Y_i)$ et $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)\right)$.

Soit $i \in [\![1; r]\!]$.

- D'après la question 2.b, Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^3, d'où :

$$\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) = 1 - p^3 \quad ; \quad \mathbb{E}(Y_i) = p^3$$

D'où le résultat, par linéarité de l'espérance.

> **Conclusion :** $\forall i_i n[\![1; r]\!],\ \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) = \mathbb{E}(1 - Y_i)$.

- Ensuite :
  - ⋆ d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) &= \mathbb{P}\left(\left[\sum_{k=1}^{i} Y_k = 0\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i}[Y_k = 0]\right)\end{aligned} \qquad \forall k \in [\![1; i]\!],\ Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$$

  - ⋆ d'autre part :

Pour tout $k \in [\![1; i]\!]$, Y_k suit une loi de Bernoulli ; donc $1 - Y_k$ également. Par conséquent, $\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre noté p'. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k) = 1\right) &= p' \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k) = 1\right]\right) \qquad \forall k \in [\![1; i]\!],\ (1 - Y_k)(\Omega) = \{0; 1\} \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i}[1 - Y_k = 1]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i}[Y_k = 0]\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat, en combinant les deux points ci-dessus.

> **Conclusion :** $\forall i \in [\![1; r]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)\right)$.

13. 13.a. On pose $m = \binom{n}{2}$. Justifier brièvement que, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k s'exprime comme une fonction m-croissante sur $\{0, 1\}^m$ des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

En déduire que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $1 - Y_i$ puis $\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)$ s'expriment comme des fonctions m-décroissantes des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

- Soit $k \in [\![1; r]\!]$. Notons alors $t_k = \{u, v, w\}$, avec $u, v, w \in [\![0; n-1]\!]$ tels que $u < v < w$.
D'après la question 2.a, on a $Y_k = T_{u,v} T_{v,w} T_{u,w}$.
Il existe donc $a_k, b_k, c_k \in [\![1; m]\!]$ distincts tels que $Y_k = f_k\big((T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}\big)$, où f_k est la fonction définie sur $\{0; 1\}^m$ par :

$$\forall (x_1, \dots, x_m) \in \{0; 1\}^m,\ f_k(x_1, \dots, x_m) = x_{a_k} x_{b_k} x_{c_k}$$

  - ⋆ Soit $x_{b_k}, x_{c_k} \in \{0; 1\}$. Puisque x_{b_k} et x_{c_k} sont positifs, la fonction $t \longmapsto t x_b x_c$ est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $\{0; 1\}$.
  - ⋆ De même, les fonctions $t \longmapsto x_{a_k} t x_{c_k}$ et $t \longmapsto x_{a_k} x_{b_k} t$ sont croissantes sur $\{0; 1\}$.
  - ⋆ Et la fonction f est constante en chacune des autres variables... donc chaque application partielle est croissante sur $\{0; 1\}$.

On a ainsi démontré que pour tout $i \in [\![1; m]\!]$, la i-ème application partielle de f_k est croissante sur $\{0; 1\}$.
Par conséquent : f_k est m-croissante sur $\{0; 1\}^m$.

♡ L'avis du chef ! ♡

Question difficile et sans trop d'intérêt. A fuir assez rapidement...
Je ne l'ai pas traitée "brièvement" !

Petite remarque

a_k, b_k et c_k sont respectivement les rangs des variables aléatoires $T_{u,v}$, $T_{v,w}$ et $T_{u,w}$ dans le m-uplet $(T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}$. C'est moche, mais l'énoncé cherche les embrouilles aussi...

Petite remarque

Pas simple comme question...
Je fais le choix de la rédiger de la façon la plus précise, malgré les lourdeurs d'écriture que cela entraîne (on n'est pas à cela près dans ce sujet...). L'énoncé mentionne de "justifier brièvement" : les correcteurs veulent s'assurer de la bonne compréhension de l'idée par les candidates et candidats. On pourrait donc se contenter de moins...
Mettre un peu de vocabulaire, en parlant d'application partielle, aide à prouver la bonne compréhension.

