Les Chartreux

1

Analyse

Équivalence et négligeabilité de suites

Introduction...

Lorsque l'on parle de *comportement asymptotique* d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la *vitesse* à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.
L'idéal quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un *développement asymptotique* : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrons rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un *équivalent* de la suite.

L'objectif de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

Pour bien démarrer...

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?

   M1. Etudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $u_{n+1} - u_n$.

   M2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant et ne s'annule pas, comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

   M3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, alors :
   - si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera monotone : on le démontre souvent par récurrence ;
   - si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont des monotonies différentes : on les démontre souvent par récurrence ;
   - si f n'est pas monotone, alors c'est le bazar : cas cas ne sera jamais rencontré.

   M4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite implicite :
   - si on a affaire à une relation de la forme $f(u_n) = a_n$ (avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite connue) et que f est bijective, alors $u_n = f^{-1}(a_n)$ et c'est alors assez direct en partant de $n \leqslant n+1$ et en reconstruisant u_n et u_{n+1} ;
   - si on a affaire à une relation de la forme $f_n(u_n) = a$ (avec a un réel connu), alors on cherche souvent à comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour comparer $f_n(u_n)$ et $f_{n+1}(u_n)$, puis on utilise le fait que $f_n(u_n) = f_{n+1}(u_{n+1})$ et la stricte monotonie de f_{n+1}.

2. Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.
   - Suite convergente : $\exists \ell \in \mathbb{R} \ / \forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \big(n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\big)$
   - Suite divergente vers $+\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \big(n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A\big)$

3. Définition de suites adjacentes. Conséquence ?
   - **Définition.** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque :
     - ✓ l'une de ces suites est croissante,
     - ✓ l'autre est décroissante,
     - ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.
   - **Propriété.** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

4. Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
   - **Définition.** On dit que la série de terme général u_n est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   - **Condition nécessaire.** Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$. Cette condition n'est pas suffisante, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ est divergente et pourtant $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$.
   - **Définition.** On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.
   - **Propriété.** Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente (la réciproque est fausse...).

5. Séries usuelles.
   - Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si, et seulement si, $q \in]-1;1[$ et en cas de convergence :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

   - La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Dans tout le chapitre, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront des suites de réels définies sur $\mathbb{N}$.
Tous les résultats du chapitre sont encore valables si les suites en jeu ne sont définies qu'à partir d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

I Négligeabilité de suites

Définition 1 — Négligeabilité de suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

☞ Pour info...
De façon générale, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$,
- $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant N,\ u_n = \varepsilon_n v_n$.

Un peu d'histoire
Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et $\sim$ vues dans ce chapitre.

Notations — de Landau

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

N1 On note $\underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

N2 Par abus, on écrira $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
On lira "u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$".

Petite remarque
Dans l'écriture "$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$", le n est muet.

Exemples 1

E1 $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^2)$, $n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$,...

E2 $\dfrac{1}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

E3 par croissance comparée : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend moins vite vers $+\infty$ que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$:
   Dans ce cas, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend plus vite vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ si, et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

En gros...
"Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

Propriétés 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

P1 $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{array}\right\} \implies \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *(linéarité)*

P2 $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \end{array}\right\} \implies u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ *(transitivité)*

P3 $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \implies u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)$

P4 $\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v'_n) \end{array}\right\} \implies u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n v'_n)$

P5 $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\lambda v_n)$

P6 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang : $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \implies \dfrac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

♡ L'avis du chef ! ♡
Des démonstrations basiques et assez répétitives mais qui permettent de s'entraîner sur la structure de rédaction et de s'assurer que les concepts élémentaires sont maîtrisés.

⋆ Démonstration :

P1. Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{array}\right.$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lambda \frac{u_n}{v_n} + \mu \frac{u'_n}{v_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$; et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda\frac{u_n}{v_n} + \mu\frac{u'_n}{v_n} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = 0$, autrement dit, $\lambda u_n + \mu u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

P2. Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{array}\right.$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$; et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = 0$, autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$.

P3. Supposons $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n w_n}{v_n w_n} = 0$, autrement dit, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n w_n)$.

