

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

"L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence."
Charles Caleb Colton

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...

Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de base ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

EXERCICE 1 – EDHEC 2015 E

1. Pour tout entier naturel k , on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

1.a. Justifier que I_0 , I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

Considérons une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, de densité

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas :

- $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$; donc I_0 converge et vaut 1.
- $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$; donc, puisque X admet une espérance, l'intégrale I_1 converge et :

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{E}(X) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$; donc, puisque X admet un moment d'ordre 2 (car admet une variance), par théorème de transfert, licite car $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale I_2 converge et :

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E}(X^2) \\ &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 2 \end{aligned} \quad \leftarrow \text{formule de Koenig-Huygens}$$

Conclusion : $I_0 = 1$, $I_1 = 1$ et $I_2 = 2$.

1.b. Pour tout réel a positif et tout entier naturel k , on pose : $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} dt$.

Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$$

Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{k+1}(a) = \int_0^a t^{k+1} e^{-t} dt$$

Posons : $\begin{cases} u : t \mapsto t^{k+1} \\ v : t \mapsto -e^{-t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; a]$ et pour tout $t \in [0; a]$:

$$\begin{cases} u'(t) = (k+1)t^k \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{k+1}(a) &= \left[-t^{k+1} e^{-t} \right]_0^a - \int_0^a -(k+1)t^k e^{-t} dt \\ &= -a^{k+1} e^{-a} + 0 + (k+1)I_k(a) \end{aligned} \quad \leftarrow k+1 > 0, \text{ donc } 0^{k+1} = 0$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}^+, I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$.

1.c. En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

- D'après la question précédente, avec $k = 2$:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, I_3(a) = 3I_2(a) - a^3 e^{-a}$$

Or :

- * I_2 est convergente, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_2(a) = I_2$
- * par croissances comparées, $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^3 e^{-a} = 0$.

Conclusion : l'intégrale I_3 est convergente et $I_3 = 3I_2 = 6$.

- Puis, en prenant $k = 3$:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, I_4(a) = 4I_3(a) - a^4 e^{-a}$$

Or :

- * I_3 est convergente, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_3(a) = I_3$
- * par croissances comparées, $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^4 e^{-a} = 0$.

Remarque

L'énoncé fait le choix de détailler de cette façon, mais aurait très bien pu guider comme dans Question classique 26.

Important !

Nul besoin de justifier la convergence au préalable avec un critère dans les cas suivants :

- on calcule l'intégrale partielle en primitivant, IPP ou changement de variable
- on utilise un résultat, comme ici, qui fournit convergence et valeur directement.

Conclusion : l'intégrale I_4 est convergente et $I_4 = 4I_3 = 24$.

2. Dédurre des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}(y + xt + t^2)^2 e^{-t} &= (y^2 + x^2 t^2 + t^4 + 2xyt + 2yt^2 + 2xt^3) e^{-t} \\ &= y^2 e^{-t} + x^2 t^2 e^{-t} + t^4 e^{-t} + 2xyt e^{-t} + 2yt^2 e^{-t} + 2xt^3 e^{-t}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est convergente, comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes $(I_0, I_1, I_2, I_3 \text{ et } I_4)$.

Conclusion : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3. 3.a. Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt \\ &= y^2 I_0 + x^2 I_2 + I_4 + 2xy I_1 + 2y I_2 + 2x I_3 \\ &= y^2 + 2x^2 + 24 + 2xy + 4y + 12x\end{aligned}$$

↙ calcul de la question précédente et linéarité de l'intégrale, licite car toutes convergent
↙ questions 1.a. et 1.c.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

- 3.b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est polynomiale, donc elle est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. 4.a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f .

- On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 f(x, y) = 4x + 12 + 2y \quad ; \quad \partial_2 f(x, y) = 2y + 4 + 2x$$

- Puis, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) = 0_{2,1} &\iff \begin{cases} 4x + 2y = -12 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = -6 \\ x + y = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = -6 \\ y = 2 \end{cases} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 &\iff \begin{cases} 2x + y = -6 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (-4, 2)\end{aligned}$$

Conclusion : le seul point critique de f est $(-4, 2)$.

- 4.b. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2 f(a, b)$ de f en son point critique.