Conclusion : pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, Y_k s'exprime comme une fonction m-croissante sur $\{0,1\}^m$ des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

- Soit $i \in [\![2; r]\!]$.
  - ⋆ En reprenant les notations introduites dans le point précédent, on a :

$$1 - Y_i = 1 - f_i\Big((T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}\Big)$$

Et, puisque pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, la j-ième application partielle de f_i est croissante sur $\{0; 1\}$, la j-ième application partielle de $1 - f_i$ sera décroissante sur $\{0; 1\}$.
  - ⋆ Ensuite :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k) &= \prod_{k=1}^{i-1}\Big(1 - f_k\Big((T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}\Big)\Big)\\ &= \left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - f_k)\right)\Big((T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}\Big)\end{aligned}$$

Confusion d'objets !
Attention, il s'agit de l'évaluation de la fonction $\prod_{k=1}^{i-1}(1 - f_k)$ en le m-uplet $\big((T_{x,y})_{0 \leqslant x < y \leqslant n-1}\big)$.

Montrons maintenant que la fonction $\prod_{k=1}^{i-1}(1 - f_k)$ est m-décroissante sur $\{0; 1\}^m$. Pour cela, montrons que pour tout $j \in [\![1; m]\!]$, sa j-ième application partielle est décroissante sur $\{0; 1\}$.
Soit $j \in [\![1; m]\!]$. Soit $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m \in \{0; 1\}$. La fonction $t \longmapsto \left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - f_k)\right)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ est le produit des j-ième applications partielles de $1 - f_1, \ldots, 1 - f_{i-1}$ qui sont toutes décroissantes et positives sur $\{0; 1\}$ (car f_k prend comme valeurs le produits de trois nombres de $\{0; 1\}$). Par conséquent, la fonction $t \longmapsto \left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - f_k)\right)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ est également décroissante sur $\{0; 1\}$.
D'où le résultat...

☞ Rappels...
• la somme de fonctions croissantes est croissante,
• la somme de fonctions décroissantes est décroissante,
• le produit de fonctions croissantes positives est croissante,
• le produit de fonctions décroissantes positives est décroissante.
Pour démontrer ces résultats, on commence par le faire pour deux fonctions (à savoir faire, avec ou sans hypothèse de dérivabilité), puis on étend à N fonctions par récurrence.

Conclusion : pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $1 - Y_i$ puis $\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)$ s'expriment comme des fonctions m-décroissantes des variables aléatoires $T_{u,v}$ pour $u < v$ éléments de $[\![0, n-1]\!]$.

13.b. En conclure que, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$ puis que :

$$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{r}\mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$$

- Soit $i \in [\![2; r]\!]$. On a, d'après la question 12 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i}(1 - Y_k)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)\right)(1 - Y_i)\right)\\ &\geqslant \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)\right) \times \mathbb{E}(1 - Y_i)\end{aligned}$$

inégalité de Harris, licite car les Y_k sont des fonctions m-décroissantes (question précédente) des $T_{\cdot,\cdot}$ qui sont finies et indépendantes

Or, d'après la question 12 :

$$\mathbb{E}(1 - Y_i) = \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big) \;\; ; \;\; \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{i-1}(1 - Y_k)\right) = \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)$$

Conclusion : pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)\mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$.

- Procédons par récurrence finie, pour établir :

$$\forall i \in [\![1; r]\!], \;\; \mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{i}\mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$$

⋆ **Initialisation.** Pour $i = 1$:

$$\prod_{k=1}^{1} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Y_1 = 0]\big)$$
$$= \mathbb{P}\big([Z_{n,1} = 0]\big) \qquad Z_{n,1} = Y_1$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

⋆ **Hérédité.** Soit $i \in [\![1; r-1]\!]$. Supposons que $\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$ et montrons que $\mathbb{P}\big([Z_{n,i+1} = 0]\big) \geqslant \prod\limits_{k=1}^{i+1} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$.

Par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$$

D'où, puisque $\mathbb{P}\big([Y_{i+1} = 0]\big) \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big)\mathbb{P}\big([Y_{i+1} = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{i+1} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$$

Or, d'après la question précédente, licite car $i + 1 \in [\![2; r]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}\big([Z_{n,i+1} = 0]\big) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big)\mathbb{P}\big([Y_{i+1} = 0]\big)$$

D'où par transitivité :

$$\mathbb{P}\big([Z_{n,i+1} = 0]\big) \geqslant \prod_{k=1}^{i+1} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall i \in [\![1; r]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big) \geqslant \prod\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$.

Le résultat voulu en découle, en prenant $i = r$.

> **➠Réflexe !**
> Pour établir une inégalité par récurrence, il est souvent préférable, afin de n'oublier aucun argument, de débuter l'hérédité par l'HDR.