P4. Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v'_n) \end{array}\right.$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$; et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v'_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v'_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \mu\frac{u'_n}{v'_n} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 0$, autrement dit, $u_n u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n v'_n)$.

P5. Supposons $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{\lambda v_n} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$...

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\lambda v_n} = 0$, autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(\lambda v_n)$.

P6. Supposons qu'à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Supposons $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$...

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = 0$, autrement dit, $\dfrac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

★

✘ Attention !

On rappelle que "$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$" est un abus de notation :
"$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$" n'est pas une égalité comme on la connaît. En particulier :

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \end{array}\right\} \cancel{\Longrightarrow} u_n = u'_n$$

EXEMPLES 2

E1 On a : $n^2 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3)$, $n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3)$ et $1 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3)$. D'où : $n^2 + 2n + 1 = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3)$.

E2 $n^4 + n^2 + 2n + 1 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3) = n^4 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^3)$.

En effet, puisque n^2+2n+1 est négligeable devant n^3 en $+\infty$, l'expression $n^4+n^2+2n+1+\underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ est en fait égale à n^4 + la somme de deux quantités négligeables devant n^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \ln(n)^a=\underset{n\to+\infty}{o}(n^b)$$

$$\forall b\in\mathbb{R}_*^+,\forall q\ \in]1;+\infty[,\ n^b=\underset{n\to+\infty}{o}(q^n)$$

$$\forall q\in]1;+\infty[,\ q^n=\underset{n\to+\infty}{o}(n!)$$

$$n!=\underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a,b\in\mathbb{R}_*^+,\ \forall q\in]1;+\infty[,\ \ln(n)^a\ll n^b\ll q^n\ll n!\ll n^n$$

Vocabulaire
Le symbole "$\ll$" se lisant alors "est négligeable devant".

E4 Par croissance comparée, on a $\ln(n)=\underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$, donc : $\dfrac{\ln(n)}{n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

E5 Par croissances comparées, on a $\ln(n)=\underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$ et $e^{-n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc : $\ln(n)e^{-n}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Parfois, on écrira $u_n=v_n+\underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$ qui se lit "u_n égale v_n + un petit o de w_n". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n), négligeable devant (w_n), telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n+h_n$.

II Équivalence de suites

Définition 2 — **Équivalence de suites**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$.

☞ Pour info...
De façon générale, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
- $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=1$,
- $\exists N\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\geqslant N,\ u_n=\alpha_n v_n$.

Exemples 3

E1 $n^2+2n+1\underset{n\to+\infty}{\sim}n^2$

E2 $\sqrt{2n^2-5n+2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2}n$

E3 par croissance comparée : $e^n+n\underset{n\to+\infty}{\sim}e^n$

E4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\leqslant u_n\leqslant 2n$. Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

★ Classique ! ★
Il est fréquent d'obtenir un équivalent à l'aide d'un encadrement...

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<n\leqslant u_n\leqslant 2n$$

D'où, par croissance deln sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n)\leqslant\ln(u_n)\leqslant\ln(2)+\ln(n)$$

Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$1\leqslant\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\leqslant 1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}1+\dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}$. Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}=1$$

♡ Astuce du chef ! ♡
Pour savoir par quoi diviser, on regarde à quoi sont équivalents les membres de droite et de gauche. S'ils sont tous deux équivalents à la même quantité, alors le terme du milieu le sera également : on divise donc par cette quantité...

Conclusion : $\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

Trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$. Le but étant de trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'expression est plus simple que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

À retenir...
On ne cherche des équivalents que de suites dont le terme général contient des sommes ou dont on ne connaît pas le terme général.

Propriétés 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(réflexivité)*

P2 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ *(symétrie)*

P3 $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *(transitivité)*

P4 $\forall \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

P5 $\forall \ell \in \mathbb{R}^*$, $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\right)$

P6 $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$ *(compatibilité avec le produit)*

En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$.

P7 $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{u_n}{u'_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$ *(compatibilité avec le quotient)*

P8 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \forall m\in\mathbb{N},\ u_n^m \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n b^m$ *(compatibilité avec la puissance)*

P9 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positives à partir d'un certain rang $\Longrightarrow \forall a\in\mathbb{R},\ u_n^a \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^a$ *(compatibilité avec la puissance)*

P10 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$ *(compatibilité avec la valeur absolue)*

P11 Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe.

