Mathématiques appliquées
ECG 1re année

200 exercices pour se préparer aux concours !

Remarques et conseils

Mes étudiantes et étudiants savent, à force de leur répéter, que les trois choses les plus importantes pour réussir aux épreuves de mathématiques sont :

LE COURS, LE COURS, LE COURS !

Dans un cours complet, vous trouvez :

- Les définitions, propriétés, théorèmes : à parfaitement connaître. C'est la base de tout acquis en mathématiques...
- Des exemples bien choisis : à faire autant de fois que nécessaire pour se familiariser avec les méthodes, mais également avec la rédaction.

Le cours nécessite un travail quotidien et répétitif. Exemple : si un chapitre débute le lundi, il faut travailler le cours le lundi soir. Puis, si le cours se poursuit le mardi, alors le mardi soir, on retravaille l'intégralité du chapitre, en insistant sur ce qui a été nouvellement vu le mardi, etc.

Les exercices viennent ensuite, pour s'exercer, une fois le cours connu. Ce document contient 200 exercices qui répondent aux attendus de la filière. Les corrigés sont disponibles dans mon livre, qui sera prochainement à la vente sur mon site internet.

Pour chaque exercice, j'ai donné une indication de sa difficulté :

●○○ : des exercices qui se résument souvent à de l'application de techniques ou de méthodes classiques ; sans vraiment de difficulté calculatoire ou de raisonnement. Les indispensables pour réussir !

●●○ : des exercices intermédiaires souvent proches, dans la difficulté et les raisonnements, des exercices que l'on peut trouver sur les épreuves écrites conçues par Ecricome, EDHEC et emlyon. Ce sont de bons entraînements pour les écrits. À travailler sans modération !

●●● : des exercices plus difficiles, sur les calculs et/ou les raisonnements. À travailler si les exercices de difficulté inférieure sont déjà maîtrisés, donc plutôt en fin de chapitre ou plus tard dans l'année. Ils sont toutefois intéressants, sinon ils n'apparaîtraient pas ici, et permettent d'amorcer l'entraînement sur des épreuves écrites conçues par HEC et ESSEC ou pour l'épreuve orale d'HEC.

J'espère que ces exercices vous seront utiles dans votre travail des mathématiques durant vos années de classe préparatoire.

JL

Sommaire

1

Raisonnements et rédaction

On commence par un chapitre essentiel qui permet de structurer à la fois les raisonnements fréquents en mathématiques, mais également la rédaction.
La rédaction est en réalité très personnelle. Tout au long de ce livre, vous trouverez *ma* rédaction, libre à vous de vous en inspirer pour créer la vôtre. Je la veux à la fois claire et exhaustive et elle est, je l'espère, structurante. Point essentiel : la rédaction que vous trouverez dans ce livre peut être mise en place lors des concours.
Ce chapitre sera également l'occasion de s'entraîner sur la résolution d'équations et inéquations.

Exercice 1 – ●○○ – Écriture quantifiée

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes.

1. Tout réel positif est le carré d'un réel.
2. À tout réel, on peut trouver un réel qui lui soit strictement inférieur.
3. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est constante égale à 1.
4. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas la fonction constante égale à 1.
5. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est constante.

Exercice 2 – ●○○ – Négation

1. Donner la négation de chacune des phrases ci-dessous.
   - **1.a.** Tous les élèves de cette classe sont des filles.
   - **1.b.** Il a fait beau tous les jours de la semaine.
   - **1.c.** Il existe une copie de synthèse de textes sans faute d'orthographe.
   - **1.d.** Tous les véhicules avec 4 roues sont des voitures.
2. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes.
   On désignera par f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; et par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.
   - **2.a.** $\forall x \in [-1;1],\ x^2 \leqslant 1$
   - **2.b.** $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)$
   - **2.c.** $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(f(x) = 2 \implies x = 0\big)$
   - **2.d.** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\big)$
   - **2.e.** $\exists N \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant N,\ 4 \leqslant u_n \leqslant 5$
   - **2.f.** $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \;/\; \forall n \geqslant N,\ -\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \varepsilon$

Exercice 3 – ●●○ – Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^3 = x$, avec $x \in \mathbb{R}$
2. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$
3. $x^4 + x^2 - 2 = 0$, avec $x \in \mathbb{R}$
4. $x^2 \geqslant 5$, avec $x \in \mathbb{R}$
5. $-(x+3)^2 \geqslant -4$, avec $x \in \mathbb{R}$
6. $x^2 > x$, avec $x \in \mathbb{R}$
7. $\dfrac{x+2}{-x+3} \geqslant 0$, avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
8. $\dfrac{x+2}{x-3} \geqslant 1$, avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$
9. $\sqrt{x+2} = x$, avec $x \geqslant -2$

Exercice 4 – ●○○ – Terme général & récurrence

1. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{array}\right.$$

Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 1$.

2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{array}\right.$$

Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

3. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1, \quad u_1 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{array}\right.$$

Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (n+1) \times 3^n$.

Exercice 5 – ●○○ – Disjonction de cas

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.
2. 2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n$ est pair.
   2.b. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 6 – ●●○

Démontrer :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*},\ \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exercice 7 – ●●○ – Inégalité de Bernoulli

Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 8 – ●●● – Nul ?

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Établir :

$$\big(\forall \varepsilon > 0,\ \ a \leqslant \varepsilon\big) \iff a = 0$$

Exercice 9 – ●●● – Équation fonctionnelle

Démontrer que la fonction identité (la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$) est la seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

✓ f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

✓ pour tout réel x, $f\big(f(x)\big) = x$.

2

Sommes & produits

Petit chapitre de technique calculatoire. Il est important d'avoir en tête ce que signifient les symboles $\sum$ et $\prod$. En cas de besoin, il n'est jamais idiot de revenir à l'écriture avec des pointillés si cela permet de lever le doute.
Les calculs de produits sont moins fréquents que ceux des sommes, mais il faut tout de même s'y entraîner un peu. Quant aux calculs de sommes, nous aurons de nombreuses occasions d'en faire sur le reste du livre.

Exercice 10 – ●○○ – **Calcul de sommes**

Calculer les sommes et produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$, pour $n \in \mathbb{N}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{2k+5}{3}$
5. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} (2k+4)$, pour $n \geqslant 3$
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{12} (k-2)^2$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{k+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2}$, pour $n \in \mathbb{N}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{3k+2}}$, pour $n \in \mathbb{N}$

10. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{-1}{3^k}$, pour $n \geqslant 2$

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k-1)$, pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 11 – ●●○ Somme, Python & récurrence

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **somme(n)** renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.
3. Que dire de la fonction **mystere** suivante ?

```python
def mystere():
    n=0
    while somme(n)==((-1)**n*(2*n+1)-1)/4:
        n=n+1
    return n
```

Exercice 12 – ●●○ - Sommes & produits télescopiques

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Établir : $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$.

   En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

3. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

4. **4.a.** Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

   $$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

   4.b. Calculer ensuite $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Exercice 13 – ●○○ - Grand classique...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

En exprimant de deux façons différentes la dérivée de f, établir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Exercice 14 - ●●○ - Sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

Exercice 15 - ●●● - Grand classique... à l'aide d'une somme double

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En utilisant une somme double, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^k$.

3

Rudiments sur les ensembles

Voici quelques exercices assez théoriques (le chapitre l'est et il n'est d'ailleurs souvent pas très apprécié). Volontairement, il est séparé du chapitre suivant sur les applications.
L'idée ici est essentiellement d'acquérir les bons réflexes lorsque l'on demande d'établir des inclusions / égalités entre ensembles. Les exercices 19, 20 et 21 peuvent être mis de côté lors d'une première lecture.

Exercice 16 – ●●○ - Vrai ou faux ?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout ensemble E et tous $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:
$$A \subset B \cup C \implies \big(A \subset B \text{ ou } A \subset C\big)$$
2. Pour tout ensemble E et tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$:
$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$
3. Il existe un ensemble E et $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = A \cup B$.
4. Pour tout ensemble E et tous $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$:
$$A \cap B = A \cap C \implies B = C$$
5. Pour tout ensemble E et tous $B, C \in \mathcal{P}(E)$:
$$\big(\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \cap B = A \cap C\big) \implies B = C$$

Exercice 17 – ●●○

Soient A, B, C trois ensembles.

1. On suppose que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.
2. En déduire que si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
3. Démontrer qu'on a même : $A \cup B \subset A \cap B \implies A = B$.

Exercice 18 – ●●○ – Une différence...

Soit E un ensemble non vide.
On rappelle que, pour toutes parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \setminus B$ est l'ensemble défini par :

$$A \setminus B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ET } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Simplifier : $A \setminus A$, $A \setminus \varnothing$, $A \setminus E$, $A \setminus (A \setminus B)$.
2. A-t-on : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$?
3. A-t-on : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \setminus B = B \setminus A$?
4. **4.a.** Démontrer : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
   4.b. Démontrer : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E),\ (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
5. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.

Exercice 19 – ●●○ – Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E. Dans tout l'exercice on appellera **fonction caractéristique de A** l'application f_A définie sur E par :

$$\forall x \in E,\ f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient E un ensemble non vide ainsi que A et B deux parties de E dont les fonctions caractéristiques sont notées f_A et f_B. Démontrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles à déterminer.

1. $g : x \longmapsto 1 - f_A(x)$
2. $h : x \longmapsto f_A(x) \times f_B(x)$
3. $i : x \longmapsto f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$

Exercice 20 – ●●● – Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout ensemble E à n éléments :

$$\text{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$$

Exercice 21 – ●●●

Établir :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left[a - \frac{1}{i} ; a + \frac{1}{i}\right] = \{a\}$$

4

Applications, injections, surjections, bijections

Chapitre qui vient compléter le précédent. Là encore, quelques exercices plus théoriques, mais dans l'ensemble tous accessibles. C'est un chapitre qui a l'avantage de nécessiter peu de connaissances : les définitions d'injection, surjection et bijection suffisent presque à traiter l'ensemble des exercices proposés ici. On insiste à nouveau sur les réflexes de rédaction à acquérir...

Exercice 22 – ●○○ – Vrai ou faux ?

1. La composée de deux injections est une injection.
2. La composée de deux surjections est une surjection.
3. La somme de deux bijections est une bijection.

Exercice 23 – ●●○ – Injection ? Surjection ? Bijection ?

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives de leur ensemble de départ dans leur ensemble d'arrivée ?

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$
2. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$
3. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$
4. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,x) \end{array} \right.$
5. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y) \end{array} \right.$
6. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy) \end{array} \right.$
7. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array} \right.$

Exercice 24 – ●●○ – Bijection et bijection réciproque

Dans chaque cas, démontrer que f est bijective de I dans J et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.

1. $f : x \longmapsto 2x+1$, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $J = [0;1[$.
3. $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 3$, $I = [1;+\infty[$ et $J = [2;+\infty[$
4. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x$, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}^{+*}$.
5. $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$.

Exercice 25 – ●●○ Imparité d'une bijection réciproque

Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et f une bijection de E dans F. Démontrer que si f est impaire, alors f^{-1} également.

Exercice 26 – ●●○ – Nombre de bijections

Soit E un ensemble fini de cardinal n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de bijections de E dans lui-même ?

Exercice 27 – ●●○

Soient E, F, G trois ensembles ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Démontrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. Démontrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 28 – ●●○

Soient E et F deux ensembles ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Démontrer que f est bijective. En déduire que g l'est aussi.

