

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

EXERCICE 1

1. Pour tout entier naturel k , on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

- 1.a. Justifier que I_0 , I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

- 1.b. Pour tout réel a positif et tout entier naturel k , on pose : $I_k(a) = \int_0^a t^k e^{-t} dt$.

Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la relation suivante :

$$I_{k+1}(a) = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}$$

- 1.c. En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier : $I_3 = 6$ et $I_4 = 24$.

2. Dédurre des questions précédentes que, pour tout couple (x, y) de réels, $\int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

3. 3.a. Vérifier que l'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$.

- 3.b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. 4.a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a, b) de f .

- 4.b. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2 f(a, b)$ de f en son point critique.

- 4.c. Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(a, b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a, b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

5. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

- 5.a. Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + 2xy + 12x = 2 \left(x + \frac{y}{2} + 3 \right)^2 - \dots$$

- 5.b. Compléter de même l'égalité :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \dots$$

- 5.c. En déduire une autre écriture de $f(x, y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

EXERCICE 2

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) dt \quad (1)$$

1. Montrer que l'égalité (1) est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) du \quad (2)$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f , continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

- 2.a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^x f(u) du$$

- 2.b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f(x)$$

- 2.c. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

- 2.d. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question 2.d. est la seule solution du problème posé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

EXERCICE 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. **1.a.** Etudier la fonction f et tracer l'allure de son graphe. *On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1.*

1.b. Démontrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont une densité est f .

2. **2.a.** La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

2.b. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer l'allure de son graphe. *On précisera les demi-tangentes au point d'abscisse 1.*

2.c. Démontrer que F réalise une bijection de $[1; +\infty[$ dans $[0; 1[$ et déterminer sa bijection réciproque notée G .

3. Soit U une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$. On pose $Y = G(U)$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

3.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

3.b. Écrire une fonction `simuleX()` qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire X .

On considère à présent une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note F_n sa fonction de répartition.

4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ en fonction de $F(x)$.

5. On considère une variable aléatoire Z suivant la loi certaine égale à 1. Donner la fonction de répartition de Z puis démontrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z .

6. **6.a.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité, notée f_n , qui soit continue sur $]1; +\infty[$. *On vérifiera en particulier que pour tout $x > 1$, $f_n(x) = \frac{n}{2x\sqrt{x^n}}$.*

6.b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Z_n admette un moment d'ordre 2.

6.c. Rappeler la loi faible des grands nombres.

6.d. Que dire du nombre renvoyé par l'exécution de la fonction `mystere(n)` suivant lorsque $n \geq 5$? Justifier la réponse.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def mystere(n):
4     S=0
5     for k in range(10000):
6         L=[simuleX() for i in range(n)]
7         Z=min(L)
8         S=S+Z
9     return S/10000
```

EXERCICE 4

La partie III est indépendante des parties I et II.

Pour tout réel a , on considère la matrice $M(a)$ définie par : $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

PARTIE I – RÉDUCTION DE LA MATRICE $M(a)$

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe deux matrices P et $D(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que P soit inversible, $D(a)$ soit diagonale et $M(a) = PD(a)P^{-1}$.

2. Calculer J^2 .

3. Pour tout réel a , exprimer $M(a)$ en fonction de a , de I_3 et J .

4. Dédire des questions précédentes que pour tout réel a , on a :

$$M(a)^2 - (1 + 2a)M(a) + (a - 1)(a + 2)I_3 = 0_3$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

5.a. Résoudre l'équation $x^2 - (1 + 2a)x + (a - 1)(a + 2) = 0$. Qu'en déduire sur $\text{Sp}(M(a))$?

5.b. Démontrer que $a - 1$ et $a + 2$ sont valeurs propres de $M(a)$ puis déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés, notés respectivement E_{a-1} et E_{a+2} .

6. Déterminer finalement des matrices P et $D(a)$, définies en question 1., qui conviennent. *On veillera à ce que la première ligne de la matrice P soit composée de 1.*

PARTIE II – UN PREMIER SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cette partie, on admet que l'on peut considérer

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad D(3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' &= 3x + y + z \\ y' &= x + 3y + z \\ y' &= x + y + 3z \end{cases}$$

où x, y, z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

7. Résoudre le système différentiel (S).

8. **8.a.** Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

PARTIE III – UN SECOND SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. Déterminer les valeurs propres de B .

10. La matrice B est-elle diagonalisable ?

11. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

11.a. Justifier que $\beta = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

11.b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base β ?

11.c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

12. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $x' = x + ce^t$, d'inconnue x une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)e^t$.

13. Dédurre des questions précédentes la résolution du système différentiel

$$(S') : \begin{cases} x' &= -x - 4y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

★★★★★★ FIN ★★★★★★