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \geqslant \prod\limits_{k=1}^{r} \mathbb{P}\big([Y_k = 0]\big)$.

AUTRE MÉTHODE...

Pour le plaisir, une autre méthode !

⋆ Justifions que : $\forall i \in [\![2; r]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big) > 0$.
Soit $i \in [\![2; r]\!]$. On a :

$$[Z_n = 0] = \bigcap_{k=1}^{r} [Y_k = 0] \subset [Z_{n,i-1} = 0]$$

D'où, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \qquad \text{question 11}$$
$$> 0$$

Conclusion : $\forall i \in [\![2; r]\!],\ \mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big) > 0$.

⋆ D'après la question précédente, on obtient ainsi :

$$\forall i \in [\![2; r]\!],\ \frac{\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)} \geqslant \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$$

En faisant le produit, pour $i \in [\![2; r]\!]$, licite car chaque facteur est positif :

$$\prod_{i=2}^{r} \frac{\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)} \geqslant \prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$$

Or, par télescopage :

$$\prod_{i=2}^{r} \frac{\mathbb{P}\big([Z_{n,i} = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Z_{n,i-1} = 0]\big)} = \frac{\mathbb{P}\big([Z_{n,r} = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Z_{n,1} = 0]\big)} \qquad Z_{n,r} = Z_n \text{ et } Z_{n,1} = Y_1$$
$$= \frac{\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Y_1 = 0]\big)}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big)}{\mathbb{P}\big([Y_1 = 0]\big)} \geqslant \prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}\big([Y_i = 0]\big)$$

Et comme $\mathbb{P}([Y_1 = 0]) > 0$, on obtient le résultat voulu.

Conclusion : $\mathbb{P}([Z_n = 0]) \geqslant \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}([Y_k = 0])$.

Petite remarque

L'énoncé aurait très bien pu guider ainsi, ça n'aurait pas été la première fois... On peut d'ailleurs rapprocher cette question de **Ecricome2024Appli, Exercice 1, question6**, disponible ici, avec le corrigé là.

- Enfin, d'après le point précédent :

$$\mathbb{P}([Z_n = 0]) \geqslant \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}([Y_k = 0])$$

Or :

- ⋆ d'après la question 2.b : $\forall k \in [\![1, r]\!],\ Y_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p^3)$,
- ⋆ d'après la question 1 : $r = \binom{n}{3}$.

D'où le résultat.

Conclusion : $\mathbb{P}([Z_n = 0]) \geqslant (1 - p^3)^{\binom{n}{3}}$.

14. *Inégalité de Boole.* Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \ldots, B_k$ sont des événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

★ Classique ! ★

Question classique et facile...

- **Initialisation.** Pour $k = 2$:
Soient B_1 et B_2 deux évènements.D'après la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$$

Or $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \geqslant 0$.
D'où :

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2) \leqslant \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2)$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $k \in [\![2; +\infty[\![$. Supposons que "si $B_1, \ldots, B_k$ sont des évènements, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$" et montrons que "si $B_1, \ldots, B_{k+1}$ sont des évènements, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(B_i)$.
Soient $B_1 \ldots, B_{k+1}$ des évènements. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup B_{k+1}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{k+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cap B_{k+1}\right)\end{aligned}$$

formule de Poincaré

Or :

- ⋆ $\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cap B_{k+1}\right) \geqslant 0$;
- ⋆ par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$.

D'où :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(B_i)$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $k \geqslant 2$, si $B_1, \ldots, B_k$ sont des événements, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$.

- Si A est un événement de probabilité non nulle, on rappelle que la probabilité conditionnelle sachant A est notée $\mathbb{P}_A$. On admet qu'elle possède les mêmes propriétés que la probabilité $\mathbb{P}$.
En particulier l'inégalité de Boole est vérifiée par $\mathbb{P}_A$.
De plus si X est une variable finie, on note $\mathbb{E}_A(X)$ l'espérance de X pour la probabilité $\mathbb{P}_A$ ce qui signifie que :
$$\mathbb{E}_A(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}_A([X = x])$$
Cette espérance conditionnelle possède les mêmes propriétés que l'espérance, en particulier l'inégalité de Harris vue dans la partie 3.