5

Coefficients binomiaux

Voici quelques exercices sur les coefficients binomiaux et la formule du binôme de Newton. Tous très classiques ! Un peu de dénombrement pour commencer. Les questions de dénombrement sont très rares (voire inexistantes) sur les épreuves écrites Ecricome, EDHEC et emlyon ; en revanche, on en trouve parfois sur les épreuves HEC et ESSEC ainsi qu'aux oraux d'HEC.

Exercice 29 – ●○○ – Dénombrements avec coefficients binomiaux

Soit E l'ensemble à 10 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

1. Combien E possède-t-il de parties ?
2. Combien E possède-t-il de parties à 5 éléments ?
3. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   - 3.a. a et b ;
   - 3.b. a mais pas b ;
   - 3.c. b mais pas a ;
   - 3.d. ni a, ni b.

Exercice 30 – ●○○ – Podium !

Une compétition sportive oppose 10 concurrentes, dont Marie-Gertrude.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums dans lesquels Marie-Gertrude est première ?
3. Combien y a-t-il de podiums dont Marie-Gertrude fait partie ?

Exercice 31 – ●○○ – Code de carte bancaire

Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes contenant exactement un 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes composés de quatre chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes composés d'au moins trois chiffres distincts ?

Exercice 32 – ●●○ – Calcul sur les coefficients binomiaux

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer la relation de Pascal en utilisant l'expression de $\binom{n}{k}$ avec les factorielles.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
3. 3.a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$. Démontrer : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

   3.c. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0;n]\!]$. Démontrer : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 33 – ●●○ – Coefficients binomiaux et Python

Dans cet exercice, nous verrons différents programme permettant de calculer les coefficients binomiaux sur **Python**. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. 1.a. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `facto(n)` renvoie la valeur de $n!$.

   1.b. En déduire une fonction **Python** telle que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, l'exécution de `coeff_binomial(n,k)` renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$.
2. En utilisant la relation de Pascal, compléter la fonction **Python** ci-dessous telle que l'exécution de `triangle_Pascal(n))` renvoie les lignes 0 à n du triangle de Pascal.

```
import numpy as np
def triangle_Pascal(n):
    T=np.zeros([n+1,n+1])
    T[0,0]=...
    for i in range(1,n+1):
        T[i,0],T[i,i]=...,...
        for j in ...
            ...
    return T
```

3. 3.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \binom{n}{k} = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}$.

   3.b. En déduire une fonction **Python** telle que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, l'exécution de `coeff_binomial_2(n,k)` renvoie la valeur de $\binom{n}{k}$.

Exercice 34 – ●●● – Identité de Vandermonde

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un dénombrement sur l'expression développée de $(1+x)^{m+n}$, démontrer que pour tout $k \in [\![0;m+n]\!]$:
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$$

6

Généralités sur les suites et suites usuelles

Premier chapitre sur les suites qui met en place les notions de base (variations, majoration, minoration) et qui donne un inventaire de formules et méthodes sur les suites usuelles : suites arithmétiques (SA), suites géométriques (SG), suites arithmético-géométriques (SAG), suites récurrentes linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants (SRL2).
Par conséquent, les exercices de ce chapitre sont davantage ciblés sur l'aspect technique.

Exercice 35 – ●○○ Retour sur le chapitre 1

Rappeler l'écriture quantifiée de chaque phrase puis en écrire la négation.
On désignera par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang (on dit qu'elle est **stationnaire**).
7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 36 – ●○○ - Variations de suites

Dans chaque cas, déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on donne le terme général.

1. $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 37 – ●○○ - Avec une suite auxiliaire

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{array}\right.$$

On considère également la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 38 – ●●○ - Avec une suite auxiliaire (bis)

Considérons les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln(u_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 4$.
2. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n.
3. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie sur $\mathbb{N}^*$.
5. Déterminer le terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celui de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 39 – ●●○ - Avec une suite auxiliaire (ter)

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{array}\right.$

1. Écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de `suite_u(n)` renvoie la valeur de u_n.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$. Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique puis en déduire son terme général.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Sans utiliser ni le programme de la question 1., ni le résultat de la question précédente, écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `somme_(n)` renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 40 – ●○○ - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
3. 3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$.
   3.b. Conclure quant aux variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 41 – ●●○ Suite récurrente d'ordre 1 (fonction décroissante)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$$

2. Qu'en déduire sur les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 42 – ●●○ – Trouver le terme général

Dans chaque cas, écrire un code **Python** permettant de calculer et d'afficher les premiers termes de la suite donnée puis conjecturer son terme général. Démontrer ensuite la conjecture trouvée.

1. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = n \times u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases}$

Exercice 43 – ●●○ – Suites imbriquées

Considérons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer les termes généraux de ces deux suites.

1. Écrire une fonction **Python** prenant un entier naturel n en argument d'entrée et renvoyant les valeurs de a_n et b_n en sortie.
2. **Méthode 1 :**
   On considère les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = a_n + b_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ d_n = a_n - b_n$$

   2.a. Démontrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   2.b. Démontrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   2.c. En déduire le terme général des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. **Méthode 2 :**
   Cette question est à traiter sans utiliser les résultats de la méthode 1.
   3.a. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   3.b. En déduire le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celui de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7

Limites de suites

Ce chapitre vient compléter le précédent par l'étude de la convergence ou divergence des suites.
Je propose ici des exercices très classiques et importants dont le second, un joli "Vrai ou faux ?", contient des questions de difficultés variées. Les exercices 52, 53 et 54 sont un peu plus difficiles mais très classiques : il semble indispensable de les travailler.

Exercice 44 – ●●○ - Calculs de limites

Déterminer la limite de chaque suite dont on donne le terme général :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2+3}{e^{-n}+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^2-n+3}{n+7}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n}+3}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^n}{2^n}$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5^n-e^n}{2^n+3^n}$
6. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n^2+2n+1)-\ln(n^2)$
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3-\ln(n)}{5n^3+2}$
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{n^2+2n+1}$
9. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{3n^2+5n+1}-\sqrt{3n^2+2n+1}$
10. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$

Exercice 45 – ●●○ - Vrai ou faux ?

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors elle est minorée.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par ℓ.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \dfrac{1}{n^2+1}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et positive, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite $\left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 si, et seulement si, la suite $\left(|u_n|\right)$ converge vers 2.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle converge.
8. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors elle est bornée.
9. Si la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également.
10. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
11. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
12. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 46 – ●●○ - Suites définies par une somme

1. Considérons la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$ définie par :

$$\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$$

   1.a. Calculer S_2 et S_3.
   1.b. Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.
   1.c. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $k \in [\![2;+\infty[\![$:

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

   1.d. En déduire, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, une expression simplifiée de S_n puis la limite de la suite $(S_n)_{n\in[\![2;+\infty[\![}$.

2. Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

   2.a. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.
   2.b. Conclure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 47 – ●●○ - Qui va le plus vite ?

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n!}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
2. Démontrer que la suite est décroissante à partir du rang 2.
3. Montrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{3} u_n$.
4. En déduire que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$: $u_n \leqslant \left(\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right)^{n-2} u_2$.
5. Qui tend plus vite vers $+\infty$ entre $n!$ et e^n ?

Exercice 48 - ●●○ - Un grand classique sur les suites adjacentes

Considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 49 - ●○○ - Suite récurrente d'ordre 1

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(x^2+1) + 1$, définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de u_n.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Justifier que f admet deux points fixes opposés et les déterminer. *On notera α le point fixe positif.*
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée par 0 et α.
5. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
6. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(1 - \ln(u_k^2+1)\big)$. Établir la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Exercice 50 - ●●○ - Suite récurrente d'ordre 1 (bis)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^{-x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que son exécution affiche le graphique qui suit sur lequel apparaissent :
   - la courbe de f sur l'intervalle $[0;2]$,
   - la droite d'équation $y = x$,
   - la représentation graphique des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vocabulaire
La droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé du plan s'appelle la **première bissectrice**.

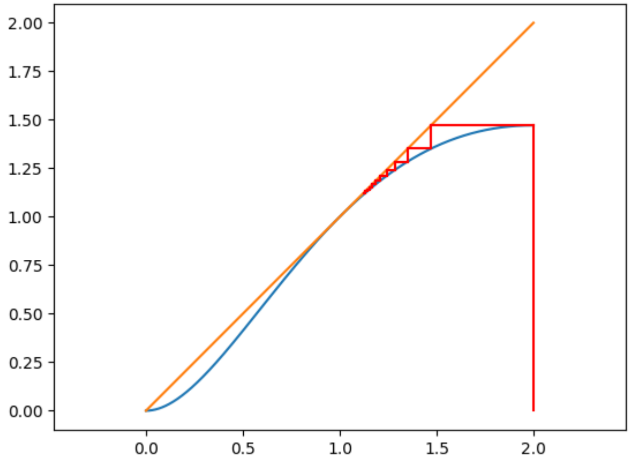
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return ...

X=np.linspace(...,...,1000)
Y=...
plt.plot(X,Y)
plt.plot(...,...) #premiere bissectrice
plt.axis('equal')

u=2
plt.plot([u,u],[0,f(u)],'r')
```

```
plt.plot([u,f(u)],[f(u),f(u)],'r')
for k in range(1,11):
    u=...
    plt.plot(...,...,'r')
    plt.plot(...,...,'r')
plt.show()
```



2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que pour tout $x \in]1;2]$, $f(x) < x$.
4. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ appartenant à $[1;2]$.
6. Déterminer la valeur de ℓ.
7. Écrire une fonction **Python** qui renvoie le plus petit n à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 51 – ●●○ – Suite récurrente d'ordre 1 divergente

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} - u_n^2 \end{cases}$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x} - x^2$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \leqslant -1$.
3. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $x^3 + x^2 - 2$.
4. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.

Exercice 52 – ●●● – Suite récurrente d'ordre 1 divergente (bis)

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis démontrer qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 53 – ●●● – Nombre d'or et suite récurrente

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Le **nombre d'or** est l'unique rapport $\dfrac{a}{b}$ tel que $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$.

1. Déterminer la valeur du nombre d'or, noté φ.
2. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

   2.a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $1 \leqslant u_n \leqslant \varphi$.

   2.b. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis démontrer qu'elle converge vers φ.

   2.c. Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$
   puis en déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

   2.d. Retrouver alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis déterminer un rang à partir duquel u_n est proche de φ à 10^{-10} près.

   2.e. L'exécution du programme suivant affiche 21. Interpréter ce résultat.

