

CONSIGNES À LIRE !

La qualité de la rédaction, le soin porté à la copie, la lisibilité, l'orthographe, la rigueur du vocabulaire ainsi que la clarté des raisonnements sont des critères importants d'évaluation.

Quelques précisions :

- la copie doit être prise de sorte que la marge se situe à droite de chaque page,
- la première page de la copie doit rester vierge et sera réservée aux appréciations,
- toutes les pages de la copie devront être numérotées et rangées dans l'ordre de lecture,
- les résultats finaux doivent être clairement mis en évidence (soulignés ou encadrés),
- les questions d'un même exercice doivent être présentées dans l'ordre du sujet.
- Pour toutes les questions **Python** du sujet, on supposera avoir importé les différents modules nécessaires de la sorte :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
```

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.

Les arguments / éléments qu'il ne fallait pas oublier...

Les arguments / éléments non notés mais qui font tellement plaisir.

✗ Attention !

Les éléments surlignés ne sont pas les seuls éléments de base ! Ils sont simplement ceux qui ont souvent été oubliés.

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour les programmes en Python, on suppose importées :

- la bibliothèque **numpy** sous l'alias **np**,
- la bibliothèque **numpy.random** sous l'alias **rd**,
- la bibliothèque **matplotlib.pyplot** sous l'alias **plt**.

Définition. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **converge en probabilité** vers X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

On notera $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

On rappelle le résultat suivant :

Inégalité de Markov. Si X est une variable aléatoire à valeurs positives admettant une espérance, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

PARTIE 1

Soient f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, X une variable aléatoire réelle ayant f pour densité et F sa fonction de répartition. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des réels en lesquels la fonction F n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, de même loi que X .

Pour tout entier $n \geq 1$, on ordonne, pour chaque $\omega \in \Omega$, le n -uplet $(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ en :

$$X_{(n,1)}(\omega) \leq X_{(n,2)}(\omega) \leq \dots \leq X_{(n,n)}(\omega),$$

et on admet que les applications $X_{(n,k)}$ ainsi définies sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tous k, n entiers tels que $1 \leq k \leq n$, la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ donne la k -ième valeur obtenue en classant dans l'ordre croissant les valeurs prises par les n premières X_i .

On remarque en particulier que $X_{(n,1)} = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i)$ et $X_{(n,n)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1.a. Exprimer, à l'aide de F , la fonction de répartition $F_{(n,n)}$ de la variable aléatoire $X_{(n,n)}$. En déduire que $X_{(n,n)}$ admet comme densité la fonction $f_{(n,n)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(n,n)}(x) = n f(x) F(x)^{n-1}.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{(n,n)}(x) &= \mathbb{P}([X_{(n,n)} \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leq x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leq x]\right) && \leftarrow \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq x]) && \leftarrow X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi que } X \\ &= F(x)^n \end{aligned}$$

- Ensuite :

✓ **Continuité ?**

Puisque X est à densité, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$; donc $F_{(n,n)}$ également.

✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$?**

Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf sur $\mathcal{E}$, la fonction $F_{(n,n)}$ également. Or X est à densité, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini.

Ainsi, $F_{(n,n)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Conclusion : la variable aléatoire $X_{(n,n)}$ est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction $f_{(n,n)}$ définie par :

* pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} f_{(n,n)}(x) &= F'_{(n,n)}(x) \\ &= nF'(x)F(x)^{n-1} \\ &= nf(x)F(x)^{n-1} \end{aligned}$$

* et pour tout $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$f_{(n,n)}(x) = nf(x)F(x)^{n-1}$$

Conclusion : la variable aléatoire $X_{(n,n)}$ est à densité et la fonction $f_{(n,n)} : x \mapsto nf(x)F(x)^{n-1}$ en est une densité.

⚠ Attention !
On n'oublie pas de poser des valeurs "arbitraires positives" en les points en lesquels $F_{(n,n)}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$.

1.b. Par une méthode similaire, montrer que $X_{(n,1)}$ admet comme densité la fonction $f_{(n,1)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{(n,1)}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{(n,1)}(x) &= \mathbb{P}([X_{(n,1)} \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > x]\right) && \swarrow \text{indépendance de } X_1, \dots, X_n \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i > x]) && \swarrow X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi que } X \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned}$$

• Ensuite :

✓ **Continuité ?**

Puisque X est à densité, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$; donc $F_{(n,1)}$ également.

✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$?**

Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf sur $\mathcal{E}$, la fonction $F_{(n,1)}$ également. Or X est à densité, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini.

Ainsi, $F_{(n,1)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Conclusion : la variable aléatoire $X_{(n,1)}$ est une variable aléatoire à densité et admet pour densité la fonction $f_{(n,1)}$ définie par :

* pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} f_{(n,1)}(x) &= F'_{(n,1)}(x) \\ &= nF'(x)(1 - F(x))^{n-1} \\ &= nf(x)(1 - F(x))^{n-1} \end{aligned}$$

* et pour tout $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$f_{(n,1)}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$$

Conclusion : la variable aléatoire $X_{(n,1)}$ est à densité et la fonction $f_{(n,1)} : x \mapsto nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$ en est une densité.

✍ Rédaction
On pourrait aller plus vite ici, puisque les arguments sont identiques à ceux de la question précédente.

⚠ Attention !
On n'oublie pas de poser des valeurs "arbitraires positives" en les points en lesquels $F_{(n,1)}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soient n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_{i,x}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $[X_i \leq x]$. C'est-à-dire la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, Y_{i,x}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.a. Déterminer la loi de $Y_{i,x}$. On veillera à donner un paramètre indépendant de i .

Puisque $Y_{i,x}(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire $Y_{i,x}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([Y_{i,x} = 1])$.

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y_{i,x} = 1]) &= \mathbb{P}([X_i \leq x]) \\ &= F(x) \end{aligned} \quad \swarrow X_i \text{ a la même loi que } X$$

Conclusion : $Y_{i,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(F(x))$.

Remarque
En particulier, si $F(x) = 0$ ou $F(x) = 1$, la variable aléatoire $Y_{i,x}$ suit une loi certaine.

2.b. Montrer l'égalité d'événements :

$$[X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right].$$

Soit $\omega \in \Omega$. Par définition de $X_{(n,k)}$, la valeur $X_{(n,k)}(\omega)$ est la k -ième valeur la plus grande prise parmi $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$. Ainsi :

$$\omega \in [X_{(n,k)} \leq x] \iff X_{(n,k)}(\omega) \leq x$$

$$\iff (\text{il existe } k \text{ valeurs parmi } X_1(\omega), \dots, X_n(\omega) \text{ qui sont inférieures ou égales à } x)$$

$$\iff (\text{il existe } k \text{ valeurs parmi } Y_{1,x}(\omega), \dots, Y_{n,x}(\omega) \text{ qui sont égales à } 1)$$

$$\iff \sum_{i=1}^n Y_{i,x}(\omega) \geq k$$

$$\iff \omega \in \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right]$$

les $Y_{j,x}$ sont à valeurs dans $\{0;1\}$

Remarque

On pourrait également procéder par double-inclusion.

$$\text{Conclusion : } [X_{(n,k)} \leq x] = \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right].$$

2.c. En déduire que la fonction de répartition $F_{(n,k)}$ de la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,k)}(x) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1-F(x))^{n-\ell}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_{(n,k)}(x) = \mathbb{P}([X_{(n,k)} \geq k])$$

$$= \mathbb{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq k \right] \right)$$

$$= \mathbb{P}([Z_{n,x} \geq k])$$

question précédente

en notant $Z_{n,x} = \sum_{i=1}^n Y_{i,x}$

Or :

✓ $Y_{1,x}, \dots, Y_{n,x}$ suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$;

✓ $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, $Y_{1,x}, \dots, Y_{n,x}$ sont également indépendantes.;

✓ $Z_{n,x} = \sum_{i=1}^n Y_{i,x}$.