15. Soient A, B et C trois événements tels que $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A \cap C) \neq 0$.
Montrer que $\mathbb{P}_{B\cap C}(A) \geqslant \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B)$.
D'après la formule des probabilités conditionnelles :
$$\mathbb{P}_{B\cap C}(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)} \quad ; \quad \mathbb{P}_C(A) = \frac{A\cap C}{\mathbb{P}(C)} \quad ; \quad \mathbb{P}_{A\cap C}(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(A\cap C)}$$
D'où :
$$\mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$
Or $B \cap C \subset C$, donc par croissance de $\mathbb{P}$:
$$\mathbb{P}(B\cap C) \leqslant \mathbb{P}(C)$$
Ainsi, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_*^+$, on a :
$$\frac{1}{\mathbb{P}(B\cap C)} \geqslant \frac{1}{\mathbb{P}(C)}$$
Et comme $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \geqslant 0$, on obtient :
$$\frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)} \geqslant \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

> **Conclusion :** $\mathbb{P}_{B\cap C}(A) \geqslant \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_{A\cap C}(B)$.

- On admet que les probabilités conditionnelles qui interviennent dans la suite sont bien définies.

16. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $A_i = [Y_i = 0]$.
On note aussi $I_i = \left\{j \in [\![1, i-1]\!] / j \equiv i\right\}$ et $J_i = \left\{j \in [\![1, i-1]\!] / j \not\equiv i\right\}$.
Soit $i \geqslant 2$. On définit $B_i = \bigcap_{j\in I_i} A_j$ et $C_i = \bigcap_{j\in J_i} A_j$, ainsi on a : $B_i \cap C_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j$.

16.a. Justifier que A_i et C_i sont indépendants. En déduire que
$$\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$$

- On a :
$$A_i = [Y_i = 0] \quad ; \quad C_i = \bigcap_{j\in J_i} [Y_j = 0]$$
Or, pour tout $j \in J_i$, $j \neq i$ et $j \not\equiv i$; donc $(i, j) \in \mathcal{F}$.
Ainsi, d'après la question 3.b, pour tout $j \in J_i$, les variables aléatoires Y_i et Y_j sont indépendantes.
Par conséquent, les évènements $[Y_i = 0]$ et $\bigcap_{j\in J_i}[Y_j = 0]$ sont indépendants.

> **Conclusion :** A_i et C_i sont indépendants.

- D'après le résultat de la question précédente :
$$\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}_{C_i}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$$
Or, d'après le point précédent, A_i et C_i sont indépendants, donc $\overline{A_i}$ et C_i également et ainsi : $\mathbb{P}_{C_i}(\overline{A_i}) = \mathbb{P}(\overline{A_i})$. D'où le résultat.

> **Conclusion :** $\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)$.

♣ Méthode !
Comme habituellement, on débute ce type de question dans l'optique de démontrer que $\mathbb{P}(A_i \cap C_i) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(C_i)$... Mais on se rend compte que le raisonnement est un peu différent. On ne rédige donc pas ainsi !
Le travail des mathématiques peut se résumer en deux étapes :
Premièrement,, on construit des réflexes !
Deuxièmement, on apprend à ne pas se limiter à ces réflexes !

Important !
Pas utile de vérifier que $\mathbb{P}(B_i \cap C_i)$ et $\mathbb{P}(C_i)$ sont non nulles, l'énoncé admet que els probabilités conditionnelles sont bien définies.

☞ Rappels...
Définition : A et C sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.
Propriété : si $\mathbb{P}(C) \neq 0$, alors A et C sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(A)$ (immédiat par définition de $\mathbb{P}_C(A)$...).

16.b. Établir que $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) &= 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{B_i}) && \text{loi de Morgan : } \overline{\bigcap_{j\in I_i} A_j} = \bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j} \\
&= 1 - \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}\left(\bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j}\right) && \text{inégalité de Boole : } \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}\left(\bigcup_{j\in I_i} \overline{A_j}\right) \leqslant \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \\
&\geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j})$.

16.c. **On admet provisoirement que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$:**

$$\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j}) \tag{1}$$

En déduire que $\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) &= 1 - \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) && \text{d'après la question 16.a : } \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(\overline{A_i}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \\
&\leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i)
\end{aligned}$$

Or :

- d'après la question 16.b : $\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_i})$;
- d'après (1) :
$$\forall j \in [\![1; i-1]\!],\ \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$$
D'où, en sommant sur I_i, licite car I_i est fini :
$$\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$$

De ces deux points, on déduit :

$$\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \geqslant 1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$$

Enfin, puisque $\mathbb{P}(\overline{A_i}) \geqslant 0$, on obtient :

$$1 - \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}\cap C_i}(B_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$$

D'où le résultat, par transitivité.