Conclusion :

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 4 \quad ; \quad \partial_{2,1}^2 f(x, y) = 2 \quad ; \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = 2 \quad ; \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = 2$$

- D'où :

$$\nabla^2 f(-4, 2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4.c. Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(\nabla^2 f(-4, 2)) &\iff \det(\nabla^2 f(-4, 2) - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (4 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0\end{aligned}$$

À retenir...

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$:
 $(a + b + c)^2 =$
 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6 - \sqrt{20}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{6 + \sqrt{20}}{2} \end{cases} \quad \swarrow \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 - \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ \lambda = 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Or $\sqrt{5} < \sqrt{9}$, donc $3 - \sqrt{5} > 0$.

Conclusion : les deux valeurs propres de $\nabla^2 f(-4, 2)$ sont strictement positives, donc f admet un minimum local en $(-4, 2)$, dont la valeur est $f(-4, 2)$, avec

$$\begin{aligned} f(-4, 2) &= 32 + 4 - 48 + 8 - 16 + 24 \\ &= 4 \end{aligned}$$

5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

5.a. Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \dots$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 &= 2 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 9 + xy + 6x + 3y \right) \\ &= 2x^2 + \frac{y^2}{2} + 18 + 2xy + 12x + 6y \end{aligned}$$

Important !

Il faut prendre les points sur cette question et la suivante.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18 \right).$

5.b. Compléter de même l'égalité :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \dots$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y - 2)^2 &= \frac{1}{2}(y^2 - 4y + 4) \\ &= \frac{y^2}{2} - 2y + 2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + 4.$

5.c. En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24 \\ &= 2x^2 + 2xy + 12x + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \left(\frac{y^2}{2} + 6y + 18 \right) + y^2 + 4y + 24 \quad \swarrow \text{question 5.a.} \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 + 4 \quad \swarrow \text{question 5.b.} \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 + f(-4, 2) \quad \swarrow \text{question 4.c.} \\ &\geq f(-4, 2) \quad \swarrow 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2}(y - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : f admet un minimum global en $(-4, 2)$.

EXERCICE 2 – EDHEC 2024 APPLI

♥ L'avis du chef ! ♥

Très bon exercice, pas si simple, mêlant intégrales et équations différentielles.

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \quad (1)$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \quad (2)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons le changement de variable $u = x - t$, licite car affine, dans l'intégrale $\int_0^x tf(x-t)dt$:

$$\begin{array}{l|l} u = x - t & ; \quad \begin{array}{l} du = -dt \\ dt = -du \end{array} \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t = & 0 & x \\ \hline u = & x & 0 \\ \hline \end{array}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(x-t)dt &= \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) \\ &= \int_0^x (x-u)f(u)du \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x tf(x-t)dt = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

Ainsi :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)dt \right) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \right)$$

Conclusion : (1) $\iff$ (2).

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

2.a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)du$$

D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (x-u)f(u)du \\ &= 1 + x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \text{linéarité de l'intégrale} \end{array}$$

Ensuite :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(u)du$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à f ;
- la fonction $\text{id} \times f$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x uf(u)du$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à $\text{id} \times f$.

La fonction f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme produit et somme de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) \\ &= \int_0^x f(u)du \end{aligned}$$

Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^x f(u)du$.

2.b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

D'après la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u)du$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(u)du$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée égale à f . Ainsi f' est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, autrement dit f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = f(x)$.

Conclusion : f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(x)$.

★ Subtil... ★

Plus généralement, si t est la variable d'intégration initiale et que l'on pose $u = g(t)$, g doit être bijective et c'est la fonction g^{-1} qui doit être $\mathcal{C}^1$...
Pour ne pas se tromper, on devrait toujours poser $t = \dots$ même si c'est parfois moins naturel !

✗ Attention !

On ne peut pas procéder directement comme on le fait habituellement pour des fonctions définies par une intégrale puisque la variable x se situe également dans l'intégrande... on commence donc par découper !

Et ça continue...

Puisque $f'' = f$ et que f est $\mathcal{C}^2$, on en déduit que f'' est $\mathcal{C}^2$, donc f est $\mathcal{C}^4$... En réitérant, on obtient que f est $\mathcal{C}^6, \mathcal{C}^8, \dots$ donc f est en fait $\mathcal{C}^\infty$.

2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

L'équation $f'' - f = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène, d'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont 1 et -1 .