Par conséquent :

$$Z_{n,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(n; F(x))$$

D'où, puisque $Z_{n,x}$ est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ et que $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}([Z_{n,x} \geq k]) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{\ell=k}^n [Z_{n,x} = \ell] \right)$$

$$= \sum_{\ell=k}^n \mathbb{P}([Z_{n,x} = \ell])$$

$$= \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1-F(x))^{n-\ell}$$

incompatibilité des événements de la famille $([Z_{n,x} = \ell])_{\ell \in \llbracket k; n \rrbracket}$

$Z_{n,x} \hookrightarrow \mathcal{B}(n; F(x))$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R}, F_{(n,k)}(x) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1-F(x))^{n-\ell}.$$

3. Pour tout triplet d'entiers (n, k, ℓ) tel que $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq \ell \leq n$, on introduit les fonctions polynomiales $b_{n,\ell}$ et $a_{n,k}$ définies respectivement par, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$b_{n,\ell}(z) = \binom{n}{\ell} z^\ell (1-z)^{n-\ell} \quad \text{et} \quad a_{n,k}(z) = \sum_{\ell=k}^n b_{n,\ell}(z).$$

On convient également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $b_{n-1,n}$ est identiquement nulle.

3.a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$b'_{n,\ell}(z) = n(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)).$$

Distinguons deux cas.

- Si $\ell < n$:

La fonction $b_{n,\ell}$ est polynomiale dont dérivable sur $\mathbb{R}$; et, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b'_{n,\ell}(z) &= \binom{n}{\ell} (\ell z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - (n-\ell)z^\ell(1-z)^{n-\ell-1}) \\ &= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \ell z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} (n-\ell)z^\ell(1-z)^{n-\ell-1} \\ &= \frac{n!}{(\ell-1)!(n-\ell)!} z^{\ell-1}(1-z)^{n-\ell} - \frac{n!}{\ell!(n-\ell-1)!} z^\ell(1-z)^{n-\ell-1} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!(n-1-(\ell-1))!} z^{\ell-1}(1-z)^{n-1-(\ell-1)} - n \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} z^\ell(1-z)^{n-1-\ell} \\ &= n \binom{n-1}{\ell-1} z^{\ell-1}(1-z)^{n-1-(\ell-1)} - n \binom{n-1}{\ell} z^\ell(1-z)^{n-1-\ell} \\ &= n(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)) \end{aligned}$$

- Si $\ell = n$:

On a, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$b_{n,n}(z) = z^n ; \quad b_{n-1,n-1}(z) = z^{n-1} ; \quad b_{n-1,n}(z) = 0 \quad (\text{énoncé})$$

Ainsi, la relation trouvée est encore valable quand $\ell = n$.

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{R}, \quad b'_{n,\ell}(z) = n(b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)).$

- 3.b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Dédurre de la question précédente une expression de $a'_{n,k}$ en fonction de l'une des fonctions $b_{m,\ell}$ avec m et ℓ à déterminer en fonction de n et k .

La fonction $a_{n,k}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions ; et, pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a'_{n,k}(z) &= \sum_{\ell=k}^n b'_{n,\ell}(z) && \swarrow \text{question précédente, licite car } \ell \text{ parcourt } \llbracket k; n \rrbracket \text{ et que } \llbracket k; n \rrbracket \subset \llbracket 1; n \rrbracket \\ &= n \sum_{\ell=k}^n (b_{n-1,\ell-1}(z) - b_{n-1,\ell}(z)) && \swarrow \text{téléscopage} \\ &= n(b_{n-1,k-1}(z) - b_{n-1,n}(z)) && \swarrow b_{n-1,n} \text{ est nulle} \\ &= nb_{n-1,k-1}(z) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall z \in \mathbb{R}, \quad a'_{n,k}(z) = nb_{n-1,k-1}(z).$

- 3.c. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ admet comme densité la fonction $f_{(n,k)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{(n,k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}.$$

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{(n,k)}(x) = \sum_{\ell=k}^n \binom{n}{\ell} F(x)^\ell (1-F(x))^{n-\ell}$$

✓ **Continuité ?**

Puisque X est à densité, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$; donc $F_{(n,k)}$ également.

✓ **Caractère $\mathcal{C}^1$?**

Puisque F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf sur $\mathcal{E}$, la fonction $F_{(n,k)}$ également. Or X est à densité, donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est fini.

Ainsi, $F_{(n,k)}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Par conséquent, la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est à densité.

Ensuite, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{(n,k)}(x) &= \sum_{\ell=k}^n b_{n,\ell}(F(x)) \\ &= a_{n,k}(F(x)) \end{aligned}$$

Par conséquent, $X_{(n,k)}$ admet pour densité la fonction $f_{(n,k)}$ définie par :

- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} f_{(n,k)}(x) &= F'_{(n,k)}(x) \\ &= F'(x) a'_{n,k}(F(x)) && \swarrow \text{question précédente} \\ &= F'(x) n b_{n-1,k-1}(F(x)) \\ &= f(x) n b_{n-1,k-1}(F(x)) && \swarrow \text{définition de } b_{n-1,k-1}, \text{ licite car } 0 \leq k-1 \leq n-1 \\ &= f(x) n \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \end{aligned}$$

Important !

La rédaction fait apparaître la disjonction de cas immédiatement. En revanche, la réflexion est différente : on commence souvent sans repérer les disjonctions, qui nous 'tombent dessus' plus tard. Ici, c'est au plus tard au moment de simplifier $\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} (n-\ell)$ qu'il faut se poser la question du cas $n-\ell=0$...

- et, pour tout $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$f_{(n,k)}(x) = f(x)n \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$$

Conclusion : la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ est à densité et la fonction $f_{(n,k)} : x \mapsto n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k}$ en est une densité.

4. Soit x un réel tel que $0 < F(x) < 1$.

4.a. Soient $\alpha \in]F(x); 1[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha - F(x) > \varepsilon$.

Montrer que pour tout entier n suffisamment grand, on a l'inclusion d'événements :

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right],$$

et en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = 0.$$

- Soit n un entier suffisamment proche de $+\infty$. Soit $\omega \in \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right]$. Autrement dit :

$$Z_{n,x}(\omega) \geq \lfloor \alpha n \rfloor$$

D'où, puisque $\lfloor \alpha n \rfloor \geq \alpha n - 1$:

$$Z_{n,x}(\omega) \geq \alpha n - 1$$

Et ainsi :

$$\frac{1}{n} Z_{n,x}(\omega) - F(x) \geq \alpha - F(x) - \frac{1}{n}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha - F(x) - \frac{1}{n} = \alpha - F(x) > \varepsilon$$

Donc, pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\alpha - F(x) - \frac{1}{n} \geq \varepsilon$$

Et ainsi, pour n suffisamment proche de $+\infty$:

$$\frac{1}{n} Z_{n,x}(\omega) - F(x) \geq \varepsilon$$

Ainsi, par croissance de $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^+$ ($\varepsilon > 0$) :

$$\left| \frac{1}{n} Z_{n,x}(\omega) - F(x) \right| \geq \varepsilon$$

Par conséquent, pour n suffisamment proche de $+\infty$:

$$\omega \in \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right]$$

Conclusion : pour tout entier n suffisamment proche de $+\infty$, on a

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right] \subset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right]$$

- On a, pour tout n suffisamment proche de $+\infty$:

$$F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) = \mathbb{P}([X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)} \leq x])$$

$$= \mathbb{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq \lfloor \alpha n \rfloor \right] \right)$$

$$\leq \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \right)$$

↙ question 2.b.

↙ point précédent et croissance de $\mathbb{P}$

D'où pour tout n suffisamment proche de $+\infty$:

$$0 \leq F_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}(x) \leq \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \right)$$

Or, $(Y_{i,x})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires :

Pour info...

Tous les réels de $]0; \alpha - F(x)[$ conviennent...

Rappel...