Conclusion : $\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) \left(1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$.

16.d. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant \exp(-x)$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

- On sait que la fonction exponentielle est convexe, donc sa courbe est partout au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, dont l'équation réduite est $y = x + 1$.
Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} \geqslant x + 1$$
Et ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geqslant -x + 1$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leqslant \exp(-x)$.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i})\left(1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}(\overline{A_i})\left(1 - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right) &= 1 - \left(\mathbb{P}(\overline{A_i}) - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})\right) && \text{formule des probabilités conditionnellles}\\
&= 1 - \left(\mathbb{P}(\overline{A_i}) - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})\right) && \text{point précédent}\\
&\leqslant \exp\left(\mathbb{P}(\overline{A_i}) - \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j})\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat, par transitivité.

Conclusion : $\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$.

17. On rappelle que $\Delta_n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \mathbb{E}(Y_iY_j)$ où $\mathcal{E}$ a été défini dans la partie 1 à la suite de la question 3.

17.a. Montrer que $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) &= \mathbb{P}\left(\left[\sum_{i=1}^{r} Y_i = 0\right]\right) && \forall k \in [\![1; r]\!],\ Y_k(\Omega) \subset \mathbb{R}^+\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} [Y_i = 0]\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) && \text{formule des probabilités composées, licte car } \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r-1} A_i\right) \geqslant \mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) > 0 \text{ (question 11)}\\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots A_{r-1}}(A_r) && \forall i \geqslant 2,\ \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j = B_i \cap C_i\\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{B_2\cap C_2}(A_2)\mathbb{P}_{B_3\cap C_3}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_r\cap C_r}(A_r)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i)$.

17.b. En conclure que :

$$\mathbb{P}\big([Z_n = 0]\big) \leqslant \exp\left(-\mathbb{E}(Z_n) + \frac{\Delta_n}{2}\right) \qquad \text{(inégalité de Janson)}$$

D'après la question 16.d :

$$\forall i \in [\![2; r]\!],\ 0 \leqslant \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

D'où :

$$\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \prod_{i=2}^{r} \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

Important !
Il est important de préciser la positivité des facteurs en jeu avant de 'passer au produit'.

Puis, comme $\mathbb{P}(A_1) \geqslant 0$:

$$\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r} \mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \mathbb{P}(A_1)\exp\left(-\sum_{i=2}^{r} \mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j} \cap \overline{A_i})\right)$$

Mais :

- $\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1})$,

- d'après la question 16.d : $1-\mathbb{P}(\overline{A_1}) \leqslant \exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_1})\right)$.
  D'où, puisque $\exp\left(\sum_{i=2}^{r} -\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i})\right) \geqslant 0$:

$$\left(1-\mathbb{P}(\overline{A_1})\right)\exp\left(\sum_{i=2}^{r} -\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i})\right) \leqslant \underbrace{\exp\left(-\mathbb{P}(\overline{A_1})\right)\exp\left(\sum_{i=2}^{r} -\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i})\right)}_{=\exp\left(-\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i})\right)}$$

On obtient alors :

$$\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{r}\mathbb{P}_{B_i\cap C_i}(A_i) \leqslant \exp\left(-\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i})\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}(\overline{A_i}) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i} \mathbb{P}(\overline{A_j}\cap\overline{A_i}) &= -\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}\left([Y_i=1]\right) + \sum_{i=2}^{r}\sum_{j\in I_i}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{r} p^3 + \sum_{i=2}^{r}\sum_{\substack{j=1\\ j\equiv i}}^{i-1}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)\\
&= -rp^3 + \sum_{\substack{1\leqslant j<i\leqslant r\\ j\equiv i}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right) && \text{question 2.c}\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \sum_{\substack{1\leqslant j<i\leqslant r\\ j\equiv i}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right) && \forall i,j\in[\![1;r]\!],\ \mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)=\mathbb{P}\left([Y_i=1]\cap[Y_j=1]\right)\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \frac{1}{2}\left(\sum_{\substack{1\leqslant j<i\leqslant r\\ j\equiv i}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant r\\ j\equiv i}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)\right)\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1;r]\!]^2\\ j\neq i,\, j\equiv i}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right)\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right) && \text{par théorème de transfert, puisque } Y_i(\Omega)=Y_j(\Omega)=\{0;1\},\\
& && \text{on obtient } \mathbb{E}(Y_iY_j)=\mathbb{P}\left([Y_j=1]\cap[Y_i=1]\right).\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}}\mathbb{E}(Y_iY_j)\\
&= -\mathbb{E}(Z_n) + \frac{\Delta_n}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathbb{P}\left([Z_n=0]\right) \leqslant \exp\left(-\mathbb{E}(Z_n) + \frac{\Delta_n}{2}\right)$.

