1

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Introduction...

On a bien compris (du moins, je l'espère) que la notion d'ensemble est au centre de l'étude des mathématiques. Un ensemble est une collection d'objets... Mais on voit bien que, dans sa généralité, cette notion est au mieux insuffisante, sinon peu manipulable. On préfère déjà les ensembles d'objets de même nature : ensemble de nombres, ensemble de fonctions, ensembles de matrices... sur lesquels on peut donc définir des opérations.

Une fois un ensemble d'objets de même nature constitué, on peut se demander quelle est sa *structure*. L'étude des structures algébriques mathématiques est essentielle pour identifier le type d'ensemble.
Plusieurs structures mathématiques existent, en voici trois parmi les plus courantes :

- Introduit en 1893 par Heinrich Weber (1842-1913, allemand) : le **groupe**. Un ensemble G est un groupe lorsqu'il est muni d'une **loi de composition interne** (une opération entre éléments), notée par exemple $\oplus$, et qui vérifie : G est stable par $\oplus$, la loi $\oplus$ est associative, il existe un neutre de $\oplus$ appartenant à G, et tout élément de G possède un *symétrique* par $\oplus$ dans G.
Sont des groupes : $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+)$, l'ensemble des applications bijectives de E dans E (muni de la composition)... Ne sont pas des groupes : $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{R},\times)$, $(\mathbb{R}^*,+)$...
Si de plus, $\oplus$ est commutative, on dit que G est un **groupe abélien**.
- Introduit en 1877 par Richard Dedekind (1831-1916, allemand) : le **corps**. Un ensemble $\mathbb{K}$ est un corps lorsqu'il est muni de deux lois de composition internes, notées par exemples $\oplus$ et $\star$, qui vérifient : $\mathbb{K}$ est stable par $\oplus$ et $\star$, $(\mathbb{K},\oplus)$ est un groupe abélien, $\bullet$ se distribue sur $\oplus$, $\star$ possède un neutre dans $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathbb{K}$ (excepté le neutre de $\oplus$) possède un *inverse* pour $\star$ dans $\mathbb{K}$.
$(\mathbb{Q},+,\times)$ et $(\mathbb{R},+,\times)$ sont des corps... Tous les autres ensembles usuels n'en sont pas !
- Manipulé depuis le milieu du XVIIème siècle en géométrie, c'est Giuseppe Peano (1858-1932, italien [c'est un peu le roi de l'axiomatisation]) qui donna une définition rigoureuse et axiomatique d'**espace vectoriel** en 1888. Cette structure a le bon goût d'être un bon compromis entre "facile à manipuler" et "de nombreux ensembles peuvent être vus comme des espaces vectoriels" ; rajoutons à cela qu'elle peut avoir une interprétation géométrique... on est face à une excellente structure algébrique !

Pour bien démarrer...

1. Définition d'une matrice inversible. Propriétés.
   Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - **Définition.** On dit que A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.
   - **Propriétés.**
     * A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
     * Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
     * Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.
     * Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Conditions suffisantes de non inversibilité d'une matrice.
   Soient $n \in [\![2;+\infty[\![$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Si A contient une ligne (ou colonne) nulle, alors A n'est pas inversible.
   - Si l'une des lignes (respectivement colonnes) de A est combinaison linéaire des autres lignes (respectivement colonnes), alors A n'est pas inversible.

3. Inversibilité des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant de A**, noté $\det(A)$, le réel défini par $\det(A) = ad - bc$.
   On a :
   $$A \text{ est inversible si, et seulement si, } \det(A) \neq 0.$$
   Et le cas échéant :
   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Inversibilité des matrices triangulaires.
   $$\begin{array}{lll} \text{une matrice triangulaire est inversible} & \text{si, et seulement si,} & \text{tous ses coefficients diagonaux sont non nuls} \\ & \text{si, et seulement si,} & \text{le produit de ses coefficients diagonaux est non nul} \end{array}$$

5. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{3,1}$.
   On a :
   $$\begin{aligned} AX = 0_{3,1} &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = -z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0_{3,1}$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Ce chapitre est une introduction aux espaces vectoriels. Il précède celui sur les *applications linéaires entre espaces vectoriels* qui donnera un tout autre sens aux matrices que nous connaissons déjà...