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+,$

$$|x| \geq a \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$$

Rappel...

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- ✓ indépendantes,
- ✓ admettant la même espérance $F(x)$ et la même variance (car toutes de loi $\mathcal{B}(F(x))$).

Ainsi, d'après la loi faible des grands nombres, licite car $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \right) = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) = 0$.

4.b. Soient $\alpha \in]0; F(x)[$ et $\varepsilon > 0$ tel que $F(x) - \alpha > \varepsilon$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq [an] \right] \supset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right],$$

et en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) = 1.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right]$. Autrement dit :

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} Z_{n,x}(\omega) - F(x) < \varepsilon$$

Ainsi, puisque $\varepsilon < F(x) - \alpha$:

$$\alpha - F(x) < \frac{1}{n} Z_{n,x}(\omega) - F(x) < F(x) - \alpha$$

D'où :

$$\alpha n < Z_{n,x}(\omega) < 2nF(x) - \alpha n$$

En particulier, puisque $\alpha n \geq [an]$, on a :

$$Z_{n,x}(\omega) > [an]$$

Par conséquent :

$$\omega \in \left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq [an] \right]$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq [an] \right] \supset \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right]$$

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} F_{(n, [an])}(x) &= \mathbb{P}([X_{(n, [an])}] \leq x] \\ &= \mathbb{P} \left(\left[\sum_{i=1}^n Y_{i,x} \geq [an] \right] \right) && \swarrow \text{question 2.b.} \\ &\geq \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| < \varepsilon \right] \right) && \swarrow \text{point précédent et croissance de } \mathbb{P} \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \right) \leq F_{(n, [an])}(x) \leq 1$$

Or, comme en question précédente, d'après la loi faible des grands nombres :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i,x} - F(x) \right| \geq \varepsilon \right] \right) = 0$$

Conclusion : par théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) = 1$.

5. On suppose pour cette question qu'il existe un intervalle ouvert $I =]a; b[$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, tel que f est continue sur I , $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus I$.

5.a. Montrer que la fonction de répartition associée F est bijective de I dans $]0; 1[$.

Puisque f est continue sur I , la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x) > 0$$

Par conséquent, la fonction F est :

- ✓ continue sur I (comme fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité),
- ✓ strictement croissante sur I .

Ainsi, par théorème de bijection, la fonction F est bijective de I dans $F(I)$, avec :

$$\begin{aligned} F(I) &= F(]a; b[) \\ &=]\lim_{x \rightarrow a} F(x); \lim_{x \rightarrow b} F(x)[\\ &=]F(a); F(b)[\end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow F \text{ est continue sur }]a; b[\text{ et strictement croissante sur }]a; b[\\ \searrow F \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{array}$$

Or :

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^a f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad \swarrow f \text{ est nulle sur }]-\infty; a]$$

et :

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_{-\infty}^b f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx - \int_b^{+\infty} f(x) dx \\ &= 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{relation de Chasles} \\ \searrow f \text{ est une densité; et } f \text{ est nulle sur } [b; +\infty[\end{array}$$

Conclusion : F est bijective de I dans $]0; 1[$.

5.b. On note F^{-1} la bijection réciproque de la fonction F restreinte à I et on fixe $\alpha \in]0; 1[$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_{(n, [an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$. Notons F_Z sa fonction de répartition. On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < F^{-1}(\alpha) \\ 1 & \text{si } x \geq F^{-1}(\alpha) \end{cases}$$

On sait que F_Z est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en $F^{-1}(\alpha)$. Soit alors $x \in \mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}$.

Puisque $\alpha \in]0; 1[$ et que $F^{-1}(]0; 1[) =]a; b[$, on a $F^{-1}(\alpha) \in]a; b[$. Distinguons alors quatre cas.

- Si $x \leq a$:
Dans ce cas $F(x) = 0$ et on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{(n, [an])}(x) = 0$.
D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) &= 0 \\ &= F_Z(x) \end{aligned} \quad \swarrow x \leq a < F^{-1}(\alpha)$$

- Si $a < x < F^{-1}(\alpha)$:
Dans ce cas, puisque F est strictement croissante sur $]a; b[$:

$$F(a) < F(x) < \alpha$$

Autrement dit :

$$0 < F(x) < \alpha$$

Ainsi, d'après la question **4.a.**, licite car $0 < F(x) < 1$ et que $\alpha \in]F(x); 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) &= 0 \\ &= F_Z(x) \end{aligned} \quad \swarrow x < F^{-1}(\alpha)$$

- Si $F^{-1}(\alpha) < x < b$:
Dans ce cas, puisque F est strictement croissante sur $]a; b[$:

$$\alpha < F(x) < F(b)$$

Autrement dit :

$$\alpha < F(x) < 1$$

Ainsi, d'après la question **4.b.**, licite car $0 < F(x) < 1$ et que $\alpha \in]0; F(x)[$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n, [an])}(x) &= 1 \\ &= F_Z(x) \end{aligned} \quad \swarrow x > F^{-1}(\alpha)$$

Remarque

Un tel niveau de détail pour les valeurs de $F(a)$ et $F(b)$ n'était sans doute pas attendu; mais il convient tout de même de justifier au moins brièvement. Dans l'idéal, il serait tout de même bon de procéder comme rédigé pour bien faire apparaître l'importance des hypothèses faites sur f .

♥ Conseil du chef ♥

Lorsque la loi limite est donnée, il est utile de commencer par rappeler sa fonction de répartition :

- si elle n'était pas déjà donnée, il y a un point de barème pour le faire;
- l'avoir sous les yeux permet de mieux distinguer les cas !

- Si $x \geq b$:
Dans ce cas $F(x) = 1$ et on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{(n,[an])}(x) = 1$.
D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n,[an])}(x) = 1 = F_Z(x) \quad \leftarrow x \geq b > F^{-1}(\alpha)$$

On a ainsi démontré :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{F^{-1}(\alpha)\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n,[an])}(x) = F_Z(x)$$

Conclusion : $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, où Z suit la loi certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

5.c. En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n suffisamment proche de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{(n,[an])} - F^{-1}(\alpha)| \geq \varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}(|X_{(n,[an])} - F^{-1}(\alpha)| < \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(-\varepsilon < X_{(n,[an])} - F^{-1}(\alpha) < \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon < X_{(n,[an])} < F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) \\ &= 1 - F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) + F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) \end{aligned}$$

$\leftarrow X_{(n,[an])}$ est à densité (question 3.c.)

Or :

- $\varepsilon > 0$, donc $F^{-1}(\alpha) + \varepsilon > F^{-1}(\alpha)$ et ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) = 1$$

- $\varepsilon > 0$, donc $F^{-1}(\alpha) - \varepsilon < F^{-1}(\alpha)$ et ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) + \varepsilon) + F_{(n,[an])}(F^{-1}(\alpha) - \varepsilon) = 0$$

Conclusion : la suite de variables aléatoires $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

Pour info...

En général, la CV en loi n'implique pas la CV en proba (c'est la réciproque qui est vraie). Mais dans le cas d'une CV en loi vers une loi certaine, c'est le cas.

Remarque

Comme dit dans le 'Pour info' ci-dessus, si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV en loi vers une VA Z suivant une loi certaine égale à c , alors $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CV en proba vers c . La démonstration est identique à celle rédigée ici. À écrire pour s'en convaincre.

6. Dans cette question, on souhaite écrire une fonction **Python** d'en-tête **def tri(L)** : permettant de trier dans l'ordre croissant les valeurs d'une liste **L** sans utiliser de fonction de tri prédéfinie dans **Python**.

Pour cela, on utilise un algorithme de tri appelé *tri par insertion* et défini de la façon suivante :

- On agit sur les coefficients de la liste **L**, que l'on suppose numérotés de 0 à $s - 1$.
- Pour chaque k compris entre 1 et $s - 1$, avant l'étape k les coefficients numérotés 0 à $k - 1$ de **L** ont déjà été classés dans l'ordre croissant, les coefficients suivants étant inchangés.
