Python - Cours 3
Recherche de valeur approchée de solution d'équations

L'objectif de ce cours est d'étudier trois algorithmes de résolution d'équations du type $f(x) = 0$.

Considérons la fonction $f : x \longmapsto e^{-x} - x$, définie sur $[0;1]$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, et que cette solution appartient à $[0;1]$.

☞ Pour info...

La solution de l'équation $e^{-x} - x = 0$ est parfois appelée **constante Ω**, et est l'évaluation en 1 de la fonction de Lambert (ou parfois nommée fonction Ω), qui est la réciproque de $x \longmapsto xe^x$ (bijective de $[-1;+\infty[$ dans $[-e^{-1};+\infty[$... Il est impossible de résoudre algébriquement l'équation $e^{-x} - x = 0$ et impossible d'exprimer la constante Ω avec les fonctions usuelles. La seule chose possible est d'en obtenir une valeur approchée par des méthodes numériques !

Un peu d'histoire

Jean-Henri Lambert (1728-1777, suisse-allemand, presque français) est peu connu du grand public, même si on lui doit la première démonstration de l'irrationalité de π ; mais également d'importants travaux en géométrie, puisqu'il est l'inventeur de plusieurs systèmes de projection cartographique, donc certains sont encore utilisés...

I Par balayage

La méthode consiste à partir d'un réel a et d'incrémenter un pas constant à a jusqu'à observer un changement de signe.

A l'aide d'un algorithme de balayage, déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-6}.

Petite remarque

On pourra ajouter un compteur d'étapes...

```

```

II Par dichotomie

On rappelle le principe de la méthode ci-dessous :

On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$;
- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, alors on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
- si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$, alors on pose $a_{n+1} = b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

☞ Rappel...

Dans le chapitre 13, nous avons démontré que la méthode de dichotomie permettait de construire deux suites adjacentes qui convergent vers une solution de l'équation $f(x) = 0$.

A l'aide d'un algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-6}.

Petite remarque

On pourra ajouter un compteur d'étapes...

III Avec une suite récurrente !

L'idée ici est de poser $g : x \longmapsto f(x) + x$, de sorte que $f(x) = 0 \iff g(x) = x$.
Donc, plutôt que de chercher un zéro de f, on cherche un point fixe de g... Et on considère ainsi la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in [0;1] \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = g(u_n)$$

On sait que si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors on obtient $\ell = g(\ell)$: ℓ est un point fixe de g.
Par conséquent, si (u_n) est convergente, alors u_n fournit une valeur approchée d'un point fixe de g pour n suffisamment grand.
De façon générale, deux problèmes pour cette méthode :

1. la méthode ne permet pas toujours de fournir une valeur approchée d'un point fixe ; en effet, il est possible que la suite (u_n) diverge...
2. si la suite (u_n) converge, on ne sait pas toujours étudier sa vitesse de convergence...

> ☞ **Pour info...**
> En fait, on peut plus ou moins prédire le comportement de (u_n), mais ces résultats sont hors programme en ECG.

> **Petite remarque**
> Dans un prochain chapitre, nous verrons un théorème qui pourra être utile dans l'étude de ces suites et qui, dans certains cas, assurera la convergence de la suite (u_n)...

Reprenons toutefois le cas de la fonction $f : x \longmapsto e^{-x} - x$. Considérons donc la fonction $g : x \longmapsto e^{-x}$ et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

L'exercice 11 du chapitre 13 a permis d'obtenir :

- la suite (u_{2n}) est décroissante, de limite α ;
- la suite (u_{2n+1}) est croissante, de limite α.

En déduire un programme permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-6}.

> **Petite remarque**
> On pourra ajouter un compteur d'étapes...

> ☞ **Pour info...**
> C'est le programme type pour déterminer un encadrement de la limite commune à deux suites adjacentes...