Il existe donc des réels a et b , que nous considérons ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^{-x} + be^x$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $f'' = f$ est $\{x \mapsto ae^{-x} + be^x, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Remarque

C'est une question d'application directe du cours : il faut la traiter, et la traiter correctement !

2.d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- En évaluant la relation (1) avec $x = 0$, on obtient :

$$f(0) = 1$$

- En évaluant la relation obtenue en question 2.a. avec $x = 0$, on obtient :

$$f'(0) = 0$$

Par conséquent, si f est solution de (1), on a, d'après les questions précédentes :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^{-x} + be^x ; f(0) = 1 ; f'(0) = 0$$

On obtient ainsi les conditions suivantes sur a et b :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$a = b = \frac{1}{2}$$

Et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Conclusion : si f est solution de (1), alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$.

Le problème initial a donc au plus une solution, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} + e^x}{2}$.

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d. est la seule solution du problème posé en début d'exercice.

On sait que la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} + e^x}{2}$ est la seule solution possible du problème initial. Pour montrer que c'est la seule solution, il suffit donc de vérifier qu'elle est bien solution du problème initial.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (x-u) \frac{e^{-u} + e^u}{2} du &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-u)(e^{-u} + e^u) du \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left([(x-u)(-e^{-u} + e^u)]_0^x - \int_0^x (-e^{-u} + e^u) du \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{intégration par parties, licite car les fonctions en jeu sont} \\ \mathcal{C}^1 \text{ sur le segment } [0; x] \text{ (ou } [x; 0]) \end{array} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(0 + \int_0^x (-e^{-u} + e^u) du \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} [e^{-u} + e^u]_0^x \\ &= 1 + \frac{1}{2} (e^{-x} + e^x - 2) \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} + e^x}{2}$ vérifie ainsi la relation (2), et d'après la question 1., vérifie donc la relation (1).

Conclusion : la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} + e^x}{2}$ est la seule solution du problème initial.

Pour info...

L'énoncé a détaillé un raisonnement par analyse-synthèse. L'analyse fait l'objet de toute la question 2. et la synthèse est à faire dans cette question pour conclure.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

- En procédant comme en question 1., cette nouvelle équation est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x (x-u)f(u)du$$

- Analyse :

- * Les questions 2.a., 2.b. et donc 2.c. sont encore valables (les équations ne diffèrent entre elles que par une constante...).
- * On a maintenant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
- * Et on trouve ainsi, avec les notations précédemment utilisées : $a = b = 0$.

Par conséquent, la seule fonction possible est la fonction constante nulle.

- Synthèse : la fonction constante nulle convient...

Conclusion : ce nouveau problème possède une unique solution : la fonction constante nulle.

EXERCICE 3 – EML 2023 APPRO (SUJET 0)

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. 1.a. Etudier la fonction f et tracer l'allure de son graphe. On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1.

- La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[1; +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $[1; +\infty[$; et, pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-3}{2} x^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{-3}{4x^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{-3}{4x^2\sqrt{x}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$; et on a immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- Demi-tangentes en 1 :
 - la demi-tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1, par la gauche, a pour équation $y = 0$;
 - la demi-tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1, par la droite, a pour équation

$$y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$$

c'est-à-dire a pour équation

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{4}$$

- Courbe de f :

1.b. Démontrer que f est une densité de probabilité.

✓ **Positivité ?**

Immédiatement, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$$

✓ **Continuité ?**

- sur $] -\infty; 1[$:
 f est continue sur cet intervalle, car constante sur cet intervalle.
- sur $[1; +\infty[$:
 f est continue sur cet intervalle, car elle y est dérivable (question précédente).

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$?

- L'intégrale $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$ est convergente et vaut 0.
- Soit $B \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} \int_1^B f(x) dx &= \int_1^B \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^B x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^B \\ &= -\frac{1}{\sqrt{B}} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{B \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\sqrt{B}} + 1 = 1.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut 1.

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et, par relation de Chasles, vaut 1.

Conclusion : f est une densité de probabilité.

♥ **Astuce du chef** ♥

On écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{-3/2}$$

pour dériver plus efficacement f .

Important !

Quand l'énoncé demande de préciser les demi-tangentes, il faut en donner des équations !

Important !