DÉFINITIONS 1 — **ESPACE VECTORIEL**

D1 Un ensemble non vide E est un **espace vectoriel réel** (ou $\mathbb{R}$**-espace vectoriel**) lorsque :

- E est muni d'une "addition interne", notée $+$, vérifiant :
  - ✓ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} \in E$ *(stabilité de E par addition interne)*
  - ✓ $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ *(associativité de $+$)*
  - ✓ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ *(commutativité de $+$)*
  - ✓ il existe un élément $\overrightarrow{0_E} \in E$ tel que : $\forall \vec{u} \in E,\ \vec{u}+\overrightarrow{0_E} = \vec{u}$ *(existence d'un neutre pour $+$)*
  - ✓ $\forall \vec{u} \in E,\ \exists \vec{v} \in E \ /\ \vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{0_E}$ *(existence d'un opposé dans E pour $+$)*
- E est muni d'une "multiplication externe", notée $\cdot$, vérifiant :
  - ✓ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda \cdot \vec{u} \in E$ *(stabilité de E par multiplication externe)*
  - ✓ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}$ *(associativité de $\cdot$)*
  - ✓ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ *(distributivité de $\cdot$ sur $+$)*
  - ✓ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ (\lambda+\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ *(distributivité de $\cdot$ sur addition réelle)*
  - ✓ $\forall \vec{u} \in E,\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ *(le réel 1 est neutre pour $\cdot$)*

D2 Si E est un espace vectoriel réel, alors les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, et on parle parfois de **scalaires** pour désigner les réels de la multiplication externe.

> ✎ **Notations**
> On omettra le symbole $\cdot$ pour la multiplication...

> **En gros...**
> Un espace vectoriel est un ensemble muni d'une addition interne et d'une multiplication scalaire qui ont les bonnes propriétés habituelles permettant les calculs !
> Puisque E est stable par $+$ et par $\cdot$, il est *stable par combinaison linéaire* :
> $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in E$
> Et si c'est vrai pour deux...

PROPRIÉTÉS 1

Soit E un espace vectoriel réel.

P1 Pour tout $\vec{u} \in E$, $\vec{u}$ admet un unique opposé, noté $-\vec{u}$

P2 L'élément neutre pour $+$ est unique, noté $\overrightarrow{0_E}$, appelé **vecteur nul de E.**

P3 $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda \cdot (-\vec{u}) = (-\lambda) \cdot \vec{u} = -(\lambda \cdot \vec{u})$

P4 $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ \left(\lambda \cdot \vec{u} = \overrightarrow{0_E} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{u} = \overrightarrow{0_E} \end{array} \right. \right)$

P5 $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in \mathbb{E}^n,\ \lambda_1\vec{u}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n \in E.$

DÉMONSTRATION : Assez immédiates...

EXEMPLES 1

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels réels :

E1 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et pus généralement $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, munis de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E2 $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et plus généralement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, munis de l'addition interne usuelle sur les matrices colonnes et de la multiplication scalaire.

E3 L'ensemble des matrices de tailles $n \times p$ à coefficients réels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E4 L'ensemble des matrices carrées de tailles n à coefficients réels $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E5 L'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels $\mathbb{R}[x]$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E6 L'ensemble des fonctions polynomiales de degré *inférieur ou égal* à n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $\mathbb{R}_n[x]$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E7 L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

E8 L'ensemble des fonctions définies, dérivables deux fois et telles que f'' est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, muni de l'addition interne usuelle et de la multiplication scalaire.

> ☞ **Rappel...**
> $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels.

> ☞ **Pour info...**
> E4 et E5 sont même un peu plus qu'un EV, puisque ces ensembles peuvent être munis d'une multiplication interne... Mais de façon générale, ce n'est pas le cas pour un EV.