```python
import numpy as np

phi=(1+np.sqrt(5))/2
n=1
u=1
while abs(u-phi)>10**(-10):
    n=n+1
    u=np.sqrt(1+u)
print(n)
```

Exercice 54 – ●●● – Suite récurrente d'ordre 1 (fonction décroissante)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et 1.
2. Démontrer que la fonction f possède un unique point fixe, noté α, et le déterminer.
3. Représenter l'allure de la courbe de f sur l'intervalle $[0;1]$ ainsi que les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$.
5. Justifier que la fonction $f \circ f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
6. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Déduire des questions précédentes que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.
7. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8

Séries numériques

Les exercices qui suivent sont essentiellement centrés sur la technique de calcul et les méthodes usuelles pour établir la convergence/divergence d'une série.
Le programme officiel mentionne que "*l'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs*". Je ne propose donc aucun exercice utilisant ces critères.

Exercice 55 - ●○○ - Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente. On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité R_n est bien définie et donner une relation entre S_n, S et R_n.
2. Que dire du comportement de R_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 56 - ●○○

1. **1.a.** Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

   1.b. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

2. **2.a.** Déterminer les réels a et b tels que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$:

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

   2.b. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$.

Exercice 57 - ●○○ - Convergence & somme

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n+1}}{5^n}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^{n-1}}{n!}$
4. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2^{n+1}}{n!}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(-2)^n}$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n(n-1)2^n}{5^{n-1}}$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{4^n}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n}}$
9. $\sum_{n\geqslant 0} q^{2n}$, où $q \in]-1;1[$
10. $\sum_{n\geqslant m} q^{n}$, où $q \in]-1;1[$ et $m \in \mathbb{N}$

Exercice 58 - ●●○ - Convergence & somme (bis)

Justifier la convergence et donner les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n2^n}{n!}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{2n}}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^2+1}{5^n}$
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n!}$
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(n+1)!}$
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2 2^n}{n!}$

9. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

10. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}$

11. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{(n+1)!}$

Exercice 59 – ●●○

On admet que les séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont convergentes. On admet également que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 60 – ●○○ - Suite récurrente et série

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{array}\right.$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un réel strictement positif a et un entier naturel n puis renvoyant la liste composée des valeurs $u_0, u_1, \dots, u_n$ dans le cas où $u_0 = a$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
5. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n.
6. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Exercice 61 – ●●○ - Suite récurrente et série (bis)

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right) \end{array}\right.$.

1. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. 2.a. Démontrer : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
   2.b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
   2.c. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. 4.a. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déduire de la question 2.c. : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \leqslant u_0 + \frac{\ln(2)}{1-\ln(2)}$.
   4.b. Conclure finalement que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

Remarque
Si le critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs a été vu, ne pas tenir compte de la question 4.a. et faire directement la question 4.b..

Exercice 62 – ●●● - TSSA (critère de Leibniz)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante et qui converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k u_k$.

Le but de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$.

Remarque
Pour un cas particulier de cet exercice, on peut revenir à l'exercice 48 qui démontre la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
2. Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ est convergente. *On note S sa somme.*
4. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$
   En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n - S| \leqslant u_{n+1}$$
5. **Application.**
   Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente puis écrire une fonction **Python** qui prend en argument d'entrée un réel strictement positif p et renvoie une valeur approchée de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ à $\pm p$ près.

9

Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles

Dans ce premier chapitre sur les fonctions, on manipule les notions de base (ensemble de définition, parité, majoration/minoration, étude des variations à l'aide de la dérivée) et on travaille évidemment sur les fonctions usuelles (les fonctions polynomiales font l'objet du chapitre suivant). Je propose donc des exercices axés sur les techniques à parfaitement maîtriser.

Exercice 63 – ●○○ - Retour sur le chapitre 1

Rappeler l'écriture quantifiée de chaque phrase puis en écrire la négation.
On désignera par f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est positive sur I.
2. La fonction f est majorée sur I.
3. La fonction f est croissante sur I.

Exercice 64 – ●○○ - Ensemble de définition

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

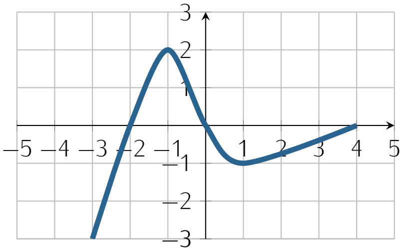
1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 1}$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
3. $f : x \longmapsto \ln(6 + 5x - x^2)$
4. $f : x \longmapsto \ln(x + 3) - \ln(x + 1)$
5. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)$
6. $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x + x^2)$
7. $f : x \longmapsto \ln(\mathrm{e}^x - 2)$
8. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x) - 1}$

Exercice 65 – ●○○ - Positions relatives

Étudier les positions relatives des courbes des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 66 – ●○○ – Transformations d'une courbe

Considérons f la fonction, définie sur $[-3; 4]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous et représenter sa courbe.

1. $g : x \longmapsto -f(x)$
2. $h : x \longmapsto f(-x)$
3. $i : x \longmapsto |f(x)|$
4. $j : x \longmapsto f(x+2)$
5. $k : x \longmapsto f(x-1)$

Exercice 67 – ●○○ – Parité/imparité

1. Dans chaque cas, étudier la parité de la fonction f.
   - 1.a. $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - 1.b. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^4+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   - 1.c. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   - 1.d. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   - 1.e. $f : x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Que dire de la somme de deux fonctions paires ? Deux fonctions impaires ? D'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
   Mêmes questions avec le produit de deux fonctions.

Exercice 68 – ●○○ – Vrai ou faux sur la parité

Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Si $f(1) = f(-1)$, alors f est paire.
2. Si f est impaire, alors $f(2) \neq f(-2)$.
3. Si f est paire, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(-x)$.
4. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(-x) = -f(x)$, alors f ne peut pas être paire.

Exercice 69 – ●●● – Décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

Démontrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 70 – ●●○ - Variations et équivalence...

1. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir :
$$\forall a, b \in I,\ \big(f(a) = f(b) \iff a = b\big)$$
2. Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Établir :
$$\forall a, b \in I,\ \big(f(a) \leqslant f(b) \iff a \leqslant b\big)$$
3. L'équivalence précédente est-elle encore vraie si la croissance de f n'est pas stricte ?

Exercice 71 – ●○○ - Propriétés sur exp et ln

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln(2)$ les nombres suivants : $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(6) - \ln(3)$; $\ln(2e^2)$.
2. Simplifier les expressions suivantes :
   - 2.a. $\dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$, où $x \in \mathbb{R}$.
   - 2.b. $-\ln(2x) - \ln(x) - \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   - 2.c. $\sqrt{e^{2x}}e^{-x}$, où $x \in \mathbb{R}$.
   - 2.d. $\dfrac{e^{x^2-2x} \times (e^x)^2}{(e^{2x})^3}$, où $x \in \mathbb{R}$.
   - 2.e. $\ln(e^4) - \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e})$
   - 2.f. $\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Exercice 72 – ●●○ - Résolution d'équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$, où $x \in \mathbb{R}$.
2. $\big(1 + \ln(x)\big)^2 = 4$, où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
3. $|\ln(x)| = 1$, où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
4. $|e^x| = 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
5. $|x + 3| = -1$, où $x \in \mathbb{R}$.
6. $|x + 5| = |2x - 7|$, où $x \in \mathbb{R}$.
7. $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$, où $x \in \mathbb{R}$.
8. $\lfloor x^2 \rfloor = 9$, où $x \in \mathbb{R}$.
9. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
10. $\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 2 = 0$, où $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
11. $e^{2x} = 2e^x - 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
12. $e^x - 2e^{-x} = 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
13. $|x + 5| < 3$, où $x \in \mathbb{R}$.
14. $|x - 2| \leqslant 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
15. $|2x - 1| \geqslant 4$, où $x \in \mathbb{R}$.
16. $|9 - x^2| \geqslant -2$, où $x \in \mathbb{R}$.
17. $5 - x^2 < 0$, où $x \in \mathbb{R}$.
18. $\ln(1 + x^2) \leqslant \ln(2)$, où $x \in \mathbb{R}$.
19. $e^{2x-1} \geqslant 1$, où $x \in \mathbb{R}$.
20. $\dfrac{1}{e^x + 1} < 2$, où $x \in \mathbb{R}$.
21. $0,5^x < 0,1$, où $x \in \mathbb{R}$.
22. $2^x \leqslant 3$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 73 – ●○○ – Calculs de dérivées

Justifier que chaque fonction f est dérivable sur l'intervalle donné et déterminer sa dérivée.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{5}{x^7}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{e^x}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f : x \longmapsto \ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
7. $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f : x \longmapsto \sqrt{x}e^x + 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
9. $f : x \longmapsto \big(\ln(1+x)\big)^4$ sur $\mathbb{R}^{+}$
10. $f : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 74 – ●○○ – Étude de deux fonctions

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la dérivée de f.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

   2.a. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

   2.b. Calculer $g(2)$ puis en déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. *Les limites de f ne sont pas demandées.*
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, notée $\mathcal{T}_0$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
5. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan judicieusement choisi.

Exercice 75 – ●●○ – Étude de fonctions

Pour chaque fonction ci-dessous :

- déterminer son ensemble de définition,
- étudier sa parité,
- déterminer sa dérivée,
- dresser son tableau de variations,
- représenter l'allure de sa courbe.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
2. $f : x \longmapsto 3x + \dfrac{1}{x^3}$
3. $f : x \longmapsto x\ln(x) - x$
4. $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$
6. $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
7. $f : x \longmapsto x^x$

Exercice 76 – ●●○ - Établir des inégalités

1. Encadrer $e^{(1-x)^2}$ pour $x \in [2;4]$
2. Démontrer : $\forall x \in [0;1],\ 0 < e^{-x} + x \leqslant 2$.
3. Démontrer : $\forall x \in [2;+\infty[,\ \dfrac{1}{x(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x(x-1)}$.
4. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{\dfrac{3x}{x+2}} \geqslant \sqrt{\dfrac{3x}{x+5}}$.
5. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x+1} \leqslant e^{(x+1)^2}$.

Exercice 77 – ●●○ - Des inégalités classiques

1. **1.a.** En étudiant la fonction $x \longmapsto e^x - x$, démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$$

   1.b. En déduire que pour tout réel positif x :

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

2. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

Exercice 78 – ●●● - Logarithme et moyenne...

Démontrer que pour tous $x, y > 0$:

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$

Exercice 79 – ●●● - Maximum sur les entiers

Justifier l'existence et calculer la valeur de $\max\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sqrt[n]{n}\right)$.

10

Fonctions polynomiales

Même si ce chapitre contient peu d'exercices, j'ai fait le choix de le séparer du précédent pour que ce soit plus simple de les identifier puisque c'est un chapitre souvent traité à part par les enseignantes et enseignants. Des exercices assez classiques sur ce thème, même s'ils ne sont pas toujours dans l'esprit du programme. Les plus importants sont les exercices 80, 81 et 82. Les autres peuvent être travaillés dans un second temps...

Exercice 80 – ●○○ – Recherche de racines & factorisation

Dans chaque cas, déterminer la forme factorisée de P en produits de fonctions polynomiales de plus petits degrés possibles.

1. $P : x \longmapsto x^3 - 8$
2. $P : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$
3. $P : x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 2x + 1$
4. $P : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
5. $P : x \longmapsto x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$
6. $P : x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 1$

Exercice 81 – ●●○ – Racine double

Soient P une fonction polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer :

$$\left.\begin{array}{l} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \end{array}\right\} \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - \alpha)^2 Q(x)$$

Exercice 82 – ●●○ – Division euclidienne

On admet que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n et une fonction polynomiale Q_n tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^n = (x^2 + x - 2)Q_n(x) + a_n x + b_n \quad (\star)$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 83 – ●●○ – Fonction polynomiale nulle ?

Soit P une fonction polynomiale telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x + 1) = P(x)$.
Démontrer que si P admet une racine, alors P est nulle.

Exercice 84 – ●●○ – Suite de fonctions polynomiales

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) + 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales P_1, P_2 et P_3.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P_n.

Exercice 85 – ●●● – Fonctions polynomiales de degré 2 paires

1. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines réelles opposées est paire.
2. **2.a.** Soif f une fonction polynomiale de degré 2 qui est paire et qui possède deux racines réelles distinctes notées x_1 et x_2. Démontrer que $x_1 = -x_2$.

   2.b. Déterminer toutes les fonctions polynomiales de degré 2 qui sont paires et qui ne possèdent qu'une unique racine réelle.

Exercice 86 – ●●● – Équations sur des fonctions polynomiales

Dans chaque cas, déterminer les fonctions $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant la condition donnée.

1. $P'^2 = P$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$
3. $P \circ P = P$.

11

Limites de fonctions

Nous poursuivons ici l'étude des fonctions par l'étude de leurs limites. Relativement peu d'exercices, tous axés sur les techniques. Il semble impératif de parfaitement les maîtriser pour envisager sereinement les questions relatives à l'étude des fonctions lors des concours.

Exercice 87 - ●○○ - Calculs de limites

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x}{x-3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{x}{x-3}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x-3}{1-x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{1-x}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^{-x}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{x^3}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \left(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\right)$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x^2}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x)-\ln(x+2)\right)$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+1}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}$

Exercice 88 – ●●○ - Calculs de limites (bis)

Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - e^x + \ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+5x+1} - \sqrt{x^2+2x+1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+5x+1} - \sqrt{3x^2+2x+1}$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(3x^2+1) - \ln(x+2)\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(3x^2+1) - \ln(e^x+2)\right)$
11. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2e^{\frac{1}{x}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2e^{\frac{1}{x}}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 89 – ●●○ - Vrai ou faux ?

1. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par 1, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
2. Si $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} g(x)$, alors $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1 \iff \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 1$ (où a désigne soit un réel, soit $\pm\infty$, et f une fonction définie sur un voisinage de a, noté I)
5. Si la suite $\left(f(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la fonction f possède une limite en $+\infty$.
6. Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$.
7. Si f est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
8. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors f est majorée par ℓ.
9. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et non majorée, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 90 – ●●○ - Une limite classique

1. Démontrer que : $\forall x \in]-1;+\infty[,\ \dfrac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
3. En déduire les limites suivantes :
   - 3.a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$
   - 3.b. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$
   - 3.c. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$
   - 3.d. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
   - 3.e. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{\ln(x)}$

Exercice 91 – ●●○ - Étude de fonctions

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   - 1.a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f.
   - 1.b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   - 1.c. Représenter l'allure de la courbe de f.
2. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \ln(e^x + e^{-x})$.
   - 2.a. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - 2.b. Démontrer que la fonction f est paire.
   - 2.c. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   - 2.d. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   - 2.e. Représenter l'allure de la courbe de f.
3. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - 3.a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f.
   - 3.b. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - 3.c. Représenter l'allure de la courbe de f.

12

Continuité des fonctions

Deux aspects sont abordés dans ce chapitre sur la continuité :

- l'aspect local : étude de continuité et prolongement par continuité en un point ;
- aspect global avec essentiellement le théorème des bornes, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de bijection.

Exercice 92 – ●○○ - Études de continuité locale

Dans chaque cas, étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
2. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
4. $f : x \longmapsto \max(0, x)$

Exercice 93 – ●○○ - Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
2. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-5x-6}{x+1}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
3. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $[-1; +\infty[$?
4. Donner l'ensemble de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?
   Rappel (ou donnée si résultat non connu) : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exercice 94 – ●●○ – Théorème de bijection

Dans chaque cas :

- dresser le tableau de variations complet de f sur I,
- démontrer que f est bijective de I dans un intervalle à préciser,
- donner le tableau de variations complet de f^{-1}.

1. $f : x \longmapsto (x+2)e^{-x}$ sur $[-1; +\infty[$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $]0; 1[$.

Exercice 95 – ●○○ – Étude de fonctions

On considère la fonction $f : x \longmapsto e^x - \ln(x)$, définie sur $]0; +\infty[$ ainsi que la fonction $g : x \longmapsto xe^x - 1$, définie sur $[0; +\infty[$.

1. 1.a. Dresser le tableau de variations complet de g sur $[0; +\infty[$.
   1.b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[0; +\infty[$. Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$.
   1.c. Écrire une fonction **Python** `approx_alpha` renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.
   1.d. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de sa courbe représentative.
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Établir : $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

Exercice 96 – ●●○ – Étude de fonction avec asymptote oblique

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + e^x}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Définition. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes de $\mathscr{C}_f$.
2. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto x + 2 + e^x$ s'annule en un unique réel, noté α. Vérifier que $\alpha \in]-3; -2[$.
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. 4.a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. *On notera a le réel obtenu.*
   4.b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - ax$. *On notera b le réel obtenu.*
   4.c. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ puis représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 97 – ●○○ – Suite implicite

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Dresser le tableau de variations complet de f.
3. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$.
4. Démontrer que f est une bijection de $]-\infty; 1[$ dans un intervalle à préciser puis donner le tableau de variations de la fonction f^{-1}, bijection réciproque de la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$.
5. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = -n$ possède une unique solution dans $]-\infty; 1[$. *On notera u_n cette solution.*
6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n et f^{-1}.
7. En déduire les variations et la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 98 - ●●○ - Suite implicite (bis)

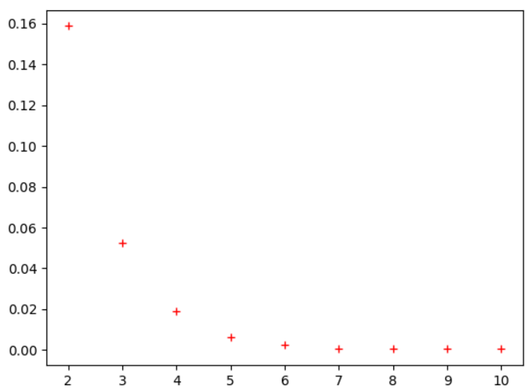
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = x e^{n-x} - 1$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les limites de f_n en $\pm\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n.
3. Démontrer que pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède deux solutions dans $\mathbb{R}$, notées u_n et v_n, telles que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $v_n \geqslant n$.
4. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.
5. Étude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.
   - 5.a. Écrire une fonction **Python**, nommée **approx_u**, prenant en argument d'entrée un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et renvoyant une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.
   - 5.b. L'exécution du programme suivant affiche le graphique ci-dessous.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

for n in range(2,11):
    u=approx_u(n)
    plt.plot(n,u,'r+')
plt.show()
```