Il faut simplifier le calcul pour obtenir ce résultat qui est celui attendu.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont une densité est f .

2. 2.a. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

- X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ est convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ est convergente,
car f est nulle sur $]-\infty; 1[$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$, $xf(x) \geq 0$
- Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann divergente.

Conclusion : la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

2.b. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer l'allure de son graphe. On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t)dt \end{aligned} \quad \leftarrow X \text{ est à densité, de densité } f$$

Or :

- * Si $x < 1$:

Puisque f est nulle sur $]-\infty; 1[$ et que $x < 1$, f est nulle sur $]-\infty; x]$ et donc :

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = 0$$

- * Si $x \geq 1$:

Puisque f est nulle sur $]-\infty; 1[$ et que $x \geq 1$, on a, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \int_1^x f(t)dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{calcul fait en question 1.b.}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Vérification

On vérifie les points suivants :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 1$
- puisque X est à densité, F doit être continue sur $\mathbb{R}$...

- Demi-tangentes en 1 :

- * la demi-tangente à la courbe de F au point d'abscisse 1, par la gauche, a pour équation $y = 0$;
- * la demi-tangente à la courbe de F au point d'abscisse 1, par la droite, a pour équation

$$y = F'_d(1)(x - 1) + F(1)$$

c'est-à-dire a pour équation

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

2.c. Démontrer que F réalise une bijection de $[1; +\infty[$ dans $[0; 1[$ et déterminer sa bijection réciproque notée G .

Soit $y \in [0; 1[$. Résolvons l'équation $F(x) = y$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$.

Soit $x \in [1; +\infty[$. On a, puisque $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) = y &\iff 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = y \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - y \\ &\iff \sqrt{x} = \frac{1}{1 - y} \\ &\iff x = \frac{1}{(1 - y)^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\leftarrow y \in [0; 1[\text{ donc } 1 - y \neq 0 \\ &\leftarrow \text{injectivité de } \sqrt{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}^+, \text{ licite car } \sqrt{x}, \frac{1}{1 - y} \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : F est bijective de $[1; +\infty[$ dans $[0; 1[$ et sa bijection réciproque est :

$$G : y \mapsto \frac{1}{(1 - y)^2}$$

♣ Méthode !

On revient en fait à la définition de bijection :
 g est bijective de E dans F lorsque

$$\forall y \in F, \exists x \in E / y = g(x)$$

Si tel est le cas, alors g^{-1} est l'application de F dans E qui à y associe son unique antécédent dans E .

Inutile, ici, d'appliquer le théorème de bijection au préalable.

3. Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$. On pose $Y = G(U)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

3.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

- Considérons déjà que $U(\Omega) = [0; 1[$. On a alors :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= G(U(\Omega)) \\ &= G([0; 1[) \\ &= [1; +\infty[\end{aligned} \quad \leftarrow \text{question précédente, } G \text{ est bijective de } [0; 1[\text{ dans } [1; +\infty[$$

- Notons F_Y la fonction de répartition de Y . Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow Y(\Omega) = [1; +\infty[\text{ et } x < 1 \text{ donc } [Y \leq x] = \emptyset$$

* Si $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([G(U) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([U \leq F(x)]) \\ &= F(x) \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{array}{l} G^{-1} = F \text{ et } F \text{ est strictement croissante sur } [1; +\infty[, \text{ licite car } x \geq 1 \\ U \mapsto \mathcal{U}([0; 1[) \text{ et } F(x) \in [0; 1[\end{array}$$

Dans les deux cas, on a :

$$F_Y(x) = F(x)$$

Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion : Y suit la même loi que X .

Remarque

La disjonction de cas était nécessaire pour pouvoir appliquer F et conserver l'égalité avec l'argument de stricte croissance sur $[1; +\infty[$.

3.b. Écrire une fonction **simuleX()** qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

Il suffit de simuler une réalisation de la variable aléatoire Y ...