> ✘ **Attention !**
> L'ensemble des fonctions polynomiales de degré égal à n n'est pas un espace vectoriel car : il ne contient pas la fonction polynomiale nulle, qui est le neutre pour l'addition.

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel, $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E.

I Sous-espaces vectoriels

I.1 Définition et généralités

Définition 2 — **Sous-espace vectoriel**

Un ensemble F est un **sous-espace vectoriel de** E lorsque :

- ✓ $F \subset E$
- ✓ F est non vide
- ✓ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$ *(F est stable par combinaison linéaire)*

Important !
En particulier $\overrightarrow{0_E} \in F$.
Cela sera utile dans deux cas :
• pour montrer que F est non vide
• parfois pour montrer qu'un sous-ensemble *n'est pas* un sous-espace vectoriel !

A quoi bon cette histoire de sous-espace vectoriel ? Pour la raison qui suit :

Propriété 2

Si F un sous-espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel.

⋆ Démonstration : … ⋆

♣ Méthode 1 ♣ Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel :
on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.

➠Réflexe !
Et c'est toujours ce que l'on fera !

Exemples 2

E1 $\{\overrightarrow{0_E}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E...

E2 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ AM = MA\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ✓ Par définition : $F \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- ✓ La matrice nulle commute avec A, donc $0_n \in F$: F est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in F$. Montrons que $\lambda M + \mu N \in F$.
  - ∗ On a déjà $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  - ∗ Ensuite :

$$\begin{aligned} A(\lambda M + \mu N) &= \lambda AM + \mu AN \\ &= \lambda MA + \mu NA \qquad M \in F, \text{ donc } AM = MA \text{ ; et } N \in F, \text{ donc } AN = NA \\ &= (\lambda M + \mu N)A \end{aligned}$$

  Par conséquent :
$$\lambda M + \mu N \in F$$

Rigueur !
Être dans F c'est deux choses : être une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et commuter avec A.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

E3 Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- ✓ Par définition : $F \subset \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.
- ✓ La fonction nulle appartient à F : F est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in F$.
  - ∗ On a déjà $f, g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  - ∗ Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)''(x) - 3(\lambda f + \mu g)'(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f'' + \mu g'')(x) - 3(\lambda f' + \mu g')(x) + 2(\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda f''(x) + \mu g''(x) - 3\lambda f'(x) - 3\mu g'(x) + 2\lambda f(x) + 2\mu g(x) \qquad \text{linéarité de l'évaluation en } x \\ &= \lambda\big(f''(x) - 3f'(x) + 2f(x)\big) + \mu\big(g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)\big) \\ &= 0 \qquad f, g \in F \end{aligned}$$

  Par conséquent :
$$\lambda f + \mu g \in F$$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (donc F est un espace vectoriel réel).

E4 L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x]\ /\ P(0) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$ car il ne contient pas la fonction polynomiale nulle.

E5 Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ ainsi que les droites passant par $(0,0)$.

E6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E. Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- ✓ Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $F \subset E$ et $G \subset E$. Donc $F \cap G \subset E$.
- ✓ Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, on a $\overrightarrow{0_E} \in F$ er $\overrightarrow{0_E} \in G$. Ainsi $\overrightarrow{0_E} \in F \cap G$: $F \cap G$ est non vide.
- ✓ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F \cap G$. Montrons que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F \cap G$.
  - ∗ On a déjà $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et E est un espace vectoriel, donc $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in E$.
  - ∗ De la même façon, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$ et $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in G$.

  Par conséquent :

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F \cap G$$

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

I.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Voyons un cas particulier de sous-espace vectoriel...

Définition 3 — **Combinaison linéaire**

Soit $\vec{u} \in E$. On dit que $\vec{u}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ lorsqu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\vec{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$.

Exemples 3

Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E1 Montrons que $U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de X et Y.

On remarque que :

$$U = 2Y - 5X$$

Conclusion : U est combinaison linéaire de X et Y.

♣ Méthode ! Soit on remarque une combinaison linéaire simple... Soit on résout $U = aX + bY$, d'inconnues $a, b \in \mathbb{R}$.