P12 Trois choses parfois utiles : *(liens $\sim$ et o)*

P12.a $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(w_n)$

P12.b $\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

P12.c $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n) \iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n)$

Important !
On peut donc dire "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes".

Pour info...
Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est **une relation d'équivalence.** C'est le cas de $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles ; mais également de $\iff$ sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Petite remarque
En particulier :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$$

Attention !
L'exposant de la puissance ne doit pas dépendre de la variable !

Petite remarque
Si on utilise P11, on voit qu'une seule des deux hypothèses de stricte positivité suffit en pratique...

Démonstration :

P1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et
$$\frac{u_n}{u_n} = 1$$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$, autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

P2. Procédons par double implication.

$\Longrightarrow$ Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n\neq 0$ et $v_n \neq 0$ puis
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$$
Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$, autrement dit $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

$\Longleftarrow$ De même, en échangeant u_n et v_n.

P3. Supposons $\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right.$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n\neq 0$ et $w_n\neq 0$ puis
$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\times\frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et $v_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 1$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = 1$, autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{\sim} (w_n)$.

P4. Soit $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \end{cases}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
Conclusion : par opération, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

P5. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Puisque $\ell \neq 0$, on a par opération : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ell} = 1$.
Conclusion : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

P6. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v'_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 1$, autrement dit $u_n u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n v'_n$.

P7. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u'_n \neq 0$, $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n}$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, donc d'après P2 $v'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v'_n}{u'_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = 1$, autrement dit $\dfrac{u_n}{u'_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$.

P8. Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Soit $m\in\mathbb{N}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$, donc $v_n^m \neq 0$ et

$$\frac{u_n^m}{v_n^m} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^m$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^m = 1$$

Important !
Il s'agit bien d'une opération sur les limites, car m ne dépend pas de n.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^m}{v_n^m} = 1$, autrement dit $u_n^m \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^m$.

P9. On procède de la même façon.

✘ Attention !
Les puissances à exposants non entiers ne sont bien définies que pour des réels strictement positifs !

P10. Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{|u_n|}{|v_n|} = \left|\frac{u_n}{v_n}\right|$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, dont $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_n|}{|v_n|} = 1$, autrement dit $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.

P11. Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right|\right) \leqslant \varepsilon$$

☞ Rappel...
$(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N}$
$(n \geqslant N \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon)$

En particulier, avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall n \in [\![N; +\infty[\![$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
D'où :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$$

➠Réflexe !
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R}^+$
$|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$

En particulier :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ \frac{u_n}{v_n} > 0$$

À retenir...
Deux réels non nuls ont même signe si, et seulement si, le produit (ou quotient) est strictement positif.

Par conséquent, pour tout $n \in [\![N; +\infty[\![$, u_n et v_n ont même signe.
Conclusion : à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même signe.

P12. **P12.a.** Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $w_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = 0$, autrement dit, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$.

P12.b. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n + u'_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n}$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u'_n}{v_n} = 0$. D'où, par opération :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + u'_n}{v_n} = 1$, autrement dit, $u_n + u'_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

P12.c. Par équivalence, en débutant avec **Propriétés 2 - P2** :

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) &\iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \\ &\iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) &\iff 1 = \frac{v_n}{u_n} + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\iff \frac{v_n}{u_n} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1 \\ &\iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \\ &\iff u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{aligned}$$

P2

⋆

Exemples 4

E1 Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n3^n$ en $+\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a

$$\frac{n^3 2^n + n3^n}{n3^n} = n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

Or $\dfrac{2}{3} \in]-1; 1[$, donc par croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

♣ Méthode !
Pour le trouver : chercher ce qui domine dans les différents termes.

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 2^n + n3^n}{n3^n} = 1$, autrement dit $n^3 2^n + n3^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n3^n$.

E2 Donnons un équivalent simple de $\dfrac{(n^2+1)^4+n+7}{2n(n^3+5)}$ en $+\infty$.

On a :

- $n^2+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, donc $(n^2+1)^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^8$,
- $n+7 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^8)$.