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simuleY():
4     U=rd.random()
5     Y=1/(1-U)**2
6     return Y
```

On considère à présent une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note F_n sa fonction de répartition.

4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ en fonction de $F(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k > x]) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned} \quad \leftarrow \begin{array}{l} X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi, donc même fonction de répartition, } F \end{array}$$

⚠ Attention !

On ne confond pas les méthodes avec min et max !

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

5. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi certaine égale à 1. Donner la fonction de répartition de Z puis démontrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z .

- La fonction de répartition de Z , notée F_Z , est la fonction :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- La fonction F_Z n'est pas continue en 1, soit donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

* Si $x < 1$:

D'après la question précédente et la question 2.b., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$, d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0 = F_Z(x)$$

* Si $x > 1$:

D'après la question précédente et la question 2.b., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}^n}$. Or $x > 1$,

donc $\sqrt{x} > 1$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x}^n = +\infty$.

Par opérations, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1 = F_Z(x)$$

On a donc établi :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F_Z(x)$$

Conclusion : $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

Attention !

En 1 :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(1) = 0 \neq F_Z(1) !$

6. 6.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité, notée f_n , qui soit continue sur $]1; +\infty[$. On vérifiera en particulier que pour tout $x > 1$, $f_n(x) = \frac{n}{2x\sqrt{x}^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On avait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}^n} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

✓ Continuité ?

* Sur $] -\infty; 1[$: F_n est continue sur cet intervalle, car constante sur cet intervalle.

* Sur $]1; +\infty[$: F_n est continue sur cet intervalle, car $x \mapsto \sqrt{x}^n$ l'est et ne s'annule pas sur cet intervalle...

* En 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_n(x) = 0 = F_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_n(x)$$

Donc F_n est continue en 1.

Conclusion : F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

✓ Caractère $\mathcal{C}^1$?

Par des arguments similaires, la fonction F_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

La variable aléatoire Z_n est à densité et admet comme densité la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout $x < 1$, $f_n(x) = F'_n(x) = 0$
- pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= F'_n(x) \\ &= -\frac{-n}{2} x^{-\frac{n}{2}-1} \\ &= \frac{n}{2} \frac{1}{x^{\frac{n}{2}+1}} \\ &= \frac{n}{2} \frac{1}{x \times x^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{n}{2x\sqrt{x}^n} \end{aligned}$$

- et en posant $f_n(1) = \frac{n}{2}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{n}{2x\sqrt{x}^n} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Important !

ET C'EST TOUT ! On sait déjà que F_n est une fonction de répartition, inutile donc d'aller vérifier la croissance et les limites.

Remarque

On pourrait aussi poser $f_n(1) = 0$ pour recoller l'autre morceau...

6.b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Z_n admette un moment d'ordre 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$:

Z_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f_n(x)| dx$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 f_n(x) dx$ est convergente,

car f_n est nulle sur $] -\infty; 1[$ et $\forall x \geq 1$, $x^2 f_n(x) \geq 0$

si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{nx^2}{2x\sqrt{x}^n} dx$ est convergente

si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^{1+\frac{n}{2}}} dx$ est convergente,

car $\frac{n}{2} \neq 0$

si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-1+\frac{n}{2}}} dx$ est convergente

- Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{-1+\frac{n}{2}}} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$... Elle est donc convergente si, et seulement si, $-1 + \frac{n}{2} > 1$.

Et :

$$-1 + \frac{n}{2} > 1 \iff n > 4$$

Conclusion : Z_n admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, $n > 4$.

6.c. Rappeler la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes**, admettant toutes la même espérance m et la même variance σ^2 (c'est le cas si elles ont toutes la même loi) alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

LE COURS, LE COURS, LE COURS !

Remarque

Ainsi, pour n suffisamment grand, on peut considérer qu'une réalisation de $\overline{X}_n$ fournit une valeur approchée de m .

6.d. Que dire du nombre renvoyé par l'exécution de la fonction **mystere(n)** suivant lorsque $n \geq 5$? Justifier la réponse.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def mystere(n):
4     S=0
5     for k in range(10000):
6         L=[simuleX() for i in range(n)]
7         Z=min(L)
8         S=S+Z
9     return S/10000
```

À chaque itération de la boucle, la liste **L** contient n nouvelles réalisations indépendantes de X ; et donc **Z** contient une réalisation de la variable aléatoire Z_n .

Ainsi, la variable **S** contient la somme de 10000 réalisations indépendantes de Z_n . Par conséquent, **S/10000** est une réalisation de la moyenne empirique de ces 10000 réalisations indépendantes de Z_n .

Conclusion : d'après la loi faible des grands nombres (licite car Z_n admet une variance, puisque $n \geq 5$), la valeur renvoyée fournit une valeur approchée de $\mathbb{E}(Z_n)$.