L'étape k consiste alors à insérer la valeur x du coefficient numéroté k de **L** en bonne position parmi les $k + 1$ premiers coefficients de **L** afin qu'à l'issue de l'étape k les coefficients numérotés 0 à k de **L** soient classés dans l'ordre croissant, les coefficients suivants étant inchangés.

Par exemple, en partant de la liste **L**=[38,28,35,24,31,15], les étapes de l'algorithme de tri par insertion donnent successivement :

```
[28, 38, 35, 24, 31, 15]
[28, 35, 38, 24, 31, 15]
[24, 28, 35, 38, 31, 15]
[24, 28, 31, 35, 38, 15]
[15, 24, 28, 31, 35, 38]
```

Compléter la fonction **tri** ci-dessous afin que son exécution mette en œuvre l'algorithme de tri par insertion décrit ci-dessus puis renvoie la liste **L** dans laquelle les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.

```
1 def tri(L):
2     s=...
3     for k in ...
4         x=L[k]
5         i=...
6         while x<L[i] and i>=0:
7             ...
8             ...
9             L[i+1]=...
10    return L
```

Voici :

```

1 def tri(L):
2     s=len(L)
3     for k in range(1,s):
4         x=L[k]
5         i=k-1
6         while x<L[i] and i>=0:
7             L[i+1]=L[i]
8             i=i-1
9         L[i+1]=x
10    return L

```

7. On écrit le programme **Python** suivant à la suite de la fonction **tri** :

```

1 def echantillonX(n):
2     ...
3
4 def X(n,k):
5     L=echantillonX(n)
6     return ...
7
8 n=5000
9 A=np.linspace(0.01,0.99,99)
10 B=[]
11 for a in A:
12     k=int(np.floor(n*a)) #k=partie entière de n*a
13     B.append(X(n,k))
14 plt.plot(A,B,"r+")
15 plt.show()

```

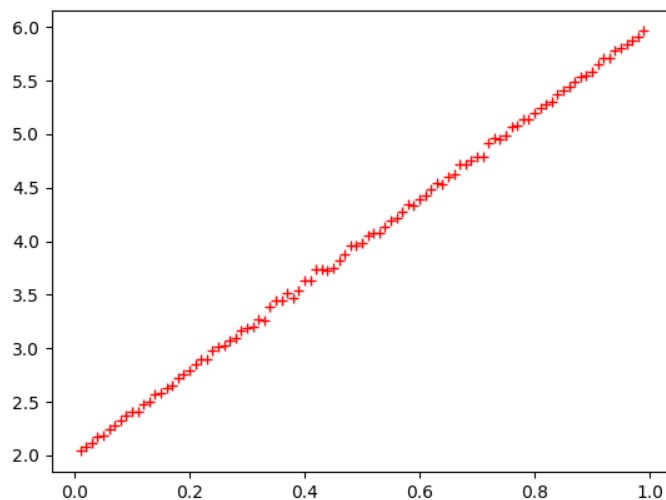
La fonction **echantillonX**, que l'on suppose déjà écrite pour les trois questions suivantes, renvoie, sous la forme d'une liste, une réalisation du n -uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

On suppose que la densité de X satisfait les hypothèses de la question 5.

7.a. Compléter la fonction **X** afin qu'elle renvoie une réalisation de la variable aléatoire $X_{(n,k)}$ lorsqu'on lui fournit en entrée deux entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$. On pourra utiliser la fonction **tri**.

Il suffit d'ajouter `return tri(L)[k-1]` qui permet de trier la liste **L** puis d'en récupérer le k -ième plus grand nombre.

7.b. En exécutant le programme, on obtient l'affichage suivant :



À quoi correspondent les points affichés sur cette représentation graphique ?

Les 99 points de ce graphique ont tous une abscisse $\alpha \in \{0,01; 0,02; \dots; 0,99\}$ et une ordonnée correspondante étant une réalisation de la variable aléatoire $X_{(n,[an])}$ lorsque $n = 5000$.

7.c. Démontrer que pour tout $x \in]2; 6[$, $F(x) = \frac{x-2}{4}$. En déduire la loi commune des X_i simulées par la fonction **echantillonX**.

- D'après la question 5.c., pour tout $\alpha \in]0; 1[$, la suite $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $F^{-1}(\alpha)$. On peut donc considérer que pour tout $\alpha \in]0; 1[$, toute réalisation de $X_{(5000,[5000\alpha])}$ fournit une valeur approchée de $F^{-1}(\alpha)$.

Par conséquent, les points du graphique ci-dessus sont tous proches des points $(\alpha, F^{-1}(\alpha))$ lorsque $\alpha \in \{0, 01; 0, 02; \dots; 0, 99\}$. Ainsi, on peut donc légitimement supposer que F^{-1} est une fonction affine sur $]0; 1[$ telle que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F^{-1}(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} F^{-1}(x) = 6$$

D'où :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad F^{-1}(x) = 4x + 2$$

Enfin, on sait que F^{-1} est bijective de $]0; 1[$ dans $]2; 6[$. Soit donc $y \in]2; 6[$. Résolvons $F^{-1}(x) = y$, d'inconnue $x \in]0; 1[$.

Soit $x \in]0; 1[$. On a :

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) = y &\iff 4x + 2 = y \\ &\iff x = \frac{y - 2}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall y \in]2; 6[, \quad F(y) = \frac{y - 2}{4}$.

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $]2; 6[$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

Conclusion : la loi commune des X_i simulées est la loi uniforme sur $]2; 6[$.

7.d. Compléter alors la fonction **echantillonX** par une ou plusieurs lignes de code pour que le script produise une représentation graphique de valeurs simulées proche de la représentation graphique ci-dessus.

Il suffit d'ajouter la ligne : `return 2+4*rd.random(n)`.

Remarque

On trouve l'expression de tête !

Rappel...

Pour simuler une uniforme sur $[a; b]$: `a+(b-a)*rd.random()`

Remarque

La ligne `return [2+4*rd.random() for k in range(n)]` convient également.

PARTIE 2

On s'intéresse dans cette partie au cas où $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda \in]0; +\infty[$.

On admet le résultat suivant :

Si Y et Z sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, de densités respectives f_Y et f_Z telles qu'au moins l'une de ces deux densités est bornée, alors la variable aléatoire $Y + Z$ est à densité et admet pour densité la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t)f_Z(t)dt$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

8.a. On note $(T_1, \dots, T_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :

pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, T_i suit la loi exponentielle $\mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note de plus $S_k = T_1 + \dots + T_k$.

Montrer par récurrence sur $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ que la variable aléatoire S_k est une variable aléatoire à densité de densité la fonction $g_{n,k}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{n,k}(x) = \begin{cases} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)x} (1 - e^{-\lambda x})^{k-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- Initialisation.** Pour $k = 1$:

On a $S_1 = T_1$, et T_1 suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. Ainsi, S_1 est une variable aléatoire à densité

et admet pour densité la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n\lambda e^{-n\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_{n,1}(x) &= \begin{cases} n \binom{n-1}{0} \lambda e^{-\lambda n x} (1 - e^{-\lambda x})^0 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi S_1 est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction $g_{n,1}$: l'initialisation est vérifiée.

- Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Supposons que S_k est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction $g_{n,k}$; et démontrons que S_{k+1} est une variable aléatoire à densité, de densité de la fonction $g_{n,k+1}$. Remarquons que :

$$S_{k+1} = S_k + T_{k+1}$$

Or :

- ✓ par hypothèse de récurrence, S_{k+1} est une variable aléatoire à densité, de densité $g_{n,k}$;
- ✓ T_{k+1} suit la loi exponentielle de paramètre $(n-k)\lambda$; donc T_{k+1} est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction $f_{T_{k+1}} : x \mapsto \begin{cases} (n-k)\lambda e^{-(n-k)\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$;
- ✓ les variables aléatoires $T_1, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes, donc par lemme des coalitions, les variables aléatoires S_k et T_{k+1} sont indépendantes ;
- ✓ la fonction $f_{T_{k+1}}$ est bornée (minorée par 0 et majorée par $f_{T_{k+1}}(0)$, car décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$).