Que peut-on conjecturer ?

   - 5.c. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Comparer, pour tout $x \in [0; 1]$, $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.
   - 5.d. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.
   - 5.e. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un réel $\ell \in [0; 1]$.
   - 5.f. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 99 - ●●● - Suite récurrente d'ordre 1 avec fonction décroissante

Considérons la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, noté α, vérifiant $\alpha \in]0; 1[$.

2. Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ sur $[0;1]$ ainsi que les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
4. Posons $g = f \circ f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   - 4.a. Démontrer que α est un point fixe de g, puis que c'est le seul.
   - 4.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de g et v_n puis w_{n+1} en fonction de g et w_n.
   - 4.c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant \alpha \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n$.
   - 4.d. En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.
5. Que peut-on en conclure sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 100 - ●●● - Des histoires de point fixe...

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Démontrer que f possède au moins un point fixe.
2. Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ telle que $f \circ f = f$. Préciser l'ensemble des points fixes de f.
4. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$, alors f possède au moins un point fixe.

13

Dérivabilité et convexité des fonctions

Un choix assez varié d'exercices ici, même si les exercices 108 et 109 s'éloignent un peu plus des classiques (ils feraient, en revanche, de bons exercices sans préparation pour l'oral d'HEC). Ce chapitre complète l'étude des fonctions vue jusqu'à présent (les développements limités seront ajoutés en 2A) ; c'est donc l'occasion d'aller travailler quelques annales, en particulier les exercices traitant de suites récurrentes d'ordre 1 utilisant l'inégalité des accroissements finis (IAF).

Exercice 101 – ●○○ – Dérivabilité en un point

Pour chaque fonction donnée, étudier sa dérivabilité en a.

1. $f : x \longmapsto e^{-x}\sqrt{x}$, $a = 0$
2. $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a = 0$
3. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $a = 1$
4. $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ xe^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $a = 0$

Exercice 102 – ●○○ – Continue ? Dérivable ?

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que la commande `np.linspace(-1,1,101)` renvoie un tableau contenant la valeur 0.
2. Écrire un programme **Python** permettant d'obtenir la courbe représentative de f sur $[-1; 1]$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 103 – ●●○ – Prolongement $\mathscr{C}^1$

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2\ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Démontrer que la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$.
2. Démontrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0.
3. Démontrer que f' est continue sur $\mathbb{R}^+$.
4. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Remarque

Pour celles et ceux qui veulent un peu plus de difficulté, regroupez les trois premières questions en "Démontrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 104 – ●●○ – Dérivée n-ième

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n, b_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\mathrm{e}^{2x}$$

   On précisera les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
3. Déterminer le terme général de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \dfrac{b_n}{2^n}$. Établir une relation de récurrence sur $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis déterminer son terme général.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $f^{(n)}(x)$.

Exercice 105 – ●●○ – IAF & suite récurrente

On considère la fonction $f : x \longmapsto 2 - \dfrac{1}{2}\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution, notée α, sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Justifier que $\alpha \in [1; \mathrm{e}]$.
3. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que l'exécution de **approx1_alpha** renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

```python
import numpy as np

def g(x):
    return 2-1/2*np.log(x)-x

def approx1_alpha():
    a=1
    b=np.exp(1)
    while ...
        m=(a+b)/2
        if g(m)>0:
            ...
        elif g(m)<0:
            ...
        else:
            ...
    return (a+b)/2
```

4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 1 et e.
5. Démontrer :

$$\forall x \in [1; \mathrm{e}],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

   puis :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

6. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}$$
puis conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

7. En utilisant les résultats de la question précédente, écrire une fonction **Python** renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 106 – ●●○ – C'est faux !

Les affirmations suivantes sont fausses. Proposer des contre-exemples pour les infirmer.

1. Si f est convexe sur $[a;b]$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors f est positive sur l'intervalle $[a;b]$.
2. Si f' est convexe sur un intervalle I, alors f est convexe sur I.
3. Si $f''(a) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est traversée par sa tangente en $A\big(a; f(a)\big)$.

Exercice 107 – ●●○ – Inégalités de convexité

1. En utilisant la concavité de la fonction ln, justifier :
$$\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}$$
2. En déduire :
$$\forall (x,y) \in]1;+\infty[^2,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$$

Exercice 108 – ●●● – Composée de fonctions convexes

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Démontrer que si f est convexe sur I et que g est convexe et croissante sur J, alors $g \circ f$ est convexe sur I.

Exercice 109 – ●●● – Convexité d'une bijection réciproque

1. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, strictement croissante sur I et convexe. Démontrer que f est bijective, puis déterminer la convexité de sa bijection réciproque.
2. Que dire si f est maintenant strictement décroissante sur I ?

14

Intégrales sur un segment

Les premiers exercices sont ciblés sur les techniques de calculs d'intégrales (à l'aide d'une primitive, par intégration par parties, par changement de variable) et les suivants sur des classiques : suites d'intégrales, fonctions définies par des intégrales, série logarithmique, sommes de Riemann... On termine par les exercices 119 et 120 plus difficiles et qui sont de bons entraînements pour l'oral d'HEC par exemple.
Ce chapitre est également l'occasion d'aller faire quelques exercices d'annales en lien.