E2 Montrons que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de X et Y.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} V = aX + bY \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ b = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système ne possède aucune solution.

Conclusion : V n'est pas combinaison linéaire de X et Y.

E3 L'ensemble des combinaisons linéaires de X et Y est : $\left\{ \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ b \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Théorème 1

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

⋆ **Démonstration :**

Notons F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Autrement dit :

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

✓ Soit $\vec{u} \in F$. Il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$.

Puisque $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n \in E$ et que E est un espace vectoriel : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k \in E$. Autrement dit : $\vec{u} \in E$.

Par conséquent : $F \subset E$.

✓ On a $\overrightarrow{0_E} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times \vec{e}_k$. Ainsi $\overrightarrow{0_E} \in F$: F est non vide.

✓ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F$. Montrons que $a\vec{u} + b\vec{v} \in F$.

Puisque $\vec{u} \in F$, il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$.

Puisque $\vec{v} \in F$, il existe des réels $\mu_1, ..., \mu_n$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} a\vec{u} + b\vec{v} &= a\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k + b\sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a\lambda_k + b\mu_k)\vec{e}_k \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $a\lambda_k + b\mu_k \in \mathbb{R}$...
Par conséquent : $a\vec{u} + b\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$. Autrement dit :

$$a\vec{u} + b\vec{v} \in F$$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de E.

⋆

DÉFINITION 4 — SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR UNE FAMILLE DE VECTEURS

L'espace vectoriel des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$**, et noté $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

> **☞ Pour info...**
> On peut aisément démontrer que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

> **Cas particulier**
> Le sous-espace vectoriel engendré par un unique vecteur est l'ensemble de ses multiples.

♣ **MÉTHODE 2** ♣ **Pour démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E :**
on pourra tenter de l'écrire comme le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de E.

EXEMPLE 4

Considérons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

> **En gros...**
> Écrire un ensemble comme un ssev engendré équivaut à *expliciter* cet ensemble. S'il est déjà donné de façon explicite, il n'y a plus grand chose à faire...

PROPRIÉTÉS 3

Soient $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n+1}$ des vecteurs de E.

P1 Si $\vec{e}_{n+1}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_{n+1}) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.
En particulier : $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n, \overrightarrow{0_E}) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

P2 $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}^*$, $\text{Vect}(\alpha_1\vec{e}_1, \alpha_2\vec{e}_2, ..., \alpha_n\vec{e}_n) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

P3 $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n) = \text{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{e}_i \right)$.

⋆ DÉMONSTRATION : Pas très difficiles, ni très intéressantes...

⋆

L'intérêt de ces deux propriétés est de pouvoir "réduire" la famille de vecteurs qui *engendre* Vect(...).

Exemple 5

$$\left\{\begin{pmatrix}3x+2y\\x+2y+z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$
$$=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Il semble maintenant que l'on ne puisse plus simplifier la famille obtenue...

Remarque
L'ensemble étudié est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puisqu'il est l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

II Base et dimension

II.1 Famille libre, génératrice, base

Définitions 5

D1 On dit que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est une **famille génératrice de E** lorsque

$$\forall\vec{u}\in E,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ \vec{u}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{e}_k$$

Autrement dit : $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E lorsque $E=\mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$.

D2 On dit que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est une **famille libre de E** lorsque :

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n,\quad\left(\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\dots+\lambda_n\vec{e}_n=\overrightarrow{0_E}\quad\Longrightarrow\quad(\forall i\in[\![1;n]\!],\ \lambda_i=0)\right)$$

Autrement dit : $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est libre lorsque la seule combinaison linéaire donnant $\overrightarrow{0_E}$ est la combinaison linéaire triviale.
Si la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est libre, on dit que les vecteurs $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ sont **linéairement indépendants**.

Vocabulaire
Une famille qui n'est pas libre est **liée**. C'est le cas lorsqu'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des autres ; ou quand il existe une combinaison linéaire non triviale donnant le vecteur nul.