Par conséquent, d'après le résultat encadré dans l'énoncé, la variable aléatoire S_{k+1} est à densité, de densité la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt$.

Or, puisque $g_{n,k}$ est nulle sur $]-\infty; 0]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leq 0$:

Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x-t \leq 0$ et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f_{T_{k+1}}(x-t) = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt &= 0 \\ &= g_{n,k+1}(x) \end{aligned} \quad \leftarrow x \leq 0$$

* Si $x > 0$:

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ f_{T_{k+1}}(x-t) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} t \geq 0 \\ x-t \leq 0 \end{cases} \\ &\iff t \geq x \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt &= \int_0^x f_{T_{k+1}}(x-t)g_{n,k}(t)dt \\ &= \int_0^x (n-k)\lambda e^{-(n-k)\lambda(x-t)} n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda(n-k+1)t} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} dt \\ &= n(n-k) \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \lambda e^{-(n-k)\lambda x} \int_0^x \lambda e^{(n-k)\lambda t} e^{-(n-k)\lambda t} e^{-\lambda t} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} dt \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \lambda e^{-(n-k)\lambda x} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} dt \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \lambda e^{-(n-k)\lambda x} \left[\frac{1}{k} (1-e^{-\lambda t})^k \right]_0^x \\ &= n \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \lambda e^{-(n-k)\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^k \\ &= n \binom{n-1}{k} \lambda e^{-(n-k)\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^k \\ &= g_{n,k+1}(x) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\leftarrow x > 0, \text{ donc pour tout } t \in]0; x[, \\ &\quad t > 0 \text{ et } x-t > 0 \\ &\leftarrow k < n \text{ donc } n-k \neq 0 \\ &\leftarrow k-1 \neq -1 \\ &\leftarrow x > 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, S_{k+1} est à densité, de densité $g_{n,k+1}$: l'hérédité est établie.

Conclusion : pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire S_k est à densité, de densité la fonction $g_{n,k}$.

8.b. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Vérifier que S_k suit la même loi que $X_{(n,k)}$.

D'après la question 3.c., $X_{(n,k)}$ admet pour densité la fonction $f_{(n,k)}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_{(n,k)}(x) &= n \binom{n-1}{k-1} f(x) F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^{k-1} (e^{-\lambda x})^{n-k} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-\lambda x} e^{-(n-k)\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^{k-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \binom{n-1}{k-1} \lambda e^{-(n-k+1)\lambda x} (1-e^{-\lambda x})^{k-1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{ici, } X_1, \dots, X_n \text{ suivent la loi } \mathcal{E}(\lambda)$$

Remarque

Puisque $S_k + T_{k+1} = T_{k+1} + S_k$, on a le choix de la densité qui porte le $x-t$ (un changement de variable permet également de s'y ramener).

Remarque

Ce n'est pas la question la plus facile ; mais elle rapporte beaucoup de points, il faut donc s'entraîner pour en récupérer le plus possible !

$$= g_{n,k}(x)$$

Par conséquent, S_k et $X_{(n,k)}$ ont même densité.

Conclusion : S_k suit la même loi que $X_{(n,k)}$.

9. Soit (n, k) un couple d'entiers tel que $1 \leq k \leq n$.

Montrer que $X_{(n,k)}$ admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

On sait que $S_k = \sum_{i=1}^k T_i$. Ainsi, la variable aléatoire S_k est une somme de variables aléatoires admettant une espérance et une variance; elle admet donc également une espérance et une variance, et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_k) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k T_i\right) && \hookrightarrow \text{linéarité de l'espérance, licite car toutes existent} \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(T_i) && \hookrightarrow \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, T_i \hookrightarrow \mathcal{E}((n-i+1)\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_k) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^k T_i\right) && \hookrightarrow T_1, \dots, T_k \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbb{V}(T_i) && \hookrightarrow \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, T_i \hookrightarrow \mathcal{E}((n-i+1)\lambda) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{((n-i+1)\lambda)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : d'après la question précédente, on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_{(n,k)}) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)^2}$$

10. 10.a. Montrer que pour tout entier $j \geq 1$ et tout $x \in [j; j+1]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Soient $j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [j; j+1]$. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2} &\iff 0 \leq \frac{x-j}{xj} \leq \frac{2}{x^2} && \hookrightarrow x, j > 0 \\ &\iff 0 \leq x-j \leq \frac{2j}{x} && \hookrightarrow x > 0 \\ &\iff 0 \leq x(x-j) \leq 2j \end{aligned}$$

Or :

- $x \geq j > 0$, donc :

$$x(x-j) \geq 0$$

- la fonction $f : x \mapsto x^2 - xj$ est dérivable sur $[j; j+1]$ et, pour tout $x \in [j; j+1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - j \\ &\geq j \\ &> 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\hookrightarrow x \geq j \\ &\hookrightarrow j \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $[j; j+1]$; d'où :

$$\forall x \in [j; j+1], f(x) \leq f(j+1)$$

Et

$$\begin{aligned} f(j+1) &= (j+1)(j+1-j) \\ &= j+1 \\ &\leq 2j \end{aligned} \quad \leftarrow 1 \leq j$$

Ainsi :

$$\forall x \in [j; j+1], x(x-j) \leq 2j$$

Par conséquent, on a :

$$\forall x \in [j; j+1], 0 \leq x(x-j) \leq 2j$$

Conclusion : par équivalences, on a établi

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [j; j+1], 0 \leq \frac{1}{j} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x^2}$$

10.b. En déduire l'encadrement, pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) \leq \mathbb{E}(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n$.

- D'une part, d'après la question 9. :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{(n,k)}) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n-i+1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=n-k+1}^n \frac{1}{j} \end{aligned} \quad \leftarrow j = n - i + 1$$

- D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente :

$$\forall x \in [j; j+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

D'où, en intégrant sur $[j; j+1]$, licite car les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[j; j+1]$ et par croissance de l'intégrale (licite car $j \leq j+1$) :

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dx \leq \int_j^{j+1} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$$

Autrement dit :

$$\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j} \leq \ln(j+1) - \ln(j) + 2 \left(\frac{-1}{j+1} - \frac{-1}{j} \right)$$

D'où, en sommant pour $j \in \llbracket n-k+1; n \rrbracket$, licite car $k \leq n$, donc $n-k+1 \geq 1$:

$$\sum_{j=n-k+1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \sum_{j=n-k+1}^n \frac{1}{j} \leq \sum_{j=n-k+1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) + 2 \sum_{j=n-k+1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right)$$

Ainsi, par télescopes :

$$\ln(n+1) - \ln(n-k+1) \leq \sum_{j=n-k+1}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) - \ln(n-k+1) + 2 \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

D'où le résultat, puisque $\lambda > 0$.

