Les Chartreux

Exercices du chapitre 1

Rappels et compléments sur les suites et séries

Technique

Exercice 1 - ●○○○ - Recherche d'équivalents

Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 + 3n^2 - 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^5 - 3n^2 + 2}{n^8 + n^3 + 1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n^2 + 1)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n \ln(n) + n^2$
5. $\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ u_n = n \ln\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - 2$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1}\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$

Exercice 2 - ●○○○ - Convergence et somme de séries

Justifier la convergence et déterminer les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^{n-1}}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{3^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$

Exercice 3 - ●○○○ - Nature de séries

Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2 + 3n + 1}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n^3 - 3n + 2}{n^4 + 5n^2 + 3n + 1}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^3 + 3n + 1}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{2^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{3^n + n^2}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$

Exercice 4 - ●●○○

Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et démontrer que $\displaystyle\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \frac{e}{e-1}$.

Entraînement

Exercice 5 - ●●○○ - Vrai ou faux ?

1. Si deux suites ont même limite, alors elles sont équivalentes.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln(1 + u_n)$ ont même nature.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Si $\sum u_n$ est convergente, alors $\sum v_n$ également.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$. Si $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum u_n$ également.
5. Si $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
7. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$, alors il existe un réel $a \in [1; 2]$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{n}$.

Exercice 6 - ●○○○ - Une croissance comparée

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
3. En déduire : $n! = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(n^n)$.

Exercice 7 – ●●○○ – Suite récurrente d'ordre 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x+1}$, définie sur $[-1;+\infty[$ ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0;2]$ est stable par f.
2. Justifier que si un réel x est point fixe de f, alors nécessairement $x \geqslant 0$. Démontrer que f possède un unique point fixe et le déterminer. On notera r ce point fixe. Vérifier que $r \in [0;2]$.
3. 3.a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et bornée par 0 et r.
   3.b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire ?
   3.c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - r|$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
   3.d. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

Exercice 8 – ●○○○ – Suite récurrente d'ordre 1

Étudier l'existence de la limite et, le cas échéant la déterminer, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Exercice 9 – ●●○○ – Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + n + 1}$.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à termes strictement positifs.
3. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$. En déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
5. 5.a. Démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(u_n - \dfrac{1}{n}\right) = -1$.
   5.b. En déduire : $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 10 – ●●○○ – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.
4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n - \mathrm{e}^{-1}$.
5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Trouver alors un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de I_n.

Exercice 11 – ●●○○ – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = nI_n$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.
3. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$.
4. En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Concours

Exercice 12 – ●●○○ – ESC 2001 E

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $\forall x \in [0;1],\ f(x) = 2x\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. Donner le tableau de variations de f^{-1}.
2. Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha\mathrm{e}^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{array}\right.$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in]0;1]$.
4. 4.a. Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$; et qu'il y a égalité seulement pour $x = 0$.
   4.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   4.c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser la valeur de sa limite.
5. On se propose de déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   5.a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
   5.b. Établir alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$.
   5.c. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$. On note S sa somme. Établir : $\alpha \leqslant S \leqslant 2$.
   5.d. Démontrer finalement : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-S}}{2^n}$.

Exercice 13 - ●●○○ - EDHEC 2016 E

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}dt$.

1. Étude de f_n.
   1.a. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.
   Donner le sens de variation de f_n.
   1.b. En minorant $f_n(x)$, établir que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   1.c. En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n).
   2.a. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   2.b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. Écrire un programme dont l'exécution affiche un entier naturel n pour lequel $u_n - n \leqslant 10^{-4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$.
   4.a. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   4.b. Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.
   4.c. Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
   4.d. Déduire de l'encadrement obtenu en 2.b que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 14 - ●●○○ - EDHEC 1997 E

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. 1.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}_*^+$.
   1.b. En déduire, lorsque $n \in [\![3; +\infty[\![$, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ tels que $0 < u_n < n < v_n$.
2. A l'aide de la méthode de dichotomie, écrire une fonction **Python** telle que, pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, l'exécution de **approx_u(n)** renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près.
3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   3.a. Montrer que pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, $1 < u_n < e$.
   3.b. Montrer que pour tout $n \in [\![3; +\infty[\![$, $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   3.c. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   3.d. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$. En déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. Étude de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$.
   4.a. Justifier que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ diverge vers $+\infty$.
   4.b. Soit $n \in [\![3; +\infty[\![$. Calculer $f_n\big(n\ln(n)\big)$ puis montrer que $n\ln(n) < v_n$.
   4.c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 2\ln(n)$.
   4.d. En déduire : $\forall n \in [\![3; +\infty[\![,\ n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   4.e. Montrer enfin : $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 15 - ●●○○ - EDHEC 1998 E

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. **Résultats sur la fonction f.**

1.a. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

1.b. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.

1.c. Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt$.

1.d. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$ puis pour $n = 3$, établir l'encadrement : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

2. **Étude d'une suite.**

2.a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

2.b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 0 et 1.

2.c. A l'aide de la question 1.b, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis préciser sa limite.

2.d. En déduire la nature de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

2.e. En utilisant la question 1.d, démontrer : $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n^2.

3. **Étude d'une fonction définie par une intégrale.**

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

On note également g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt$.

3.a. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3.b. Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3.c. 3.c.i. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

3.c.ii. En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

3.d. 3.d.i. Établir : $\forall x \in]1; +\infty[,\ \displaystyle\int_1^x \varphi(t)dt \leqslant \ln(x)$.

3.d.ii. En déduire que g possède une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

3.e. 3.e.i. Pour tout réel strictement positif x, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

3.e.ii. Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

EXERCICE 16 – ●●●○ – TYPE ORAL

1. Question de cours. Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
2. Soit $x \in [0; +\infty[$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k + x}$. On notera $f(x)$ sa somme.
3. Calculer $f(0)$.
4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0; +\infty[$.
5. Établir : $\forall x \in [0; +\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$.
6. Déduire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
7. 7.a. Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{4}{3}|x - y|$.

7.b. En déduire que f est continue sur $[0; +\infty[$.