D3 On dit que la famille $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ est **une base de E** lorsque

$$\forall\vec{u}\in E,\ \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n\ /\ \vec{u}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{e}_k$$

Exemples 6

Commençons par donner (sans justifier) quelques bases usuelles :

E1 La famille $\big((1,0),(0,1)\big)$ est *une* base de $\mathbb{R}^2$.

✘ Attention !
On dit *une* base et pas *la* base, c'est la base !

E2 La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E3 La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

E4 La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Vocabulaire
Toutes les bases données ci-dessus sont **les bases canoniques** des EV mentionnés. Ce sont les bases *naturelles* dans lesquelles on travaille.

E5 La famille $(x\longmapsto 1, x\longmapsto x, x\longmapsto x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

E6 La famille $(x\longmapsto 1, x\longmapsto x,\dots,x\longmapsto x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

E7 Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Supposons $a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0_{2,1}$.

Or :

$$a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=0_{2,1}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}a-b=0\\2a+b=0\end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \quad \begin{cases} a - b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc : $a = b = 0$.

À retenir...
Deux vecteurs sont linéairement indépendants lorsqu'ils sont *non colinéaires*.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E8 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est-elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$?

On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{2,1}$$

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

E9 Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

À retenir...
Un famille de matrices colonnes dont les coefficients sont *échelonnés* est toujours libre.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$.

Or :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1} \iff \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc : $a = b = c = 0$.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

E10 Notons $f_1 : x \longmapsto 1$, $f_2 : x \longmapsto 1 + x$ et $f_3 : x \longmapsto 1 + x + x^2$.
Montrons que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$.
Autrement dit, on a :

Confusion d'objets !
Attention, il s'agit d'une égalité de fonctions !

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + a(1 + x) + b(1 + x + x^2) = 0$$

On a ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a + b + c + (b + c)x + cx^2 = 0$$

Autrement dit :

$$(a + b + c)e_0 + (b + c)e_1 + ce_2 = 0$$

Où $e_0 : x \longmapsto 1$, $e_1 : x \longmapsto x$ et $e_2 : x \longmapsto x^2$.
Or $\big(e_0, e_1, e_2\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, cette famille est donc en particulier libre.
Par conséquent :

$$a + b + c = 0 \ \ ; \ \ b + c = 0 \ \ ; \ \ c = 0$$

D'où immédiatement :

$$a = b = c = 0$$

À retenir...
Une famille de fonctions polynomiales échelonnées en degré est libre.

Conclusion : la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[x]$.

Des choses bien utiles :
- Une famille contenant le vecteur nul est liée.
- Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée.
- Une famille dont l'un des vecteurs est une combinaison linéaires des autres est liée.
- Une famille formée d'un seul vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est non nul.
- Une famille formée uniquement de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^n$ dont les coefficients sont échelonnés est libre.
- Une famille de fonctions polynomiales échelonnées en degré est libre.
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Les définitions précédentes impliquent naturellement la propriété suivante, qui sera très utile en pratique :

Propriété 4

Une famille de vecteurs de E est une base si, et seulement si, elle est libre **et** génératrice.

☞ **Pour info...**
En fait, il existe un théorème (HP) qui affirme que :
- de toute famille génératrice, on peut extraire une sous-famille libre et génératrice...
- toute famille libre peut être complétée en une famille libre et génératrice...

⋆ Démonstration : Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si, et seulement si, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre et génératrice de E.
Procédons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E.

- Montrons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E. Soit $\vec{u} \in E$. Puisque $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, il existe un unique n-uplet de réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $\vec{u} = \sum_{1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$.

  D'où le résultat...
  Conclusion : $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E.

- Montrons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k = \overrightarrow{0_E}$.

  Or a aussi $\overrightarrow{0_E} = \sum_{k=1}^{n} 0 \times \vec{e}_k$. Et la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, donc en particulier le vecteur nul de E se décompose de façon unique en combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.
  Par conséquent, les deux combinaisons linéaires exhibées sont identiques... D'où :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k = 0$$

  Conclusion : la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre et génératrice. Montrons :

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$$

Soit $\vec{u} \in E$.