Conclusion : pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) \leq \mathbb{E}(X_{(n,k)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n-k+1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

10.c. Montrer que pour tout $\alpha \in]0; 1[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha).$$

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\alpha n < n$ et, pour n suffisamment proche de $+\infty$, on a également $\alpha n \geq 1$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$:

$$1 \leq \lfloor \alpha n \rfloor < n$$

et donc, d'après la question précédente :

$$\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) \leq \mathbb{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Or :

- on a

$$\ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) = \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} \right)$$

mais

$$\frac{\alpha n - 1}{n} < \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \leq \frac{\alpha n}{n}$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$$

Ainsi, par opérations et composition, puisque $1 - \alpha \neq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} \right) = \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)$$

- et, en utilisant à nouveau $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} = \alpha$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \leftarrow 1 - \alpha \neq 0$$

$$= 0$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{n+1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} \right) + \frac{2}{\lambda} \left(\frac{1}{n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)$$

Par théorème d'encadrement, on obtient finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)$$

Conclusion : $\forall \alpha \in]0; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha).$

11. Montrer que pour tout $\alpha \in]0; 1[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = 0.$$

Soit $\alpha \in]0; 1[$. Comme en question précédente, on peut appliquer le résultat de la question 9. pour $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment proche de $+\infty$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{\lfloor \alpha n \rfloor} \frac{1}{(n - i + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=n - \lfloor \alpha n \rfloor + 1}^n \frac{1}{j^2} \quad \leftarrow j = n - i + 1 \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n - \lfloor \alpha n \rfloor} \frac{1}{j^2} \right) \end{aligned}$$

Or :

- ✓ la série $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2}$ est une série de Riemann convergente, notons $S = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$;
- ✓ d'après ce qui a été fait en question précédente :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n - \lfloor \alpha n \rfloor &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n} \right) \\ &= +\infty \quad \leftarrow 1 - \alpha > 0 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} - \sum_{j=1}^{n - \lfloor \alpha n \rfloor} \frac{1}{j^2} \right) \\ &= S - S \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall \alpha \in]0; 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(X_{(n, \lfloor \alpha n \rfloor)}) = 0.$

12. Soit $\alpha \in]0; 1[$.

Remarque

Il serait sans doute accepté d'écrire directement que $\lfloor \alpha n \rfloor \sim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n$; mais il faut tout de même justifier proprement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \lfloor \alpha n \rfloor) = 1 - \alpha$; et pour cela, nous n'avons pas trop le choix que de procéder comme je l'ai fait...

Remarque

Ou continuité de $\ln$ en $\frac{1}{1 - \alpha}$.

Pour info...

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12.a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que :

$$\mathbb{P} \left(\left| X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2 \right).$$

Notons $Z_n = \left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2$. La variable aléatoire Z_n :

- ✓ est à valeurs positives,
- ✓ admet une espérance, car $X_{(n,[an])}$ admet un moment d'ordre 2, donc c'est également le cas de $X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$.

Ainsi, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(Z_n \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}(Z_n)$$

Ainsi, avec $a = \varepsilon^2 > 0$:

$$\mathbb{P}(Z_n \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(Z_n)$$

Or, par stricte croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{P}(Z_n \geq \varepsilon^2) = \mathbb{P}(\sqrt{Z_n} \geq |\varepsilon|)$$

D'où le résultat, puisque $\varepsilon > 0$.

Conclusion : $\mathbb{P} \left(\left| X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2 \right).$

12.b. En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $-\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P} \left(\left| X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left(\left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2 \right)$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2 \right) &= \mathbb{V} \left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right) + \left(\mathbb{E} \left(X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right) \right)^2 \\ &= \mathbb{V}(X_{(n,[an])}) + \left(\mathbb{E}(X_{(n,[an])}) + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right)^2 \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de l'espérance, propriété de la variance} \\ \text{questions 10.c. et 11.} \end{array}$$

Par théorème d'encadrement, obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Conclusion : on a établi :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| X_{(n,[an])} + \frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha) \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Ainsi $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $-\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$.

13. Quelle question de la partie 1 permet de retrouver le résultat précédent ?

Il s'agit de la question 5.c.. En effet, avec $I = \mathbb{R}^{++}$ et $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, la fonction f est :

- ✓ continue sur I ,
- ✓ strictement positive sur I ,
- ✓ nulle en dehors de I .

Ainsi les hypothèses de la question 5.c. sont respectées. Par conséquent $(X_{(n,[an])})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine égale à $F^{-1}(\alpha)$.

Or, pour tout $y \in]0; 1[$, pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$:

$$\begin{aligned} F(x) = y &\iff 1 - e^{-\lambda x} = y \\ &\iff e^{-\lambda x} = 1 - y \\ &\iff x = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - y) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 1 - y > 0, \lambda \neq 0$$

Et ainsi, puisque $\alpha \in]0; 1[$, on a $F^{-1}(\alpha) = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$.

PARTIE 3

14. On admet pour cette question le théorème suivant :

Théorème :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille $(T_{n,1}, \dots, T_{n,n})$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :

- pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire $T_{n,i}$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}((n-i+1)\lambda)$;
- pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $X_{(n,k)} = T_{n,1} + \dots + T_{n,k}$.

En quoi ce théorème donne-t-il un résultat plus fort que ce qui a été prouvé en 8.b. ?

En question 8.b., on a seulement établi que $X_{(n,k)}$ et $T_1 + \dots + T_k$ (où T_i suit la loi $\mathcal{E}(n-i+1)\lambda$) ont même loi. Ce théorème affirme en fait qu'il existe des variables aléatoires T_i de loi $\mathcal{E}(n-i+1)\lambda$ telles que $X_{(n,k)}$ et $T_1 + \dots + T_k$ sont égales : ce qui implique en particulier le résultat de la question 8.b..

Le but de la fin du problème est de démontrer ce théorème dans le cas où $n = 2$.

Soit $q \in]0; 1[$ et soit $p = 1 - q$. On dit qu'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi $\mathcal{L}(q)$ si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z = k]) = pq^k.$$

15. On suppose que Z suit la loi $\mathcal{L}(q)$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Z . Déterminer $\mathbb{P}([Z \geq \ell])$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

- Remarquons que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z + 1 = i]) &= \mathbb{P}([Z = i - 1]) \\ &= pq^{i-1} \end{aligned} \quad \leftarrow i - 1 \in \mathbb{N}$$

Ainsi $Z + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Or $Z = (Z + 1) - 1$, donc Z admet une espérance et une variance...

$$\text{Conclusion : } \mathbb{E}(Z) = \frac{q}{p} \text{ et } \mathbb{V}(Z) = \frac{q}{p^2}$$

- Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Puisque ℓ est entier et que Z est à valeurs entières, on a :

$$[Z \geq \ell] = \bigcup_{k=\ell}^{+\infty} [Z = k]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z \geq \ell]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=\ell}^{+\infty} [Z = k]\right) && \leftarrow \text{incompatibilité des évènements de } ([Z = k])_{k \in \llbracket \ell; +\infty \rrbracket} \\ &= \sum_{k=\ell}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = k]) && \leftarrow \ell \geq 0 \\ &= \sum_{k=\ell}^{+\infty} pq^k && \leftarrow i = k - \ell \\ &= pq^\ell \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\ &= pq^\ell \frac{1}{1 - q} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall \ell \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z \geq \ell]) = q^\ell.$$

Remarque

Il y a une légère ambiguïté dans le sujet : il faudrait, là encore, supposer que $X_1, \dots, X_n$ suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ pour comparer les deux résultats... On pourrait penser que ce théorème est valable pour toute loi commune aux X_i , ce qui n'a aucune raison d'être le cas. Les hypothèses de la question 19. confirment cela.

Remarque

Dans le cas où $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on démontre souvent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([Y > n]) = (1 - p)^n$. On retrouve bien cela ici...

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(Z_1, \dots, Z_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{L}(q)$.

On pose $U_n = \min(Z_1, \dots, Z_n)$.