Exercice 110 – ●●○ – Calcul d'intégrales

Sans justifier l'existence, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 (3x^2 + x - 1)dx$
2. $\displaystyle\int_1^2 \left(e^{2x} + \frac{1}{x}\right) dx$
3. $\displaystyle\int_1^0 e^{-x} dx$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^4} dx$
6. $\displaystyle\int_1^e \ln(x) dx$
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2} dx$
8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$
9. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{k} dx$ avec $k \in \mathbb{R}^*$
10. $\displaystyle\int_0^1 x e^{\frac{x^2}{2}} dx$
11. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2} dx$

12. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^4\,dx$

17. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

18. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\big(\ln(x)\big)^3}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_0^1 3^x\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^1 e^{-e^{-x}-x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

23. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Exercice 111 – ●●○ - IPP

A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^e x^n\ln(x)\,dx$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 112 – ●●○ - Changement de variable

A l'aide du changement de variable indiqué, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$, en posant $t = 1+\sqrt{x}$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^{-x}}\,dx$, en posant $t = 1+e^x$

Exercice 113 – ●●○ - Suite d'intégrales

Considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer I_0 et I_1.

3. Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
4. Conclure que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 114 – ●●○ – Suite d'intégrales et somme d'une série

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t dt$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer I_0.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{n!}$$
4. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Démontrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$
6. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ et donner sa somme.
7. En utilisant l'égalité de la question précédente, écrire une fonction `Python` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de I_n.

Exercice 115 – ●●○ – Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
6. Justifier que g admet une limite en $+\infty$.
7. Démontrer : $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice 116 – ●●○ – Fonction définie par une intégrale (bis)

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et démontrer qu'elle est paire.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. Établir que f possède une limite en 0 et $+\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 117 – ●●○ – Série logarithmique

1. Établir : $\forall x \in [0;1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.

2. Soit $x \in [0;1[$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Exercice 118 – ●●● – Sommes de Riemann à gauche

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

- pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$
- $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$

1. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|S_n - \displaystyle\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|f(a_k) - f(t)\right| dt$.
2. Démontrer : $\forall t \in [a_k, a_{k+1}],\ \left|f(a_k) - f(t)\right| \leqslant M|a_k - t|$.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left|f(a_k) - f(t)\right| dt \leqslant \frac{M(b-a)^2}{n}$.
4. Conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)dt$.
5. **Applications.**

   5.a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

   5.b. Proposer un programme **`Python`** permettant d'obtenir une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 10^{-2} près.

Exercice 119 – ●●● – Point fixe !

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.
Démontrer que f possède au moins un point fixe sur $[0;1]$.

Exercice 120 – ●●●

Déterminer les fonctions $f : [0;1] \to [0;1]$ continues telles que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)^2 dx$$

15

Équations différentielles

Chapitre dont le cours se résume essentiellement aux méthodes de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants. Comme bien souvent donc, des exercices de technique puis quelques autres qui pourraient faire l'objet d'exercices ou de parties d'exercices aux concours. Ce chapitre sera très utile au moment d'étudier, en deuxième année, les systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants (aucun exercice sur ce thème n'est proposé ici).

Exercice 121 – ●○○ – **Résolution d'EDL1**

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = \mathrm{e}^x + x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' + y = \dfrac{1 + x\ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$
7. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.
8. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
9. $y' - 4y = \mathrm{e}^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax + b)e^{4x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
10. $y' + y = 2x\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
    Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 122 – ●○○ – **Résolution d'EDL2**

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.

4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière dans $\mathbb{R}_2[x]$.
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax+b)e^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\mathrm{e}^{x}$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto (ax^2+bx+c)e^{x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 123 – ●●○ – Problèmes de Cauchy

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Justifier qu'il existe une unique fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = -2\mathrm{e}^{-x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et la déterminer.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = x \\ y(0) = 0 \ ;\ \ y'(0) = 1 \end{cases}$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 124 – ●●○ – Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, où $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit λ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Posons $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-x}$. Établir :

$$\big(f \text{ est solution de } (E)\big) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 125 – ●●○ – EDL1 à coefficients non constants (cas général)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, et on note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E).

1. Justifier que a possède des primitives sur I. *On notera A l'une d'elles.*
2. Soit A une primitive de a sur I.
Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_H) est $\left\{x \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Établir que f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f_p(x) + \lambda\mathrm{e}^{-A(x)}$.
4. Soient λ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f : x \longmapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E).
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).
6. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique fonction y de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

7. **Applications.**
   7.a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = -(2x-1)\mathrm{e}^x$, où y est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   7.b. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{x}y = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$, où y est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 126 – ●●○ – Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (\star)$$

1. Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.
   - **1.a.** Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
     Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $f(0) \neq 0$.
   - **1.b.** Déterminer $f(0)$.
   - **1.c.** Établir : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.
   - **1.d.** En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   - **1.e.** En déduire qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.
2. Conclure.

Exercice 127 – ●●● – Changement d'inconnue

Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On pourra considérer la fonction $z : t \longmapsto y(e^t)$.

16

Systèmes linéaires

Beaucoup de systèmes linéaires ont déjà été résolus ou seront résolus dans ce livre. Je propose très peu d'exercices, ciblés sur la technique ! Le dernier est un système à paramètre : à travailler dans un second temps même s'il n'est pas particulièrement difficile.

Exercice 128 – ●○○ – **Résolution de systèmes linéaires**

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 1 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - y \phantom{{}-z} = 0 \\ \phantom{2x-{}} y - z = 1 \\ 2x \phantom{{}-y} - z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y + z = 3x \\ x + y + z = 3y \\ x + y + z = 3z \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ -2x + 2y \phantom{{}+2z} = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 3z + t = 0 \\ x - 2y + 2z \phantom{{}+t} = 0 \\ 3x - 3y + 5z + t = 0 \end{cases}$

Exercice 129 – ●●○ – Système non linéaire !

Résoudre le système $\begin{cases} xyz = 1 \\ x^2yz^3 = e^2 \\ \dfrac{x}{yz} = 1 \end{cases}$, où $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$.

Exercice 130 – ●●● – Système à paramètre

Résoudre, selon les valeurs du réel a, le système : $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$, d'inconnu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

17

Matrices

Dans le programme de mathématiques appliquées, les matrices représentent essentiellement un outil pour l'étude des suites imbriquées ou suites récurrentes linéaires, des applications linéaires, ou encore des graphes (et des systèmes différentiels, en deuxième année). Les exercices proposés sont très classiques et variés, ce qui permet de couvrir une large partie des attendus du programme sur ce chapitre.

Exercice 131 – ●○○ – Écriture de matrices

1. Expliciter les matrices suivantes :

$$A = \big(i+j\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 2}} \quad ; \quad B = \big(i^j\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$$

2. Écrire de façon compacte les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 132 – ●○○ – Polynôme annulateur et inversibilité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Notons $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $A^2 + A$. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.

2. Notons $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I_3. En déduire que A est inversible puis calculer son inverse.

3. Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $A^3 - A^2 - A$. En déduire que A est inversible puis exprimer son inverse en fonction de A.

4. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$. En déduire que A n'est pas inversible.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$, $A \neq I_n$ et $A \neq 2I_n$.
   - **5.a.** Factoriser $x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ en produit de deux fonctions affines.
   - **5.b.** En raisonnant par l'absurde, démontrer que $A - I_n$ et $A - 2I_n$ ne sont pas inversibles.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A - 2I_n)^3 = 0_n$.
   - **6.a.** Justifier que $A - 2I_n$ n'est pas inversible.
   - **6.b.** Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 133 – ●○○ – Calculs d'inverse

Dans chaque cas, étudier l'inversibilité de la matrice M et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
10. $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 134 – ●●○ – Puissances par conjecture & récurrence

Dans chaque cas, conjecturer une formule pour A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture par récurrence. *On pourra faire les calculs avec* **`Python`**...

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 135 - ●●○ - Puissances par formule du binôme de Newton

Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel λ et la matrice N de sorte que $A = \lambda I_3 + N$ et que N soit triangulaire avec des coefficients diagonaux nuls.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^k pour tout $k \in [\![3; +\infty[\![$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 136 - ●●○ - Puissances par division euclidienne

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$.

1. Calculer $P(A)$.
2. Déterminer les racines de P.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe deux uniques fonctions polynomiales Q_n et R_n telles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\ x^n = Q_n(x) \times P(x) + R_n(x) \\ \deg(R_n) < \deg(P) \end{array} \right.$$

   3.a. Déterminer l'expression de $R_n(x)$ en fonction de x.
   3.b. En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 137 - ●●○ - Puissances à l'aide de suites

Considérons $A = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les deux réels x et y tels que $A^2 = xA + yI_3$.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \ / \ A^n = x_n A + y_n I_3$.
3. Donner x_0, y_0, x_1 et y_1 puis démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
4. En déduire les termes généraux des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Conclure sur l'expression de A^n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 138 - ●●○ - Suites imbriquées...

Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{array} \right.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Écrire une fonction **`Python`** qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et renvoie la matrice X_n en sortie.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. *Le but des questions ci-dessous est d'exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n en fonction de n.*

4.a. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et donner P^{-1}.

4.b. Calculer $P^{-1}AP$. *On notera D la matrice obtenue.*

4.c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 139 – ●●○ – Matrices nilpotentes...

Définition. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes. En déduire que la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas toujours nilpotente.
2. On suppose désormais que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent entre elles. Montrer alors que AB et $A+B$ sont nilpotentes.

Exercice 140 – ●●○ – Matrices symétriques et anti-symétriques

Définition. Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **anti-symétrique** lorsque ${}^tA = -A$.

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A est symétrique, B est antisymétrique et $M = A + B$.
   Démontrer que $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
2. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.

Exercice 141 – ●●● – Trace d'une matrice

Définition. Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **trace de A**, notée $\mathrm{tr}(A)$, le réel défini par : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Établir la linéarité de la trace :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B)$$
2. Démontrer :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
3. Démontrer :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \left(\mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = 0 \iff A = 0_n\right)$$

Exercice 142 – ●●● – Produit de matrices stochastiques

Définition. On dit qu'une matrice carrée est **stochastique** lorsque ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

1. Écrire une fonction **`Python`** prenant en entrée une matrice carrée et renvoyant **`True`** si elle est stochastique, et **`False`** sinon.
2. Écrire une fonction **`Python`** prenant en entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ générée de façon aléatoire.
3. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 143 – ●●● – **Algorithme du pivot de Gauss**

1. Soient G et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que G est inversible. Démontrer que M est inversible si, et seulement si, GM est inversible.
2. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les lignes sont numérotées $L_1, \ldots, L_n$.
   Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$.
   - **2.a.** Traduire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ par une multiplication matricielle par la gauche par une matrice notée $P_{i,j}$.
   - **2.b.** Traduire l'opération $L_i \longleftarrow aL_i$ (avec $a \neq 0$) par une multiplication matricielle par la gauche par une matrice notée $D_i(a)$.
   - **2.c.** Traduire l'opération $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ (avec $b \in \mathbb{R}$) par une multiplication matricielle par la gauche par une matrice notée $T_{i,j}(b)$.
3. Démontrer que pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $b \in \mathbb{R}$, les matrices $P_{i,j}$, $D_i(a)$ et $T_{i,j}(b)$ définies en question précédente sont inversibles.
4. En déduire que les opérations élémentaires effectuées sur les lignes d'une matrice conservent son inversibilité (ou non inversibilité).