D'où (**Propriétés 2 - P12.a**) :

$$(n^2+1)^4+n+7 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^8$$

Et

$$2n(n^3+5) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^4$$

Conclusion : $\dfrac{(n^2+1)^4+n+7}{2n(n^3+5)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^4}{2}$.

E3 On a :

$$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \quad ; \quad n+2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Et bien entendu :

$$-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$$

Ainsi, **si on pouvait sommer les équivalents**, on obtiendrait :

$$1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2 \quad : \quad \text{FAUX !}$$

Conclusion : ON NE PEUT PAS SOMMER DES ÉQUIVALENTS !

E4 Les suites $\big(\ln(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

★ Classique ! ★
On rencontre souvent cet équivalent.

Pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, on a $\ln(n) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} \qquad n>0 \text{ et } 1+\frac{1}{n}>0\\ &= \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\\ &= 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, d'où, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, autrement dit $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

E5 Les suites $\big(\exp(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\exp(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

À retenir...
Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne peut appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(n) \neq 0$ et :

$$\frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(n+1)}{\exp(n)} = e \neq 1$$

Conclusion : les suites $\big(\exp(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\exp(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Trois choses importantes sur les équivalents :

1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent (autre que la valeur absolue et une puissance) !
3. Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise...
D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

Théorème 1 — Équivalents usuels

T1 Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ des réels et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ des réels tels que $b_0 < b_1 < \ldots < b_k$. Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 Si :

- ✓ à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas,
- ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$$

Autrement dit :

Une somme de puissances de n est équivalente, en $+\infty$, à son terme non nul de plus grand exposant.
Cas particulier : une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.

⋆ Démonstration :

T1. Supposons $a_k \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \ldots + 1$$

Or, pour tout $i \in [\![0; k-1]\!]$, $b_k - b_i > 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{n_k - b_i} = +\infty$.
Ainsi, par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \ldots + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = 1$, autrement dit $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \ldots + a_k n^{b_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2. Supposons qu'à partir d'un certain rang $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :
  - ⋆ on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$,

  donc par composition :

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1$$

  Conclusion : $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :
  - ⋆ on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$,
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$,

  donc par composition :

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1$$

  Conclusion : $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :
  - ⋆ on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$,
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$,

  donc par composition :

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^a - 1}{u_n} = a$$

  Conclusion : $(1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} a u_n$.

⋆

☞ Rappels...

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\forall a \in \mathbb{R}^*,\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

Méthode pour retrouver ces limites : les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions entre 0 et x...

Exemples 5

E1 Déterminons la limite de la suite de terme général $\dfrac{7n^6-3n^5+n^3-n^2+3}{3n^6+7n^2+1}$.

On a :

$$\frac{7n^6-3n^5+n^3-n^2+3}{3n^6+7n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7n^6}{3n^6}$$

Conclusion : $\dfrac{7n^6-3n^5+n^3-n^2+3}{3n^6+7n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^6-3n^5+n^3-n^2+3}{3n^6+7n^2+1} = \dfrac{7}{3}$.

E2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment proche de $+\infty$, on a $1+\dfrac{x}{n} > 0$.

Ainsi :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$$

Distinguons ensuite deux cas :

- Si $x = 0$:
  On a ainsi
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1$$
  D'où :
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1$$
- Si $x \neq 0$:
  On a :
  - ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{x}{n} \neq 0,$
  - ✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0.$

  Par conséquent :
  $$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$$
  Ainsi :
  $$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$$
  D'où :
  $$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$$
  Et donc, par continuité de l'exponentielle en x :
  $$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x)$$

Les deux cas se regroupent...

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

★ Classique ! ★
Tellement classique... En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

☞ Rappel...
La continuité d'une fonction, c'est ce qui permet de "faire passer la limite à l'intérieur".

III Application à l'étude des séries

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à terme général positif.