16.a. Calculer $\mathbb{P}(U_n \geq \ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U_n \geq \ell]) &= \mathbb{P}([\min(Z_1, \dots, Z_n) \geq \ell]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [Z_i \geq \ell]\right) && \leftarrow Z_1, \dots, Z_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([Z_i \geq \ell]) && \leftarrow \text{pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket, Z_i \hookrightarrow \mathcal{L}(q) \text{ et question précédente, licite car } \ell \in \mathbb{N} \\ &= \prod_{i=1}^n q^\ell \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall \ell \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([U_n \geq \ell]) = q^{n\ell}.$$

16.b. En déduire que U_n suit une loi $\mathcal{L}(r)$ pour un certain paramètre r à déterminer.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} [U_n \geq \ell] &= [U_n = \ell] \cup [U_n > \ell] \\ &= [U_n = \ell] \cup [U_n \geq \ell + 1] \end{aligned} \quad \leftarrow U_n \text{ est à valeurs entières et } \ell \text{ est entier}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U_n \geq \ell]) &= \mathbb{P}([U_n = \ell] \cup [U_n \geq \ell + 1]) \\ &= \mathbb{P}([U_n = \ell]) + \mathbb{P}([U_n \geq \ell + 1]) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{incompatibilité de } [U_n = \ell] \text{ et } [U_n \geq \ell + 1]$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U_n = \ell]) &= \mathbb{P}([U_n \geq \ell]) - \mathbb{P}([U_n \geq \ell + 1]) \\ &= q^{n\ell} - q^{n(\ell+1)} \\ &= (q^n)^\ell (1 - q^n) \end{aligned} \quad \leftarrow \text{question précédente, licite car } \ell, \ell + 1 \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $U_n \hookrightarrow \mathcal{L}(q^n)$.

✍ Rédaction

On peut aller plus vite et certainement se contenter de donner directement cette égalité pour débiter (sans ce qui précède).

★ Classique ! ★

Les questions 15., 16.a. et 16.b. sont très classiques (voir d'ailleurs Question classique 11) ! Il n'aurait d'ailleurs pas été surprenant que l'énoncé ne guide pas et demande directement la loi de U_n .

17. Soient Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(q)$. Soient k_1, k_2 deux entiers naturels. Montrer que :

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \frac{1}{1+q} q^{2k_1} q^{k_2}.$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $([Z_1 = i])_{i \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}([Z = i] \cap [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2])$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = i] \cap [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) \quad \leftarrow \forall i < k_1, [Z = i] \cap [Z_1 \geq k_1] = \emptyset \\ &= \sum_{i=k_1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = i] \cap [Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) \quad \leftarrow \forall i \geq k_1, [Z = i] \subset [Z_1 \geq k_1] \\ &= \sum_{i=k_1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = i] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) \\ &= \sum_{i=k_1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = i] \cap [Z_2 \geq i + k_2]) \quad \leftarrow Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{i=k_1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = i]) \mathbb{P}([Z_2 \geq i + k_2]) \quad \leftarrow Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{L}(q) \text{ et : } \forall i \geq k_1, i \in \mathbb{N}; i + k_2 \in \mathbb{N} \\ &= \sum_{i=k_1}^{+\infty} p q^i q^{i+k_2} \\ &= p q^{k_2} \sum_{i=k_1}^{+\infty} (q^2)^i \quad \leftarrow j = i - k_1 \\ &= p q^{k_2} (q^2)^{k_1} \sum_{j=0}^{+\infty} (q^2)^j \\ &= p q^{2k_1+k_2} \frac{1}{1-q^2} \\ &= p q^{2k_1+k_2} \frac{1}{(1-q)(1+q)} \\ &= q^{2k_1+k_2} \frac{1}{1+q} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \frac{1}{1+q} q^{2k_1} q^{k_2}.$

18. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soient x, y deux réels positifs ou nuls.

18.a. Soit m un entier naturel non nul. On pose $Z_1 = \lfloor mX_1 \rfloor$ et $Z_2 = \lfloor mX_2 \rfloor$. Montrer que les variables aléatoires Z_1 et Z_2 suivent toutes les deux la loi $\mathcal{L}(q)$, où q est un paramètre que l'on précisera.

- Puisque X_1 et X_2 suivent la même loi, les variables aléatoires Z_1 et Z_2 également.
- Puisque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on considère que $X_1(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi $(mX_1)(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ et donc :

$$Z_1(\Omega) = \mathbb{N}$$

Remarque

Question classique 34...

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z_1 = k]) &= \mathbb{P}([mX_1] = k) \\
 &= \mathbb{P}([k \leq mX_1 < k+1]) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{k}{m} \leq X_1 < \frac{k+1}{m}\right]\right) && \leftarrow m > 0 \\
 &= F\left(\frac{k+1}{m}\right) - F\left(\frac{k}{m}\right) && \leftarrow X_1 \text{ est à densité} \\
 &= 1 - e^{-\lambda \frac{k+1}{m}} - \left(1 - e^{-\lambda \frac{k}{m}}\right) && \leftarrow \frac{k}{m}, \frac{k+1}{m} \geq 0 \\
 &= e^{-\lambda \frac{k}{m}} \left(1 - e^{-\lambda \frac{1}{m}}\right) \\
 &= \left(e^{-\lambda \frac{1}{m}}\right)^k \left(1 - e^{-\lambda \frac{1}{m}}\right)
 \end{aligned}$$

Rappel...

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$
 $[x] = k \iff k \leq x < k+1$

Conclusion : $Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{L}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}}\right)$.

- 18.b. On conserve les notations de la question précédente et on pose de plus $k_1 = [mx]$ et $k_2 = [my]$. Montrer les inclusions entre événements :

$$\begin{aligned}
 [Z_1 \geq k_1 + 1] &\subset [X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1], \\
 [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] &\subset [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq k_2].
 \end{aligned}$$

- Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned}
 Z_1(\omega) \geq k_1 + 1 &\implies [mX_1(\omega)] \geq [mx] + 1 \\
 &\implies mX_1(\omega) > mx \\
 &\implies X_1(\omega) > x && \leftarrow \begin{array}{l} [mX_1(\omega)] \leq mX_1(\omega) \text{ et } mx < [mx] + 1 \\ m > 0 \end{array}
 \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$[Z_1 \geq k_1 + 1] \subset [X_1 > x]$$

Et en poursuivant, puisque $m > 0$:

$$\begin{aligned}
 X_1(\omega) > x &\implies mX_1(\omega) > mx \\
 &\implies [mX_1(\omega)] \geq [mx] \\
 &\implies Z_1(\omega) \geq k_1 && \leftarrow \text{croissance de } [\cdot] \text{ sur } \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$[X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1]$$

Conclusion : $[Z_1 \geq k_1 + 1] \subset [X_1 > x] \subset [Z_1 \geq k_1]$.

- Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{aligned}
 Z_2(\omega) - Z_1(\omega) \geq k_2 + 2 &\implies [mX_2(\omega)] - [mX_1(\omega)] \geq [my] + 2 \\
 &\implies mX_2(\omega) - (mX_1(\omega) - 1) > my + 1 && \leftarrow [mX_2(\omega)] \leq mX_2(\omega); [mX_1(\omega)] > mX_1(\omega) - 1 \text{ et } my < [my] + 1 \\
 &\implies m(X_2(\omega) - X_1(\omega)) > my \\
 &\implies X_2(\omega) - X_1(\omega) > y && \leftarrow m > 0
 \end{aligned}$$

On a donc établi :

$$[X_2 - X_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_2 - X_1 > y]$$

Et en poursuivant, puisque $m > 0$:

$$\begin{aligned}
 X_2(\omega) - X_1(\omega) > y &\implies mX_2(\omega) - mX_1(\omega) > my \\
 &\implies [mX_2(\omega)] + 1 - [mX_1(\omega)] > my && \leftarrow mX_2(\omega) < [mX_2(\omega)] + 1; mX_1(\omega) \geq [mX_1(\omega)] \\
 &\implies [mX_2(\omega)] - [mX_1(\omega)] > my - 1
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $[mX_2(\omega)] - [mX_1(\omega)]$ est un entier strictement supérieur à $my - 1$. Or, par définition de la partie entière, $[my]$ est le plus petit entier strictement supérieur à $my - 1$. Par conséquent :

$$[mX_2(\omega)] - [mX_1(\omega)] \geq [my]$$

On a donc établi :

$$[X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq k_2]$$

Conclusion : $[Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2] \subset [X_2 - X_1 > y] \subset [Z_2 - Z_1 \geq k_2]$.

Rédaction

Pour changer un peu, et parce-que ça s'y prête bien... On aurait d'ailleurs pu rédiger ainsi en questions 4.a. et 4.b.

Remarque

Des manipulations élémentaires pourtant la question n'est pas si facile : il ne faut pas se perdre dans les majorations et minora-tions.