- Puisque $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, que nous considérons ensuite, tel que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$.

- Supposons qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, que nous considérons ensuite, tel que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k$.

  Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k$$

  D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \vec{e}_k = \overrightarrow{0_E}$$

  Or la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre dans E, on obtient donc :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k - \mu_k = 0$$

  Autrement dit :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ \lambda_k = \mu_k$$

  D'où le résultat.

On a ainsi établi :

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$$

Conclusion : la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E. ⋆

♣ **Méthode !**
Pour démontrer l'unicité, deux méthodes :
- Par l'absurde : supposer qu'il en existe deux différents et aboutir à une absurdité.
- Supposer l'existence de deux, et montrer qu'ils sont égaux.

Remarques
- Le caractère "générateur" équivaut à l'existence d'une décomposition en combinaison linéaire.
- Le caractère "libre" équivaut à l'unicité (si existence) d'une décomposition en combinaison linéaire.

Exemples 7

E1 Donnons une base de l'espace vectoriel F étudié dans Exemple 4.

On avait obtenu :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$ est :

- ✓ génératrice de F par définition,
- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 4\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{3,1}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminons-en une base.

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in F \quad & \iff \quad AX = 0_{3,1} \\
& \iff \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \\ x \quad\quad + \ z = 0 \end{cases} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \quad \begin{cases} x + \ y + 2z = 0 \\ \quad - 2y - 2z = 0 \\ \quad - \ y - \ z = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \quad - y - \ z = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x + y \quad = -2z \\ \quad y \quad = -z \\ \quad\quad z = z \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = \ z \end{cases} \\
& \iff \quad X = z \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ z \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

De surcroît, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de F qui est :

- ✓ génératrice de F par définition,
- ✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

Propriété 5

Si $\mathscr{F}_l$ est une famille libre de E et $\mathscr{F}_g$ est une famille génératrice de E, alors $\text{Card}(\mathscr{F}_l) \leqslant \text{Card}(\mathscr{F}_g)$.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une famille libre $\mathscr{F}_l$ et une famille génératrice $\mathscr{F}_g$ de E telles $\text{Card}(\mathscr{F}_l) > \text{Card}(\mathscr{F}_g)$. Notons $n = \text{Card}(\mathscr{F}_l)$ et $m = \text{Card}(\mathscr{F}_g)$ ainsi que $\mathscr{F}_l = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ et $\mathscr{F}_g = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$.

- Puisque $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est génératrice de E et que $\vec{e}_1 \in E$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_n \vec{f}_n$.
  Au moins un de ces λ_i est non nul, sinon on aurait $\vec{e}_1 = \overrightarrow{0_E}$ et la famille $\mathscr{F}_l$ ne serait alors pas libre.
  Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathscr{F}_g$, supposons que $\lambda_n \neq 0$.
  On obtient alors :
  $$\vec{f}_n = \frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\vec{f}_{n-1} - \vec{e}_1)$$
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n) \\ &= \text{Vect}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}, \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\vec{f}_{n-1} - \vec{e}_1) \\ &= \text{Vect}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}, \vec{e}_1) \end{aligned}$$
  La famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1}, \vec{e}_1)$ est donc génératrice de E.
- De la même façon, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ et μ_1, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{e}_2 = \lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\vec{f}_{n-1} + \mu_1 \vec{e}_1$.
  Au moins un des λ_i est non nul, sinon $\vec{e}_2$ serait multiple de $\vec{e}_1$ et donc la famille $\mathscr{F}_l$ ne serait pas libre...
  En procédant comme ci-dessus, on obtient finalement (quitte à réordonner les vecteurs de $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-1})$) que la famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{n-2}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est génératrice de E.
- On poursuit ainsi...