EXERCICE 4 - EML 2023 APPLI (DÉBUT MODIFIÉ)

La partie III est indépendante des parties I et II.

Pour tout réel a , on considère la matrice $M(a)$ définie par : $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

PARTIE I - RÉDUCTION DE LA MATRICE $M(a)$

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe deux matrices P et $D(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que P soit inversible, $D(a)$ soit diagonale et $M(a) = PD(a)P^{-1}$.

La matrice $M(a)$ est symétrique, elle est donc diagonalisable.

Conclusion : il existe deux matrices P et $D(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que P soit inversible, $D(a)$ soit diagonale et $M(a) = PD(a)P^{-1}$.

2. Calculer J^2 .

Conclusion : $J^2 = 3J$.

3. Pour tout réel a , exprimer $M(a)$ en fonction de a , de I_3 et J .

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}, M(a) = J + (a-1)I_3$.

4. Dédurre des questions précédentes que pour tout réel a , on a :

$$M(a)^2 - (1+2a)M(a) + (a-1)(a+2)I_3 = 0_3$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} M(a)^2 - (1+2a)M(a) + (a-1)(a+2)I_3 &= (J + (a-1)I_3)^2 - (1+2a)(J + (a-1)I_3) + (a-1)(a+2)I_3 \\ &= J^2 + 2(a-1)J + (a-1)^2I_3 - (1+2a)J - (1+2a)(a-1)I_3 + (a-1)(a+2)I_3 \\ &= 3J + (2a-2)J - (1+2a)J + (a-1)((a-1) - (1+2a) + (a+2))I_3 \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

J et I_3 commutent
question 2.

Conclusion : pour tout réel a , $M(a)^2 - (1+2a)M(a) + (a-1)(a+2)I_3 = 0_3$.

OU ALORS...

On sait que $J^2 = 3J$ et que $J = M(a) - (a-1)I_3$.
D'où :

$$(M(a) - (a-1)I_3)^2 = 3(M(a) - (a-1)I_3)$$

Autrement dit :

$$M(a)^2 - 2(a-1)M(a) + (a-1)^2I_3 = 3M(a) - 3(a-1)I_3$$

D'où :

$$M(a)^2 - (2(a-1) + 3)M(a) + (a-1)((a-1) + 3)I_3 = 0_3$$

Et ainsi :

$$M(a)^2 - (2a+1)M(a) + (a-1)(a+2)I_3 = 0_3$$

Remarque

Cette méthode a l'avantage de convenir même si le résultat ne fournit pas le résultat et qu'il se contente de demander de déterminer une polynôme annulateur de $M(a)$ par exemple...

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

5.a. Résoudre l'équation $x^2 - (1+2a)x + (a-1)(a+2) = 0$. Qu'en déduire sur $\text{Sp}(M(a))$?

- L'équation $x^2 - (1+2a)x + (a-1)(a+2) = 0$ est une équation polynomiale du second degré... Notons Δ son discriminant.
On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+2a)^2 - 4(a-1)(a+2) \\ &= 1 + 4a + 4a^2 - 4(a^2 + a - 2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation $x^2 - (1+2a)x + (a-1)(a+2) = 0$ admet deux solutions distinctes : $a-1$ et $a+2$.

- D'après la question précédente, la fonction $x \mapsto x^2 - (1+2a)x + (a-1)(a+2)$ est annulatrice de la matrice $M(a)$.

Conclusion : $\text{Sp}(M(a)) \subset \{a-1; a+2\}$.

5.b. Démontrer que $a-1$ et $a+2$ sont valeurs propres de $M(a)$ puis déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés, notés respectivement E_{a-1} et E_{a+2} .

- Pour $a+2$:

Remarquons que $M(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on en déduit que $a+2$ est valeur propre de $M(a)$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé et ainsi

$$\dim(E_{a+2}) \geq 1$$

Mais :

$$\text{rg}(M(a) - (a+2)I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \geq 2 \quad \leftarrow C_1 \text{ et } C_2 \text{ ne sont pas colinéaires}$$

Or, par théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = \text{rg}(M(a) - (a+2)I_3) + \dim(\ker(M(a) - (a+2)I_3))$$

Autrement dit :

$$\dim(E_{a+2}) \leq 1$$

On en déduit :

$$\dim(E_{a+2}) = 1$$

Et ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de E_{a+2} qui est :

- ✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,
- ✓ de cardinal 1, égal à $\dim(E_{a+2})$.