17.c. En déduire l'encadrement :

$$(1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leqslant \mathbb{P}\left([Z_n=0]\right) \leqslant \exp\left(-\binom{n}{3}p^3 + \frac{a_n}{2}p^5\right)$$

Immédiat, en combinant les résultats des questions :

- précédente,
- 11,
- 2.c,
- 4.

Conclusion : $(1-p^3)^{\binom{n}{3}} \leqslant \mathbb{P}\left([Z_n=0]\right) \leqslant \exp\left(-\binom{n}{3}p^3 + \frac{a_n}{2}p^5\right)$.

18. Soit c un réel strictement positif.

18.a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{c^3}{6}$.

On a :

$$-\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{n(n-1)(n-2)c^3}{6n^3} + \frac{a_n c^5}{2n^5}$$

$$= -\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{c^3}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^5}\frac{c^5}{4}$$

question 5.b

Or :

- $\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{c^3}{6} = -\frac{c^3}{6}$;
- $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^5} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^5}\frac{c^5}{4} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{c^3}{6}$.

18.b. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) = -\frac{c^3}{6}$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{c^3}{n^3} = 0$, donc :

$$\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{c^3}{n^3}$$

D'où :

$$\binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\binom{n}{3}\frac{c^3}{n^3}$$

Or $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, donc $\binom{n}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{6}$. D'où :

$$\binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{c^3}{6}$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right) = -\frac{c^3}{6}$.

18.c. On suppose que $n > c$ et $p = \frac{c}{n}$. En déduire la limite de $\mathbb{P}([Z_n = 0])$ quand $n \to +\infty$.

On a :

- d'après la question 17.c, avec $p = \frac{c}{n}$:

$$\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right)^{\binom{n}{3}} \leqslant \mathbb{P}([Z_n = 0]) \leqslant \exp\left(-\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5\right)$$

- d'après la question 18.a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)^5 = -\frac{c^3}{6}$$

D'où, par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc en $\frac{-c^3}{6}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\binom{n}{3}\left(\frac{c}{n}\right)^3 + \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{c^3}{6}\right)$$

- Et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right)^{\binom{n}{3}} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\binom{n}{3}\ln\left(1-\frac{c^3}{n^3}\right)\right) = \exp\left(-\frac{c^3}{6}\right)$$

Réflexe !

question précédente et continuité de l'exponentielle en $\frac{-c^3}{6}$

Important !
La continuité d'une fonction, c'est ce qui permet de "faire passer la limite à l'intérieur".

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = \exp\left(-\frac{c^3}{6}\right)$.

19. On reprend les notations de la partie 2.
L'exécution de l'instruction `fonctionMystere(100)` affiche dans la console Python `0.849`. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente si on considère que pour x assez petit, e^{-x} est proche de $1-x+\dfrac{x^2}{2}$?

D'après la question 8, l'exécution de `fonctionMystere` renvoie une valeur approchée de $\mathbb{P}([Z_n=0])$ lorsque $p=\dfrac{1}{n}$.
Or, en prenant $c=1$:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{c^3}{6}\right) &= \exp\left(-\frac{1}{6}\right)\\ &\simeq \frac{61}{72}\end{aligned}$$

$1-\frac{1}{6}+\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{2}=\frac{61}{72}$

Enfin :

```
6 1        | 7 2
6 1 0      |------
  3 4 0    | 0.8 4 7
    5 2 0  |
      1 6  |
```

Petite remarque
Bon, je doute que les correcteurs attendaient de poser une division... Mais ça ferait tellement plaisir de la voir.
Et il ne faut pas oublier que la mission principale d'une candidate ou d'un candidat lors d'un concours, c'est faire plaisir aux correcteurs !

Conclusion : le résultat obtenu en `Python` est cohérent avec celui de la question précédente.

20. *Démonstration de (1).*
Soit m un entier plus grand que 2. On considère $X_1, \dots, X_m$ des variables de Bernoulli indépendantes et I un sous-ensemble de $[\![1,m]\!]$. On note J le complémentaire de I dans $[\![1,m]\!]$. On note A l'événement $\left[\prod_{i\in I} X_i = 1\right]$.