18.c. En déduire l'encadrement :

$$\frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m}} \leq \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor}{m}}.$$

D'après la question précédente :

$$([Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2]) \subset ([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \subset ([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2])$$

ainsi par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2]) \leq \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2])$$

or :

- d'après la question 17., licite car $k_1 + 1, k_2 + 2 \in \mathbb{N}$; et puisque $Z_1, Z_2 \hookrightarrow \mathcal{L}(e^{-\frac{\lambda}{m}})$:

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1 + 1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2 + 2]) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\lambda}{m}}} e^{-\frac{2\lambda(k_1+1)}{m}} e^{-\frac{\lambda(k_2+2)}{m}}$$

- de même :

$$\mathbb{P}([Z_1 \geq k_1] \cap [Z_2 - Z_1 \geq k_2]) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\lambda}{m}}} e^{-\frac{2\lambda k_1}{m}} e^{-\frac{\lambda k_2}{m}}$$

D'où le résultat, par définitions de k_1 et k_2 .

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m}} \leq \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor}{m}}.$$

18.d. Montrer que :

$$\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m}} \leq \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \leq \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor}{m}}$$

Or, comme établi précédemment : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor mx \rfloor}{m} = x$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor my \rfloor}{m} = y$.

Par conséquent, par opérations :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor + 1}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor + 2}{m}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-\lambda/m}} e^{-2\lambda \frac{\lfloor mx \rfloor}{m}} e^{-\lambda \frac{\lfloor my \rfloor}{m}} = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}$$

Mais $\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y])$ est une constante par rapport à m ...

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) = \frac{1}{2} e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y}.$$

Rappel...

$(A_1 \subset B_1 \text{ ET } A_2 \subset B_2)$
 $\implies A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$.
 Se démontre aisément, et si c'est
 vrai pour 2...

Remarque

Raisonnement intéressant : on
 encadre une expression constante
 par rapport à m par deux expres-
 sions ayant une limite commune
 quand $m \rightarrow +\infty$. Cela change un
 peu !

19. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ les variables aléatoires notées précédemment $X_{(2,1)}$ et $X_{(2,2)}$.

19.a. Montrer que $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = 0$. En déduire que les variables aléatoires $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ sont presque-sûrement à valeurs strictement positives.

- ✓ Les variables aléatoires X_1 et $-X_2$ sont à densité (car X_2 l'est...);
- ✓ les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, X_1 et $-X_2$ le sont aussi;
- ✓ $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, elle admet donc une densité bornée.

Par conséquent, d'après le résultat admis en début de partie 2, la variable aléatoire $X_1 - X_2$ est à densité.

D'où :

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = 0$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}([X_1 = X_2]) = 0.$$

- Ensuite, puisque $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{P}([X_{(1)} \geq 0]) = 1$$

Or, d'après la question 1.b., $X_{(1)}$ est à densité, donc

$$\mathbb{P}([X_{(1)} = 0]) = 0$$

$$\text{Conclusion : } \mathbb{P}([X_{(1)} > 0]) = 1.$$

Remarque

À ce stade du sujet, on peut se
 contenter de ces arguments, sans
 repasser par le fait que $[X_{(1)} \geq 0]$
 $= [X_{(1)} = 0] \cup [X_{(1)} > 0]$...

- Puis, par définition de $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$:

$$\forall \omega \in \Omega, (X_{(2)} - X_{(1)})(\omega) \geq 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_{(2)} - X_{(1)} \geq 0]) = 1$$

Or :

$$\begin{aligned} [X_{(2)} - X_{(1)} = 0] &= [X_{(2)} = X_{(1)}] \\ &= [\max(X_1, X_2) = \min(X_1, X_2)] \\ &= [X_1 = X_2] \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le premier point, on obtient :

$$\mathbb{P}([X_{(2)} - X_{(1)} = 0]) = 0$$

Conclusion : $\mathbb{P}([X_{(2)} - X_{(1)} > 0]) = 1.$

19.b. Montrer que pour tous réels positifs x et y :

$$\mathbb{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$. D'après la formule des probabilités totales avec $([X_2 \geq X_1], [X_2 < X_1])$ comme système complet d'événements :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 \geq X_1] \cap [X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) + \mathbb{P}([X_2 < X_1] \cap [X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) \\ &= \mathbb{P}([X_2 \geq X_1] \cap [X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) + \mathbb{P}([X_2 < X_1] \cap [X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) + \mathbb{P}([X_2 > x] \cap [X_1 - X_2 > y]) \\ &= 2\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} X_{(1)} = \min(X_1, X_2) \text{ et } X_{(2)} = \max(X_1, X_2) \\ y \geq 0, \text{ donc } [X_2 - X_1 > y] \subset [X_2 \geq X_1]; [X_1 - X_2 > y] \subset [X_1 > X_2] \\ \text{symétrie des rôles de } X_1 \text{ et } X_2, \text{ car indépendantes et de même loi} \end{array} \right\}$

Conclusion : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}([X_{(1)} > x] \cap [X_{(2)} - X_{(1)} > y]) = 2\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 - X_1 > y]).$

19.c. Montrer que les variables aléatoires $T_1 = X_{(1)}$ et $T_2 = X_{(2)} - X_{(1)}$ sont indépendantes, de loi respective $\mathcal{E}(2\lambda)$ et $\mathcal{E}(\lambda)$. Conclure quant à l'objectif de cette partie.

D'après la question précédente et la question **18.d.** :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \mathbb{P}([T_1 > x] \cap [T_2 > y]) = e^{-2\lambda x} e^{-\lambda y} \quad (*)$$

- En prenant $y = 0$ dans $(*)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}([T_1 > x] \cap [T_2 > 0]) = e^{-2\lambda x}$$

Or, d'après la question **19.a.**, $\mathbb{P}([T_2 > 0]) = 1$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}([T_1 > x] \cap [T_2 > 0]) = \mathbb{P}([T_1 > x])$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}([T_1 > x]) = e^{-2\lambda x}$$

Et ainsi, puisque T_1 est presque-sûrement à valeurs strictement positives (question **19.a.**), on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([T_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\lambda).$

- De la même façon, en prenant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P}([T_2 > y]) = e^{-\lambda y}$$

Et donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([T_2 \leq y]) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $T_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$

- De la relation $(*)$ et des deux points qui précèdent, on a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \mathbb{P}([T_1 > x] \cap [T_2 > y]) = \mathbb{P}([T_1 > x]) \times \mathbb{P}([T_2 > y])$$

Et on vérifie aisément que cette relation est encore valable lorsque $x < 0$ ou $y < 0$... On a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}([T_1 > x] \cap [T_2 > y]) = \mathbb{P}([T_1 > x]) \times \mathbb{P}([T_2 > y])$$

Remarque

Résultat intuitif et vrai, même s'il n'est pas dans le cours... Voici une démonstration rapide dans le cas général.

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) = 1$.

D'après la FPT avec $(B, \bar{B})$ comme SCE :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$$

Or $A \cap \bar{B} \subset \bar{B}$, et $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0$. D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Conclusion : T_1 et T_2 sont indépendantes.

- Pour finir, en posant $T_{2,1} = T_1$ et $T_{2,2} = T_2$, d'après ce qui précède :

- ✓ $T_{2,1}$ et $T_{2,2}$ sont indépendantes ;

- ✓ $T_{2,1} \hookrightarrow \mathcal{E}((2-1+1)\lambda)$;

- ✓ $T_{2,2} \hookrightarrow \mathcal{E}((2-1+2)\lambda)$;

- ✓ et :

$$X_{(2,1)} = X_{(1)} = T_1 = T_{2,1} \quad ; \quad X_{(2,2)} = X_{(2)} = T_1 + T_2 = T_{2,1} + T_{2,2}$$

Ce qui est bien le cas $n = 2$ du théorème énoncé en début de partie 3.

★★★★★★ FIN ★★★★★★