Conclusion : $a+2$ est valeur propre de $M(a)$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_{a+2} .

- Ensuite :

$$\begin{aligned} \text{rg}(M(a) - (a-1)I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow C_1 = C_2 \text{ et } C_1 = C_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \quad \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \end{aligned}$$

Par conséquent, $a-1$ est valeur propre de $M(a)$ et, par théorème du rang, on trouve :

$$\dim(E_{a-1}) = 2$$

Puis, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{a-1}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une famille de E_{a-1} qui est :

- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
- ✓ de cardinal 2, égal à $\dim(E_{a-1})$.

Conclusion : $a-1$ est valeur propre de $M(a)$ et la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_{a-1} .

Rappel...

Notation usuelle :

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$$

Rappel...

Par définition, si λ est VP de A , alors $E_\lambda(A)$ est un ev non réduit au vecteur nul; donc c'est un ev de dimension au moins 1.

Astuce du chef ♥

Remarquer l'égalité $C_1 + 0C_2 - C_3 = 0_{3,1}$ nous permet de mettre en évidence un vecteur du noyau de la matrice $M(a) - (a-1)I_3$. En effet, si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes d'une matrice B , on a :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xC_1 + yC_2 + zC_3,$$

$$\text{donc : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B) \iff xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_{3,1}$$

Pourquoi ?

Voir l'astuce ci-dessus...

Méthode !

J'ai choisi cette méthode pour déterminer les espaces propres; il est toutefois possible de résoudre les systèmes $M(a)X = (a+2)X$ et $M(a)X = (a-1)X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il faut savoir faire les deux méthodes.

6. Déterminer finalement des matrices P et $D(a)$, définies en question 1., qui conviennent. On veillera à ce que la première ligne de la matrice P soit composée de 1.

- Notons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\mathcal{B}$ est ainsi une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre comme concaténation de familles libres d'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ;
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Conclusion : la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Posons alors :

* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base $\mathcal{B}$ (qui est donc inversible)

* et $D(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$, qui est diagonale.

On obtient :

$$M(a) = PD(a)P^{-1}$$

$$\text{Conclusion : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Attention !

On veille à la correspondance entre les colonnes de P et l'ordre des VP dans $D(a)$...

PARTIE II - UN PREMIER SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cette partie, on admet que l'on peut considérer

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad D(3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' = 3x + y + z \\ y' = x + 3y + z \\ y' = x + y + 3z \end{cases}$$

où x, y, z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

7. Résoudre le système différentiel (S).

Soient x, y, z trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$(S) \iff X' = M(3)X$$

Posons également $Z = P^{-1}X$ et donc, puisque P^{-1} est à coefficients constants, on obtient $Z' = P^{-1}X'$. Ainsi :

$$X' = M(3)X \iff PZ' = M(3)PZ$$

$$\iff PZ' = PD(3)P^{-1}PZ$$

$$\iff PZ' = PD(3)Z$$

$$\iff Z' = D(3)Z$$

$$\iff \begin{cases} z_1' = 5z_1 \\ z_2' = 2z_2 \\ z_3' = 2z_3 \end{cases}$$

$$\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_1 e^{5t} \\ z_2(t) = c_2 e^{2t} \\ z_3(t) = c_3 e^{2t} \end{cases}$$

$$\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} \\ y(t) = c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \\ z(t) = c_1 e^{5t} - c_3 e^{2t} \end{cases}$$

$$\curvearrowright M(3) = PD(3)P^{-1}$$

$\curvearrowright$ en multipliant par P^{-1} par la gauche

$$\curvearrowright \text{ en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright X = PZ$$

$$\text{Conclusion : l'ensemble des solutions de (S) est } \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_3 e^{2t} \end{pmatrix}, (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Le cours, le cours, le cours !

Important !

Tout est donné, il faut donc prendre les points...

8. 8.a. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S)

telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion : c'est le théorème de Cauchy.