20.a. Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_m)\in\{0,1\}^m$,

$$\mathbb{P}_A\big([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m]\big)=\begin{cases}\prod\limits_{i\in J}\mathbb{P}\big([X_i=x_i]\big) & \text{si } \prod\limits_{i\in I}x_i=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit $(x_1,\dots,x_m)\in\{0;1\}^m$. Remarquons déjà :

$$\begin{aligned}A &= \left[\prod_{i\in I}X_i=1\right]\\ &= \bigcap_{i\in I}[X_i=1]\end{aligned}$$

$\forall i\in[\![1;m]\!],\ X_i(\Omega)=\{0;1\}$

Distinguons ensuite deux cas.

- Si $\prod\limits_{i\in I}x_i=1$:
  Puisque $x_1,\dots,x_m\in\{0;1\}$, on a alors :
  $$\forall i\in[\![1;m]\!],\ x_i=1$$
  Ainsi :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}_A\big([X_1=x_1]\cap\ldots\cap[X_m=x_m]\big) &= \mathbb{P}_A\left(\left(\bigcap_{i\in I}[x_i=1]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in J}[X_i=x_i]\right)\right)\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(A\cap\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in J}[X_i=x_i]\right)\right)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in J}[X_i=x_i]\right)\right)}{\mathbb{P}(A)} && \text{remarque ci-desssus}\\ &= \frac{\left(\prod_{i\in I}\mathbb{P}\big([X_i=1]\big)\right)\times\left(\prod_{i\in J}\mathbb{P}\big([X_i=x_i]\big)\right)}{\mathbb{P}(A)} && \text{indépendance des variables aléatoires } X_1,\dots,X_m\\ &= \prod_{i\in J}\mathbb{P}\big([X_i=x_i]\big) && \text{remarque ci-dessus et indépendance de } X_1,\dots,X_m\end{aligned}$$

- Si $\prod_{i=1}^{m} x_i = 0$:
  Il existe alors $i_0 \in I$, que nous considérons ensuite, tel que $x_{i_0} = 0$.
  Dans ce cas :
$$\begin{aligned} A \cap [X_{i_0} = x_{i_0}] &= \left(\bigcap_{i \in I, i \neq i_0} [X_i = 1] \right) \cap \left([X_{i_0} = 1] \cap [X_{i_0} = 0] \right) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$
  On obtient ainsi :
$$\mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big) = 0$$

> **Conclusion :** pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \{0, 1\}^m$,
> $$\mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big) = \begin{cases} \prod_{i \in J} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big) & \text{si } \prod_{i \in I} x_i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

✘ Attention ! Tout comme pour les événements, l'indépendance de variables aléatoires est toujours relativement à une probabilité, celle de l'espace probabilité ambiant : $\mathbb{P}$. Ici, on s'intéresse à cette indépendance relativement à $\mathbb{P}_A$.

20.b. En déduire que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_m$ sont indépendantes pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$.

Démontrons :
$$\forall (x_1, \ldots, x_m) \in \{0; 1\}^m, \ \mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big)$$

Soit $(x_1, \ldots, x_m) \in \{0; 1\}^m$. Distinguons deux cas.

- Si $\prod_{i \in I} x_i = 1$:
  Dans ce cas, on a : $\forall i \in I, \ x_i = 1$. Puis :
  - ⋆ d'une part, on a ainsi : $\forall i \in I, \ \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = 1$, donc :
$$\prod_{i \in I} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = 1$$
  - ⋆ d'autre part, par indépendance de $X_1, \ldots, X_m$ (pour $\mathbb{P}$), pour tout $j \in J$, les évènements A et $[X_i = x_i]$ sont indépendants et donc : $\forall i \in J, \ \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big)$, d'où :
$$\prod_{i \in J} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big)$$

  Par conséquent :
$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) &= \prod_{i \in I} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) \times \prod_{i \in J} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) && \text{points ci-dessus} \\ &= \prod_{i \in J} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big) && \text{question précédente} \\ &= \mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big) \end{aligned}$$

- Si $\prod_{i \in I} x_i = 0$:
  Il existe alors $i_0 \in I$, que nous considérons ensuite, tel que $x_{i_0} = 0$. Dans ce cas : $A \cap [X_{i_0} = x_{i_0}] = \varnothing$ et ainsi :
$$\mathbb{P}_A\big([X_{i_0} = x_{i_0}]\big) = 0$$
  D'où :
$$\prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\big([X_i = x_i]\big) = 0$$
  Et donc, d'après la question précédente :
$$\prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = \mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big)$$

Dans les deux cas, on a obtenu :
$$\prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}_A\big([X_i = x_i]\big) = \mathbb{P}_A\big([X_1 = x_1] \cap \ldots \cap [X_m = x_m]\big)$$

> **Conclusion :** les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_m$ sont indépendantes pour $\mathbb{P}_A$.