18

Espaces vectoriels

Il faut savoir que la première chose que fait une enseignante ou un enseignant avant de concevoir un cours est de lire le bulletin officiel fournissant le programme de la classe en question. Mon avis sur les contenus des chapitres d'algèbre linéaire (espaces vectoriels et applications linéaires) en première année sera certainement partagé par d'autres collègues et est sans appel : le programme est, au mieux flou, au pire dénué de sens. Je vous prie donc de m'excuser pour le contenu à la fois de mon cours sur mon site internet, mais également des exercices en lien avec ces deux chapitres : il sort librement des attentes de première année ; en restant toutefois dans le programme de deuxième année. On prend donc légèrement de l'avance ; et je doute que ce soit plus compliqué ainsi...
Je fais une exception pour ce chapitre : l'adaptation d'un exercice d'annales de concours en exercice 153.

Exercice 144 – ●○○ – Pas des sous-espaces vectoriels !

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\right\}$
2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ y = x^2\right\}$
3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = 0_n\right\}$

Exercice 145 – ●●○ – Sous-espaces vectoriels

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMA = 0_n\right\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $F_\lambda = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\right\}$. Démontrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Notons E l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers 0.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 146 – ●○○ – Manipulation sur des combinaisons linéaires

On considère les matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2.
2. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2.
3. En déduire que $\mathrm{Vect}(X_1, X_2) = \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$?

Exercice 147 – ●●○

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \ , \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y \right\}$
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{n,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0 \right\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ , \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 148 – ●○○

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base ainsi que la dimension.
2. Exprimer A^2 en fonction de I, A et J puis établir que $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
3. En déduire que la famille (I, A, A^2) est une base de F.
4. Déterminer la matrice des coordonnées de J dans la base (I, A, A^2).

Exercice 149 – ●●○

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ JMJ = M\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 150 – ●●○ – EV de fonctions polynomiales

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - xP'(x) = 0\}$. Justifier que E est un espace vectoriel, en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice 151 – ●●○ – EV de fonctions polynomiales (bis)

On note $u : x \longmapsto x^2$.

1. Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, x \longmapsto x(x-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.
3. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto (x+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.

Exercice 152 – ●●○

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous.

1. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 153 – ●●○ – Type concours

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :

$$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = M\} \quad ; \quad \mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ A^2M = AM\}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. **2.a.** Établir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$.
   2.b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$.

3. **3.a.** Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$.

   3.b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$.

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $C^2 - C$.
5. Notons $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = X\}$. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base de chaque.
6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
7. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
8. Déterminer la matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = PDP^{-1}$.
9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Établir :
$$M \in \mathscr{E}_1(C) \iff N \in \mathscr{E}_1(D)$$
10. Montrer que $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$.
12. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$.

Exercice 154 – ●●● – Famille de fonctions ou de suites

1. Posons $f_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ et $f_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   1.a. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).

   1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?

2. Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réels.

   2.a. Démontrer que la famille (u, v) est une famille libre de E.

   2.b. Notons $F = \left\{ w \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0 \right\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 155 – ●●● – Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$A^k = 0 \ ; \ A^{k-1} \neq 0$$

1. Justifier l'existence d'une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{k-1}X \neq 0_{n,1}$ et en donner une.
2. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $A^{k-1}X \neq 0_{n,1}$. Démontrer que la famille $\left(X, AX, \ldots, A^{k-1}X\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Quelle information peut-on en déduire sur p ?

19

Applications linéaires

Comme pour le chapitre précédent, je fais le choix d'empiéter sur le programme de deuxième année. Les exercices présentés ne se limitent donc pas aux seules applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. En revanche, la représentation matricielle des applications linéaires est laissée au programme de 2A.

Exercice 156 – ●○○

Dans chaque cas : démontrer que f est une application linéaire (en précisant les espaces vectoriels de départ et d'arrivée). Déterminer ensuite $\ker(f)$, puis le rang de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

1. $f : (x, y, z) \longmapsto x + y + z$.
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$.
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$.
4. $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+b+d \\ a+c+d \\ a-b+c \\ a+b-c \end{pmatrix}$

Exercice 157 – ●○○

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que l'application linéaire

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que dire ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la dimension de $\ker(f)$ puis une base de $\ker(f)$.
4. Retrouver autrement le résultat de la question précédente.

Exercice 158 – ●○○

Considérons l'application f qui à $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x) - xP'(x)$$

1. Soit $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer $f(P)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 159 – ●○○

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AMA$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(I_2)$ puis en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en conclure ?
4. En procédant autrement, démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et exprimer, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f^{-1}(M)$ en fonction de M et A.
5. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$. Démontrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 160 – ●●○ – À avoir en tête

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Établir :

$$f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$$

Exercice 161 – ●●○ – Projecteurs

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que $f \circ f = f$. Établir

$$\forall y \in E,\ \big(y \in \operatorname{Im}(f) \iff f(y) = y\big)$$

Exercice 162 – ●●●

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. *On note* $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.

20

Probabilités et variables aléatoires en univers fini

Ce premier chapitre de probabilités pose les bases nécessaires à l'étude des probabilités sur les deux années. Je fais le choix, dans le cours correspondant, d'introduire la notion de variable aléatoire qui est souvent vue séparément : ne pas hésiter à revenir sur les exercices en question le moment venu. L'exercice 169 utilise la notion d'indépendance de variables aléatoires, qui est plutôt au programme de 2A...

Exercice 163 – ●●○ – Vrai ou faux ?

1. Si A et B sont deux évènements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)$.
2. Si $A \cap B \cap C = \varnothing$, alors au moins une des trois intersections $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ est vide.
3. Deux évènements A et B sont incompatibles si, et seulement si, $A \subset \overline{B}$.
4. On lance indéfiniment une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "on n'obtient que des PILE pendant les n premiers lancers". On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A_{n+1} \subset A_n$$

5. On lance indéfiniment une pièce et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement : "on n'obtient au moins un PILE pendant les n premiers lancers". On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ A_{n+1} \subset A_n$$

Exercice 164 – ●○○ – Probabilités & suites

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de deux pièces A et B ayant chacune un côté PILE et un côté FACE. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé. Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces. Au début du jeu, les deux pièces sont du côté FACE. Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement : "à l'issue du n-ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté FACE"
- B_n l'évènement : "à l'issue du n-ième lancer de dé, une pièce est du côté PILE et l'autre côté FACE"
- C_n l'évènement : "à l'issue du n-ième lancer de dé, les deux pièces sont du côté PILE"

De plus on note, pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \mathbb{P}(A_n)$; $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. Donner les probabilités a_0 , b_0 et c_0 ; puis calculer a_1, b_1 et c_1.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.
3. Calculer b_2.
4. Pour tout entier naturel n, exprimer c_n en fonction de a_n et b_n.
5. Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On admet que $b_n \neq 0$ et $c_n \neq 0$.
   - 5.a. Sans justifier, donner $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$.
   - 5.b. Établir :
   $$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n$$
   - 5.c. En déduire :
   $$b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}$$
   Cette relation est-elle encore valable quand $n \in \{0; 1\}$?
6. Déterminer le terme général de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis en déduire sa limite. Interpréter le résultat.

Exercice 165 – ●●○ – Avec ou sans remise ?

Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'urne numéro k contient k balles blanches et $n - k$ balles noires.

1. On choisit au hasard une urne puis on tire successivement et avec remise 2 balles dans l'urne. On pose, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, U_k l'évènement "le tirage s'effectue dans l'urne numéro k" ; et A l'évènement "obtenir deux balles blanches à l'issue de l'expérience".
   Démontrer que $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\mathbb{P}_{U_k}(A)$ puis calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. Même question si le tirage des balles se fait successivement et sans remise.
3. 3.a. Recopier et compléter les lignes manquantes du programme ci-dessous de sorte que son exécution simule l'expérience, dans le cas de tirages avec remise, et renvoie **True** si l'évènement A est réalisé et **False** sinon.
   On rappelle que si a et b sont des entiers tels que $b > a$, alors **rd.randint(a,b)** renvoie un entier aléatoire de $[\![a; b-1]\!]$.

```python
import numpy.random as rd

def simule_avec_remise(n):
    k=rd.randint(1,n+1)
    b1=...
    b2=...
    if ...
        return True
    else:
        return False
```

   3.b. Que renvoie l'exécution de **mystere(n)**, où **mystere** est la fonction définie ci-dessous ?

```python
def mystere(n):
    S=0
    for i in range(10000):
        if simule_avec_remise(n)==True:
            S=S+1
    return S/10000
```

   3.c. Adapter le programme de la question 3.a. au cas des tirages successifs et sans remise.

Exercice 166 – ●○○

On considère la variable aléatoire X, dont la loi de probabilité est définie par :

k	1	3	5	10
$\mathbb{P}\big([X = k]\big)$	0,1	p	q	0,2

Déterminer les valeurs de p et q, de sorte que l'espérance de X soit égale à 5.

Exercice 167 – ●●○ – Loi géométrique tronquée

Soit $p \in]0;1[$. On lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p jusqu'à obtenir le premier PILE ; et dans tous les cas, on s'arrête après le cinquième lancer. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués.

1. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0;1[,\ \sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$
2. Démontrer que $X(\Omega) = [\![1;5]\!]$.
3. Calculer $\mathbb{P}\big([X = 1]\big)$.
4. Déterminer la loi de X.
5. Calculer l'espérance de X.
6. Écrire une fonction telle que l'exécution de **`simuleX(p)`** simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
7. Reprendre l'exercice en considérant au plus n lancers, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 168 – ●●○ – C'est faux !

Chacune des affirmations suivantes est fausse. Dans chaque cas, fournir un contre-exemple permettant de l'infirmer.

1. Si X ne prend que deux valeurs opposées, alors nécessairement $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)^2$.
3. Pour toute variable aléatoire X, les lois de X et X^2 sont différentes.
4. Si X et Y ont même espérance et même variance, alors elles ont la même loi de probabilité.

Exercice 169 – ●●○ – Loi d'un minimum

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On dit qu'une variable aléatoire X, définie sur Ω, suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ lorsque :

✓ $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$

✓ $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \dfrac{1}{n}$

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X, Y)$ et on admet que M est une variable aléatoire sur Ω.
   1.a. Sans utiliser la commande **`min`**, écrire une fonction qui prend en argument un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et renvoie une réalisation de la variable aléatoire M.
   1.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X \geqslant k]\big)$.
   1.c. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([M \geqslant k]\big)$.
   1.d. En déduire la loi de M.

2. Soit maintenant $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M=\min(X_1,X_2,\dots,X_n)$.
   - **2.a.** Déterminer, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([M\geqslant k]\big)$.
   - **2.b.** En déduire la loi de M.
   - **2.c.** Notons $A=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}[X_i=1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A)\geqslant 1-\mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 170 – ●●● – Loi d'un maximum

Soit $n\in[\![2;+\infty[\![$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Démontrer que pour tout $k\in[\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X\leqslant k]\big)=\dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 171 – ●●○ – Marche aléatoire

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p\in]0;1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0=0$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de **simuleX(n,p)** simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X_n.
2. Donner la loi de X_1.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\ X_n(\Omega)=[\![0;n]\!]$.
4. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in[\![1;n]\!]$:

$$\mathbb{P}\big([X_n=k]\big)=p\mathbb{P}\big([X_{n-1}=k-1]\big)$$

5. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n)=p\mathbb{E}(X_{n-1})+p$; puis déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.
6. **6.a.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big([X_n=n]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n=0]\big)$.
   - **6.b.** En utilisant la question 4., démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n=k]\big)=p^k(1-p)$.