8.b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Puisque X_0 est solution de (S), il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X_0(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_2 e^{2t} \\ c_1 e^{5t} - c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Or $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 = -1 \\ c_1 - c_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve :

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Remarque

On sait qu'il existe une unique solution convenant... Donc il existe un unique triplet (c_1, c_2, c_3) convenant. Le trouver 'de tête' suffit donc pour conclure...

Conclusion : $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE III - UN SECOND SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les valeurs propres de B .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(B) &\iff \det(B - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (-1 - \lambda)(3 - \lambda) + 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\iff (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\text{Sp}(B) = \{1\}$.

10. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Supposons que B est diagonalisable. Il existe alors une matrice inversible Q et une matrice diagonale D , dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de B , telles que $B = PDP^{-1}$.

Mais alors, on aurait $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui donnerait :

$$B = P I_2 P^{-1} = I_2$$

Absurde !

Conclusion : B n'est pas diagonalisable.

Important !

Il faut prendre tous les points de cette question et la précédente.

11. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

11.a. Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La famille β est une famille de $\mathbb{R}^2$ qui est :

- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires ;
- ✓ de cardinal 2, égal à $\dim(\mathbb{R}^2)$.

Conclusion : β est une base de $\mathbb{R}^2$.

11.b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

- $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc :

$$f(v_1) = v_1$$

- $B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} f(v_2) &= (1, -1) \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Conclusion : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

♣ **Méthode !**

Se souvenir de la définition de matrice représentative d'un endomorphisme...

11.c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

Notons $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base β . Dans ce cas, la matrice Q est inversible et, par formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{bc}(f) = P_{bc,\beta} \text{Mat}_{\beta}(f) P_{bc,\beta}^{-1}$$

Autrement dit :

$$B = QTQ^{-1}$$

Conclusion : $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $x' = x + ce^t$, d'inconnue x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)e^t$.

L'équation $x' - x = ce^t$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- L'ensemble des solutions de l'équation $x' - x = 0$ est $\{t \mapsto \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Solution particulière de $x' - x = ce^t$:
Soit $f : t \mapsto (at + b)e^t$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = ae^t + (at + b)e^t$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (f \text{ est solution de } x' - x = ce^t) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, ae^t + (at + b)e^t - (at + b)e^t = ce^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, ae^t = ce^t \\ &\iff a = c \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (ct + b)e^t \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) \forall t \in \mathbb{R}, e^t \neq 0$$

Prenons $b = 0$. Ainsi, la fonction $t \mapsto cte^t$ est solution particulière de $x' - x = ce^t$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' - x = ce^t$ est

$$\{t \mapsto cte^t + \lambda e^t, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

13. Dédurre des questions précédentes la résolution du système différentiel

$$(S') : \begin{cases} x' &= & -x & - & 4y \\ y' &= & x & + & 3y \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de sorte que :

$$(S') \iff X' = BX$$

Posons également $Z = Q^{-1}X$ et donc, puisque Q est à coefficients constants, on a $Z' = Q^{-1}X'$. Ainsi :

$$\begin{aligned} X' = BX &\iff QZ' = BQZ \\ &\iff QZ' = QTQ^{-1}QZ && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) B = QTQ^{-1} \\ &\iff QZ' = QTZ && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \text{ en multipliant par } Q^{-1} \text{ par la gauche} \\ &\iff Z' = TZ && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \text{ en notant } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} z_1' = z_1 + z_2 \\ z_2' = z_2 \end{cases} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \text{ l'ensemble des solutions de } z' - z = 0 \text{ est } \{t \mapsto c_2 e^t, c_2 \in \mathbb{R}\} \\ &\iff \exists c_2 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) - z_1(t) = c_2 e^t \\ z_2(t) = c_2 e^t \end{cases} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \text{ question précédente, avec } c = c_2 \\ &\iff \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(t) = c_2 t e^t + c_1 e^t \\ z_2(t) = c_2 e^t \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, Z(t) &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_2 e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \exists (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in \mathbb{R}, X(t) &= \begin{pmatrix} 2c_1 e^t + 2c_2 t e^t - c_2 e^t \\ -c_1 e^t - c_2 t e^t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} X = QZ$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (S') est l'ensemble $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} 2c_1 e^t + 2c_2 t e^t - c_2 e^t \\ -c_1 e^t - c_2 t e^t \end{pmatrix}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

★★★★★★ FIN ★★★★★★