Python - TP1
Calculer les termes d'une suite

Commandes utiles

La bibliothèque `numpy`, à importer via la commande `import numpy as np`, fournit les commandes pour les fonctions usuelles.

Objectif

Calculer les termes d'une suite, pour différents modes de génération d'une suite...

1. **Suites récurrentes**
   Pour chacune des suites définies ci-dessous, écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$) et renvoyant u_n en sortie.

   1.a. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n^2 - 1 \end{cases}$

   1.b. $\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$

   1.c. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1} \end{cases}$

   1.d. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

   1.e. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k^2+1} \end{cases}$

Objectif secondaire
En admettant que la suite (u_n) n'est pas majorée, écrire une fonction renvoyant le premier rang n_0 à partir duquel u_n dépasse 10^{10}.

✘ Attention !
On veut que le programme fonctionne également pour $n = 0$ et $n = 1$...

2. **Suites imbriquées**
   Pour chacune des suites définies ci-dessous, écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$) et renvoyant les termes de rang n des suites en sortie.

   2.a. $\begin{cases} u_0 = 1 \ ;\ v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + v_n \text{ ET } v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$

   2.b. $\begin{cases} u_0 = 1 \ ;\ v_0 = 0 \ ;\ w_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \text{ ET } v_{n+1} = u_n + v_n + w_n \text{ ET } w_{n+1} = -u_n + 2v_n + 3w_n \end{cases}$

3. **Suites définies par une somme ou un produit**
   Pour chacune des suites définies ci-dessous, écrire une fonction prenant en argument d'entrée un entier naturel n ($n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$) et renvoyant u_n en sortie.

   3.a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$

   3.b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

   3.c. $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^3}\right)$

Objectif secondaire
Comparer, pour tout $n \in [\![0;20]\!]$, u_n avec $2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.