Exercice 172 – ●●● – Variables aléatoires indicatrices et espérance conditionnelle

Soient Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall\omega\in\Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } \omega\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Que dire de $\mathbb{1}_\Omega$ et $\mathbb{1}_\varnothing$?
2. Soit $A\in\mathcal{P}(\Omega)$. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$ ainsi que son espérance.
3. Soient $A,B\in\mathcal{P}(\Omega)$. Établir :

$$\mathbb{1}_A^2=\mathbb{1}_A \quad ; \quad \mathbb{1}_{\overline{A}}=1-\mathbb{1}_A \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B \quad ; \quad \mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_{A\cap B}$$

4. Soit A un évènement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini, on définit la **variable aléatoire**, notée $\mathbb{E}_A(X)$, par :

$$\mathbb{E}_A(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_A) \times \mathbb{1}_A + \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{A})}\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\overline{A}}) \times \mathbb{1}_{\overline{A}}$$

4.a. Déterminer $\mathbb{E}_A(\mathbb{1}_A)$.

4.b. Soient X et Y deux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}_A(X+Y) = \mathbb{E}_A(X) + \mathbb{E}_A(Y)$$

4.c. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. Démontrer :

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}_A(X)\big) = \mathbb{E}(X) \quad ; \quad \mathbb{E}_A\big(X\mathbb{1}_A\big) = \mathbb{E}_A(X) \times \mathbb{1}_A$$

21

Probabilités en univers infini

Seulement trois exercices... Et l'exemple classique du cours du chapitre associé. L'exercice 175 est plus théorique, mais contient des questions abordables et est intéressant à travailler dans l'objectif d'être plus à l'aise sur des manipulations plus abstraites ; ce qui est nécessaire à la réussite des épreuves écrites conçues par HEC/ESSEC.

Exercice 173 – ●●○ - Des résultats classiques

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A_n est quasi-certain, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$$
2. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 1$.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

Exercice 174 – ●●○

On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier PILE et on admet que l'évènement "on obtient au moins un PILE" est quasi-certain. Si n désigne le nombre de lancers effectués, on tire ensuite au hasard une balle dans une urne composée de 2^n balles dont n sont blanches.

1. Quelle est la probabilité de tirer une balle blanche ?
2. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simule()` simule l'expérience puis renvoie 1 si une balle blanche est tirée et 0 sinon.
3. Que permet d'afficher le programme suivant ?

```python
L=[simule() for k in range(10000)]
S=sum(L)
print(S/10000)
```

Exercice 175 – ●●● – Théorème de limite monotone

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. **Question préliminaire.**

   Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \bigcup_{k=0}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

   Établir : $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.

2. **On suppose dans cette question seulement** que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion), autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$.

   2.a. Démontrer que la suite $\big(\mathbb{P}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   2.b. Définissons une suite d'évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$\begin{cases} B_0 = A_0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n = A_{n+1} \cap \overline{A_n} \end{cases}$$

   2.b.i. Démontrer que la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements deux à deux incompatibles.

   2.b.ii. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_n$, puis démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.

   2.b.iii. Déduire des questions précédentes : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

3. **On revient au cas général.** En considérant la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, déduire de la question précédente :

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

4. Démontrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion), alors : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

5. Déduire enfin : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$.

6. **Application.** Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée d'évènements indépendants de probabilité $p \in]0;1[$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = 0$.

22

Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Attention : si vous avez déjà vu les lois discrètes usuelles (uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson), les exercices proposés dans ce chapitre sont à traiter sans les utiliser !
Je propose ici un échantillon assez varié d'exercices tous très classiques. À travailler sans modération, sans les lois usuelles ; et à reprendre ensuite après les avoir vues.

Exercice 176 – ●○○ – Lois incomplètes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit X une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad ; \quad \forall n \in [\![2; +\infty[\![, \ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

   On sait également que les évènements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ ont même probabilité. Déterminer cette probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = a\frac{1}{3^n}$$

   Déterminer a.

Exercice 177 – ●○○ – Avec la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, dont la fonction de répartition, notée F_X, vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ F_X(n) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 178 – ●●○ – Nombre d'échecs avant premier et deuxième succès

On effectue une succession infinie de tirages avec remise dans une urne composée de 25% de balles noires et 75% de balles blanches. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de balles blanches tirées avant l'obtention de la première (resp. deuxième) balle noire. On attribue à X la valeur -1 si aucune balle noire n'est tirée ; et à Y la valeur -1 si au plus une balle noire est tirée.
On note également, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'évènement "obtenir une balle blanche lors du tirage k".

1. Écrire deux fonctions **Python** permettant de simuler l'expérience et renvoyant chacune une réalisation des variables aléatoires X et Y.
2. **Loi de X.**
   2.a. Sans justifier, donner $X(\Omega)$.
   2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}\big([X = n]\big)$.
   2.c. En déduire $\mathbb{P}\big([X = -1]\big)$.
   2.d. Justifier que X admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.
   2.e. Justifier que X admet une variance et la calculer.
3. **Loi de Y.**
   3.a. Donner $Y(\Omega)$.
   3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}\big([Y = n]\big)$.
   3.c. On admet que, de la même façon qu'à la question 2.c., $\mathbb{P}\big([Y = -1]\big) = 0$. Justifier que Y admet une espérance et la calculer. Interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 179 – ●●○ – Saut en hauteur

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$. Il ne peut tenter de passer la hauteur $(n+1)$ que s'il a réussi les sauts aux hauteurs $1, 2, \ldots, n$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le sauteur peut tenter le n-ième saut, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{1}{n}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'évènement : "le sauteur peut tenter et réussit son k-ième saut" et on note X la variable aléatoire donnant le numéro du dernier saut réussi. On attribue à X la valeur 0 si tous les sauts sont réussis.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleX()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
2. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur $\mathbb{P}\big([X = n]\big)$.
3. En déduire $\mathbb{P}\big([X = 0]\big)$.
4. Démontrer que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 180 – ●●○ – Deux PILE consécutifs

On joue à PILE ou FACE avec une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux PILE consécutifs ; X prendra la valeur 0 si une telle combinaison n'apparaît jamais.
Pour $n \in [\![2; +\infty[\![$, on note $p_n = \mathbb{P}\big([X = n]\big)$.

1. Expliciter les évènements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$ et donner leurs probabilités.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales établir :

$$\forall n \in [\![2; +\infty[\![, \; p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

3. En déduire, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, l'expression de p_n en fonction de n.
4. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.
5. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleX()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

Exercice 181 – ●●○ – Jusqu'à la balle rouge, avec rajout de balles blanches

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec les règles suivantes :

- si on obtient la boule rouge, on arrête les tirages ;
- sinon, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute une boule blanche supplémentaire et on recommence.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages ainsi effectués. T prendra la valeur 0 si la balle rouge n'est jamais tirée.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: B_k l'évènement "on tire la balle blanche au tirage k" et $R_k = \overline{B_k}$.

1. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleT()` renvoie une réalisation de la variable aléatoire T.
2. Soit $i \in [\![2; +\infty[\![$. Déterminer $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}\big([T = n]\big)$.
4. En déduire la probabilité de tirer la balle rouge.
5. La variable T admet-elle une espérance ? Si oui, préciser sa valeur.

Exercice 182 – ●●● – Obtenir chaque face

On lance indéfiniment une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir PILE est $\dfrac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir chacun des deux côtés de la pièce ; et X prend la valeur 0 sinon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Justifier que X admet une espérance et préciser sa valeur.
3. On considère la variable aléatoire $Y = X(X-1)$.
   - 3.a. Démontrer que Y admet une espérance et préciser sa valeur.
   - 3.b. En déduire que X admet une variance et préciser sa valeur.
4. Écrire une fonction **Python** renvoyant une réalisation de la variable aléatoire X.

Exercice 183 – ●●● – Une autre expression de l'espérance

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. 1.a. Démontrer :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \mathbb{P}\big([X > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([X > k]\big)$$
   - 1.b. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\big([X > k]\big) - n\mathbb{P}\big([X > n]\big)$$
2. On suppose que la série $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X > k]\big)$ est convergente.

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\big([X = k]\big)$.
   - 2.a. Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   - 2.b. Déduire de la question 1.b. que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
   - 2.c. Démontrer finalement que X admet une espérance.
3. Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.
   - 3.a. Démontrer que la suite $\big(n\mathbb{P}([X > n])\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.b. En déduire que la série $\sum \mathbb{P}\big([X > k]\big)$ est convergente et :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X > k]\big)$$

4. **Application 1.** On dispose d'une urne contenant N balles indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N. On effectue n tirages successifs et avec remise d'une balle ; et on note X_n la variable aléatoire égale au maximum des nombres obtenus sur ces n tirages.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du i-ème tirage.
   4.a. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Donner la loi de Y_i.
   4.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n \leqslant k]\big)$.
   4.c. En déduire que X_n possède une espérance et l'exprimer sous forme d'une somme.
5. **Application 2.** On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel n :

$$\mathbb{P}\big([X > n]\big) = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \quad (\star)$$

   5.a. Vérifier que $(\star)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   5.b. Démontrer que X admet une espérance si, et seulement si, $\alpha > 1$.

23

Lois discrètes usuelles

Le cours consacré à ce chapitre se résume essentiellement à l'inventaire des lois usuelles. Pour les exercices, voici des grands classiques qui seront utiles pour aborder ensuite bon nombre d'exercices d'annales de concours listés en fin de livre. L'exercice 189 utilise la notion d'indépendance de variables aléatoires, qui est plutôt au programme de 2A. Les exercices 191 et 192 sont un peu plus difficiles, mais très classiques.

Exercice 184 – ●○○ – QCM

Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions, chacune comprenant quatre propositions dont une seule est correcte. On note X le nombre de bonnes réponses obtenues à la fin du QCM.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X = k]\big)$ pour $k \in X(\Omega)$, son espérance et sa variance.
2. Le barème est constitué ainsi : 1 point par bonne réponse et -1/2 point par mauvaise réponse. On note N la variable aléatoire donnant la note obtenue par l'élève.
   - 2.a. Écrire N en fonction de X.
   - 2.b. En déduire que N possède une espérance et une variance puis les calculer.
   - 2.c. On attribue toujours un point par bonne réponse. Déterminer la pénalité à appliquer à chaque mauvaise réponse de sorte que l'espérance de N soit nulle.

Exercice 185 – ●○○ – Jusqu'au premier PILE

Une pièce a la probabilité p (avec $p \in]0;1[$) de tomber sur PILE. On la lance jusqu'à obtenir PILE pour la première fois. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus et Y celle donnant le rang du premier PILE.

1. Sans utiliser la commande `rd.geometric()`, écrire une fonction `Python` qui prend en argument un réel $p \in]0;1[$ puis qui simule l'expérience et renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.
2. Quelle est la loi de Y ? Donner $Y(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([Y = k]\big)$ pour $k \in Y(\Omega)$, son espérance et sa variance.
3. En déduire la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair de FACE.

Exercice 186 – ●●○ – À partir d'un programme `Python`

1. On considère la fonction `simuleX()` suivante qui prend en argument un entier naturel non nul n. Proposer une expérience aléatoire ainsi qu'une variable aléatoire X de sorte que `simuleX(n)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire X.