Important !
Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent. En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Théorème 2 — Critère de comparaison par inégalité sur les séries à termes généraux positifs

T1 $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right)$

T2 $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente}\right)$

Petite remarque
Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

★ **Démonstration :** Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

T1. Supposons : $\left\{\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente}\end{array}\right.$. Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

> **♣ L'idée !**
> On montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente en montrant, via le théorème de convergence monotone, que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= u_{n+1} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \leqslant v_k$$

D'où, en sommant de 0 à n :

$$U_n \leqslant V_n$$

Mais, de façon analogue au point précédent, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; et elle est convergente, puisque $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente. Par conséquent, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite, égale à $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.
Par transitivité, on obtient :

$$U_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

Conclusion : d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

> **♣ L'idée !**
> On montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente en montrant, via le théorème de comparaison sur les suites, que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

T2. Supposons : $\left\{\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente}\end{array}\right.$.

- On sait que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (comme **T1**).
Ainsi, par théorème de limite monotone, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite en $+\infty$.
Mais $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc également divergente.
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

- Mais, comme dans **T1** :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant V_n$$

Conclusion : par théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

> **Petite remarque**
> On pourrait aussi raisonner par l'absurde et supposer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Étant croissante, elle serait alors majorée par $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$... et on obtiendrait ainsi, par théorème de convergence monotone, la convergence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'où l'absurdité.

⋆

On en déduit les deux suivants :

Théorème 3 — Critère de comparaison par négligeabilité sur les séries à termes généraux positifs

T1 $\left.\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right)$

T2 $\left.\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente}\right)$

> **★ Classique ! ★**
> On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est une série de Riemann convergente.
> Autrement dit, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

⋆ Démonstration :

T1. Supposons $\left\{\begin{array}{l}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \\ \sum\limits_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente}\end{array}\right.$.

On sait que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

En particulier, avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant 1$.
D'où :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant |v_n|$$

Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.
Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

> **★Subtil...★**
> Je fais volontairement le choix de terminer de cette façon pour montrer que l'hypothèse de positivité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est en fait pas nécessaire (même chose pour T2)... Mais le théorème au programme est bien celui mentionné.

T2. De la même façon qu'en T1, on obtient :

$$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$$

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ également.
Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est divergente.

⋆

Théorème 4 — Critère de comparaison par équivalence sur les séries à termes généraux positifs

$$\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ ont même nature}\right)$$

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> En fait, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il suffit que (v_n) soit à termes positifs pour que (u_n) le soit à partir d'un certain rang...

⋆ **Démonstration** : Supposons $\left\{\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{array}\right.$.

- Supposons que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.

  On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (v_n)$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
  Ainsi :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon\right)$$

  En particulier, avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant 1$.
  D'où :

  $$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ 0 \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant 2$$

  Et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs :

  $$\forall n \in [\![N; +\infty[\![,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$$

  Or $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ est convergente.
  Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

- Par symétrie des rôles, on en déduit que si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ également.

On a ainsi établi :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est convergente}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente}\right)$$

D'où :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est divergente}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est divergente}\right)$$

Autrement dit, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ont même nature.

⋆

♣ Méthode 1 ♣

1. **Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:**
   - si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;
   - on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
   - sinon :
     - si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple),
     - si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent,
     - si le terme général de $\sum u_n$ est alterné :
       - étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ CV, alors $\sum u_n$ CV ;
       - revenir à la suite des sommes partielles et étudier sa nature par théorème de recouvrement.
   - Ou le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. **Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :**
   - on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
   - on regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes (en mettant par exemple eb place une comparaison série/intégrale comme dans QCl15).

Petite remarque

Les critères sont encore valables si les suites (u_n) et (v_n) ne sont à termes positifs *qu'à partir d'un certain rang.*

✘ Attention !

Si $\sum |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$!

Petite remarque

Il faut savoir redémontrer ce résultat !

Exemples 6

Déterminer la nature des séries suivantes :

E1 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right| = \dfrac{1}{n^3}$. Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$, donc elle est convergente.

Conclusion : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$ est absolument convergente donc convergente.

★ Classique ! ★

Et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$?

On peut établir sa convergence à l'aide de suites adjacentes... ou d'intégrales (QCl8).

E2 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$

On a :

✓ $\dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$,

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2n+7}{n^3+5n^2+3} \geqslant 0$, $\dfrac{2}{n^2} \geqslant 0$,

✓ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente et ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{n^2}$ également.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ est convergente, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$ également.

E3 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$

On a :

✓ par croissance comparée $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$,

✓ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les séries à termes généraux positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.