▶ Soit $i \geqslant 2$. On reprend les notations de la question 16.

20.c. Montrer que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_i} \cap C_i}(\overline{A_j}) = \dfrac{\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j \prod\limits_{k \in J_i}(1-Y_k)\right)}{\mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_i)}$.

Soit $j \in [\![1; i-1]\!]$. On sait que la variable aléatoire $Y_j \prod\limits_{k \in J_i}(1-Y_k)$ suit une loi de Bernoulli. D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j \prod_{k \in J_i}(1-Y_k)\right) &= \sum_{x \in \{0;1\}} x \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left(\left[Y_j \prod_{k \in J}(1-Y_k) = x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left(\left[Y_j \prod_{k \in J}(1-Y_k) = 1\right]\right) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left([Y_j = 1] \cap \left(\bigcap_{k \in J_i}[1-Y_k = 1]\right)\right) \quad \forall k \in [\![1; r]\!],\ Y_k(\Omega) = \{0;1\} \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left([Y_j = 1] \cap \left(\bigcap_{k \in J_i}[Y_k = 0]\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j} \cap C_j) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_j)\mathbb{P}_{\overline{A_i} \cap C_j}(\overline{A_j}) \quad \text{formule des probabilités conditionnelles, avec } \mathbb{P}_{\overline{A_i}}
\end{aligned}$$

Petite remarque

Je détaille volontairement le début afin de bien montrer que l'espérance conditionnelle d'une Bernoulli relativement à A est la probabilité du succès associé sachant A.

Conclusion : pour $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_i} \cap C_i}(\overline{A_j}) = \dfrac{\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j \prod\limits_{k \in J_i}(1-Y_k)\right)}{\mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_i)}$.

20.d. En utilisant l'inégalité de Harris, montrer que pour $j \in [\![1, i-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{A_i} \cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$.

Soit $j \in [\![i-1]\!]$. On a :

- d'après la question 13.a :
  - ⋆ Y_j est fonction m-croissante des $T_{\_,\_}$,
  - ⋆ $\prod\limits_{k \in J_i}(1-Y_k)$ est fonction m-décroissante des $T_{\_,\_}$.
- les variables aléatoires $T_{\_,\_}$ suivent des lois de Bernoulli, donc sont finies ;
- les variables aléatoires $T_{\_,\_}$ sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{\overline{A_i}}$; en effet :
  - ⋆ les variables aléatoires $T_{\_,\_}$ sont indépendantes pour $\mathbb{P}$,
  - ⋆ et :

$$\begin{aligned}
\overline{A_i} &= [Y_i = 1] \\
&= [T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w} = 1] \quad \text{en notant } t_i = \{u,v,w\} \text{ et donc, d'après la question 2.a } Y_i = T_{u,v}T_{u,w}T_{v,w}
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la question 20.b, les variables aléatoires $T_{\_,\_}$ sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{\overline{A_i}}$.

D'après l'inégalité de Harris, dans sa version croissante/décroissante, on a donc :

$$\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(Y_j \prod_{k \in J_i}(1-Y_k)\right) \leqslant \mathbb{E}_{\overline{A_i}}(Y_j) \times \mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(\prod_{j \in J_i}(1-Y_j)\right)$$

Enfin, puisque Y_j et $\prod\limits_{j \in J_i}(1-Y_j)$ suivent des lois de Bernoulli, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{A_i}}(Y_j) &= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}([Y_j = 1]) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\overline{A_i}}\left(\prod_{j \in J_i}(1-Y_j)\right) &= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left(\left[\prod_{j \in J_i}(1-Y_j) = 1\right]\right) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}\left(\bigcap_{j \in J_i}[Y_j = 0]\right) \\
&= \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(C_i)
\end{aligned}$$

Conclusion : d'après la question précédente, on obtient pour $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mathbb{P}_{\overline{A_i} \cap C_i}(\overline{A_j}) \leqslant \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(\overline{A_j})$.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★