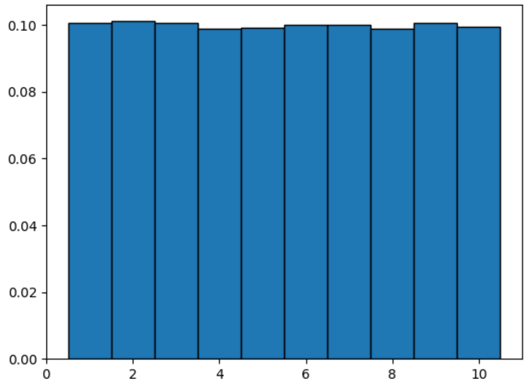
```python
import numpy.random as rd

def simuleX(n):
    N=n
    X=1
    while rd.randint(1,N+1)!=1:
        N=N-1
        X=X+1
    return X
```

2. On exécute le programme ci-dessous qui affiche le graphique qui suit.

```python
import matplotlib.pyplot as plt

n=10
L=[simuleX(n) for k in range(100000)]
Labs=[-0.5+k for k in range(1,n+2)]
plt.hist(L,Labs,edgecolor='k',density=True)
plt.show()
```



Quelle conjecture émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 187 - ●●○ - Loi de Poisson

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(a)$ et $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

1. Démontrer que Y admet une espérance et la calculer.
2. De quelle valeur le réel renvoyé par l'exécution de la fonction `mystere(a)` ci-dessous est-il proche ?

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def mystere(a):
    L=[rd.poisson(a) for k in range(10000)]
    M=[1/(1+x) for x in L]
    return np.mean(M)
```

Exercice 188 – ●●○

Soient a un réel strictement positif et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X = n+1]\big) = \frac{a}{n}\mathbb{P}\big([X = n]\big)$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n-1)!\mathbb{P}\big([X = n]\big)$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de a, n et $\mathbb{P}\big([X = 1]\big)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}\big([X = 1]\big)$, puis donner la loi de X.
3. On pose $Y = X-1$. Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 189 – ●●○ – Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$. On définit également la variable aléatoire Z par $Z = X - Y$.

1. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
2. Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
3. Donner $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big)$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}\big([Z = k]\big)$ et $\mathbb{P}\big([Z = -k]\big)$.

Exercice 190 – ●●○ – Rang du k-ième succès

On dispose d'une pièce truquée donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$ et FACE sinon. On lance indéfiniment cette pièce. On admet que l'on obtient presque-sûrement au moins deux PILE ; on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE et Y celle égale au rang du second PILE. On note $q = 1 - p$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'évènement "obtenir PILE au lancer k" et $F_k = \overline{P_k}$.

1. Démontrer que $Y(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$.
2. Démontrer que pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $\mathbb{P}\big([Y = n]\big) = (n-1)q^{n-2}p^2$.
3. Démontrer que Y possède une espérance et la calculer.
4. On note maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire égale au rang du k-ième PILE. On a ainsi $Y_2 = Y$.
   On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus sur les n premiers lancers.
   - 4.a. Reconnaître la loi de Y_1.
     Préciser $Y_1(\Omega)$ et, pour tout $n \in Y_1(\Omega)$, donner $\mathbb{P}\big([Y_1 = n]\big)$.
   - 4.b. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un réel $p \in]0;1[$ et un entier naturel non nul k puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y_k.
   - 4.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n.
   - 4.d. Sans justifier, donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k(\Omega)$.
   - 4.e. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![k;+\infty[\![$. Exprimer l'évènement $[Y_k = n]$ en fonction de P_n et d'un évènement faisant intervenir la variable aléatoire X_{n-1}. En déduire la loi de Y_k.
5. Soit $x \in]0;1[$. On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $S_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
   - 5.a. Calculer S_0.

5.b. Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation de Pascal, établir :

$$(1-x)S_{k+1} = xS_k$$

5.c. Démontrer alors :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ S_k = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_k possède une espérance et la calculer.

Exercice 191 – ●●● – À partir d'une loi géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant la géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$. Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.
2. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.a. Écrire une fonction **Python** telle que l'exécution de `simuleZ(p)` renvoie une réalisation de la variable aléatoire Z.

2.b. On considère la fonction `mystere` ci-dessous. De quelle valeur le réel renvoyé par l'exécution de `mystere(p)` est-il une valeur approchée ?

```python
def mystere(p):
    N=0
    for k in range(10000):
        Z=simuleZ(p)
        if Z==0:
            N=N+1
    return N/10000
```

2.c. Déterminer $\mathbb{P}\big([Z=0]\big)$.

2.d. Déterminer la loi de Z.

2.e. Justifier que Z possède une espérance et la déterminer.

Exercice 192 – ●●● – Loi sans mémoire

Définition. Une variable aléatoire X, discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ est dite **sans mémoire** lorsque :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X>n]\big) \neq 0 \text{ ET } \mathbb{P}_{[X>n]}\big([X>n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X>m]\big)$$

1. Démontrer que si X suit un loi géométrique, alors X est sans mémoire.
2. Réciproquement, supposons que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, sans mémoire.

2.a. Établir : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X>n+m]\big) = \mathbb{P}\big([X>n]\big)\mathbb{P}\big([X>m]\big)$.

2.b. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}\big([X>n]\big)$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

2.c. Conclure que X suit une loi géométrique.

Exercice 193 – ●●● – **Problème du collectionneur**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n balles numérotées de 1 à n, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une balle avec remise dans l'urne.
Pour tout entier $i \in [\![1;n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts.

1. Écrire une fonction **Python** d'en-tête `simulationT(n,i)` simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de T_i.
2. Démontrer que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, T_i admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(T_i) = n \sum_{k=n-i+1}^{n} \frac{1}{k}$$

On pourra poser $Z_1 = T_1$ et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, $Z_i = T_i - T_{i-1}$.

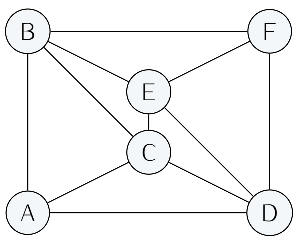
24

Graphes

Ce chapitre contient des exercices assez différents, sur des thèmes variés. Un bon échantillon pour s'entraîner aux écrits comme aux oraux. Le cours sur les graphes ne sera pas approfondi en 2A, il est donc important de le retravailler régulièrement pour ancrer le vocabulaire, les résultats importants ainsi que les raisonnements, assez spécifiques aux graphes. Très peu de technique ici, surtout des exercices de réflexion ainsi qu'une bonne quantité de questions **Python**.

Exercice 194 – ●○○

On considère le graphe $\mathscr{G}$ suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe.
2. L'exécution du programme ci-dessous affiche le résultat suivant.

```python
import numpy as np

M=np.array([[0,1,1,1,0,0],[1,0,1,0,1,1],
            [1,1,0,1,1,0],[1,0,1,0,1,1],
            [0,1,1,1,0,1],[0,1,0,1,1,0]])
print(np.dot(M,M))
```

```
[[3 1 2 1 3 2]
 [1 4 2 4 2 1]
 [2 2 4 2 2 3]
 [1 4 2 4 2 1]
 [3 2 2 2 4 2]
 [2 1 3 1 2 3]]
```

2.a. Combien existe-t-il de chaînes de longueur 2 dont le départ et l'extrémité sont respectivement les sommets B et D ? Donner ces chaînes.

2.b. Justifier que le graphe $\mathscr{G}$ est connexe.

3. Ce graphe possède-t-il une chaîne eulérienne ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. Quelle arête ajouter pour qu'il en possède un ?
5. Expliquer ce que permet de renvoyer l'exécution de **mystere(M)** dans le cas où **M** est le tableau **numpy** représentant la matrice d'adjacence du graphe $\mathscr{G}$.

```
def mystere(M):
    S=['A','B','C','D','E','F']
    n=len(S)
    L=[[] for k in range(n)]
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            if M[i,j]!=0:
                L[i].append(S[j])
    return L
```

Exercice 195 – ●●○ – Vrai / faux

1. Un graphe est connexe si, et seulement si, il n'a aucun sommet isolé.
2. Dans un graphe simple et connexe, il existe toujours au moins deux sommets de même degré.
3. Soit $\mathscr{G}$ un graphe simple, non orienté et connexe. Démontrer que si $\mathscr{G}$ ne possède pas de cycle eulérien, alors il est possible d'ajouter un unique sommet à $\mathscr{G}$ de sorte que le nouveau graphe obtenu possède un cycle eulérien.

Exercice 196 – ●●○ – Connexité

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non orienté, simple, d'ordre $2p$ tel que le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à p.
Démontrer que $\mathscr{G}$ est connexe.

Exercice 197 – ●●○ – Connexité (bis)

On considère un graphe $\mathscr{G}$ simple et non orienté d'ordre $n \geqslant 2$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un tel graphe $\mathscr{G}$ et renvoyant un booléen précisant la connexité de $\mathscr{G}$.
2. On suppose que $\mathscr{G}$ est connexe et possède un sommet x de degré 1. Montrer que $\mathscr{G} \setminus \{x\}$ est connexe.
3. En déduire que si $\mathscr{G}$ est connexe d'ordre n, alors $\mathscr{G}$ possède au moins $n-1$ arêtes.
4. Comment utiliser le résultat précédent pour effectuer un test de non connexité d'un graphe simple et non orienté qui soit peu coûteux en calculs ?

Exercice 198 – ●●○ – Tournoi

On appelle **tournoi** un graphe orienté et simple tel qu'entre deux sommets distincts, il existe un et un seul arc.
On dit qu'un sommet est un roi lorsqu'il a un chemin orienté de longueur au plus 2 vers tous les autres sommets.

1. Combien un tournoi contient-il d'arcs ?
2. Donner un tournoi d'ordre 4 possédant un unique roi.

3. Montrer que, dans un tournoi, il existe toujours un roi.
4. 4.a. Que permet de faire la fonction **mystere** suivante, où **L** désigne une liste de réels ?

```python
def mystere(L):
    m=L[0]
    k=0
    for i in range(1,len(L)):
        if L[i]>m:
            m=L[i]
            k=i
    return k
```

   4.b. Proposer une fonction **Python** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un tournoi dont les sommets sont numérotés à partir de 0 et renvoyant en sortie un roi.

Exercice 199 – ●●● – Graphe régulier

On dit qu'un graphe est **régulier** lorsqu'il est simple, non orienté et que tous ses sommets ont même degré.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté et renvoyant **True** s'il est régulier, **False** sinon.
2. Que dire de l'ordre d'un graphe régulier dont les sommets sont tous de degré 3 ?
3. Démontrer que pour tout $p \in [\![2; +\infty[\![$, il existe un graphe régulier d'ordre $2p$ dont les sommets sont de degré 3.

Exercice 200 – ●●● – Graphes aléatoires

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe simple non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Les arêtes de ce graphe sont définies de façon aléatoire et indépendantes entre elles de la sorte : pour tous i, j de $[\![1; n]\!]$ différents, on construit une arête entre les sommets i et j avec une probabilité $p \in]0; 1[$.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on définit une variable aléatoire X_i telle que :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en arguments un entier $n \geqslant 2$ et un réel $p_n \in]0; 1[$ puis qui génère et renvoie la matrice d'adjacence d'un tel graphe aléatoire.
2. Que représente la variable aléatoire S_n ?
3. Interpréter le résultat renvoyé par l'exécution de **mystere(M)** où M désigne une matrice générée par le programme de la question 1..

```python
import numpy as np

def mystere(M):
    L=[]
    (n,n)=np.shape(M)
    for i in range(0,n):
        if sum(M[i,:])==0:
            L.append(i+1)
    return L,len(L)
```

4. Donner la loi de X_1. En déduire l'espérance de S_n.
5. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?