Au bout de n étapes de ce raisonnement, on obtient que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E.
Par conséquent, le vecteur $\vec{e}_{n+1}$, qui existe bien car $m > n+1$, s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$: contredit la liberté de la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$.
Conclusion : $\text{Card}(\mathscr{F}_l) \leqslant \text{Card}(\mathscr{F}_g)$. [1]

Remarque
On pourrait démontrer par récurrence finie que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, E est engendré par k vecteurs de $\mathscr{F}_g$ et $n-k$ vecteurs de $\mathscr{F}_l$...

[1] Merci à Christophe Bertault pour la démonstration !

II.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 6 — **EV de dimension finie**

On dit que E est de **dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Remarque
En ECG - Mathématiques appliquées, l'algèbre linéaire se limite au cas des EV de dimension finie.

Théorème 2

Si E admet une base de cardinal fini, alors toutes ses bases sont de cardinal fini et de même cardinal.

☞ Pour info...
Tout EV de dimension finie possède une infinité de bases...

Démonstration : Supposons que E est de dimension finie.

- Puisque E est de dimension finie, E possède une famille génératrice de cardinal fini, noté n. Par conséquent, d'après Propriété 5, toutes les familles libres de E sont de cardinal inférieur ou égal à n.
  Puisque les bases de E sont en particulier des familles libres, toutes les bases de E sont de cardinal fini, car de cardinal inférieur ou égal à n.
  Conclusion : toutes les bases de E sont de cardinal fini.
- Considérons maintenant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
  Puisque $\mathscr{B}$ est libre et que $\mathscr{B}'$ est génératrice, on a, d'après Propriété 5 :
  $$\text{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \text{Card}(\mathscr{B}')$$
  Mais $\mathscr{B}$ est génératrice et $\mathscr{B}'$ est libre, donc de la même façon :
  $$\text{Card}(\mathscr{B}') \leqslant \text{Card}(\mathscr{B})$$
  Par conséquent :
  $$\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}(B')$$
  Conclusion : toutes les bases de E ont même cardinal.

Ce théorème nous permet de donner la définition suivante :

DÉFINITION 7 — **DIMENSION D'UN EV**

Si E est de dimension finie, on appelle **dimension de E**, notée $\dim(E)$, le cardinal commun de toutes ses bases.

EXEMPLES 8

- **E1** $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ et $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$.
- **E2** $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) = n$
- **E3** $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right) = n^2$ et $\dim\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\right) = np$
- **E4** $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right) = 3$ et $\dim\left(\mathbb{R}_n[x]\right) = n+1$
- **E5** Sont des espaces vectoriels de dimension infinie : $\mathbb{R}[x]$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$...

À retenir... Les bases canoniques et les dimensions des espaces vectoriels usuels doivent être parfaitement connues !

On a les propriétés suivantes souvent utiles :

PROPRIÉTÉS 6

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-ensemble de E et $\mathscr{F}$ une famille de E.

- **P1** Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si, et seulement si, $F = E$.
- **P2** Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$.
- **P3** Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \dim(E)$.

⋆ DÉMONSTRATION :

P1. Me paraît non accessible (rapidement) avec nos outils en Mathématiques appliquées (possible en Mathématiques Approfondies).

P2. Supposons que $\mathscr{F}$ est une famille libre de E. Considérons $\mathscr{B}$ une base de E. Puisque $\mathscr{B}$ est génératrice de E, d'après Propriété 5 : $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{B})$. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$... D'où le résultat.

P3. Supposons que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E. Considérons $\mathscr{B}$ une base de E. Puisque $\mathscr{B}$ est une famille libre de E, d'après Propriété 5 : $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \mathrm{Card}(\mathscr{B})$. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$... D'où le résultat.

⋆

Et une dernière propriété, très utile en pratique :

PROPRIÉTÉS 7

- **P1** Si E est de dimension finie, alors : une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, elle est libre **et** que son cardinal est égal à la dimension de E.
- **P2** Si E est de dimension finie, alors : une famille de vecteurs est une base de E si, et seulement si, elle est génératrice de E **et** que son cardinal est égal à la dimension de E.

En gros... Une base est une famille libre maximale ou une famille génératrice minimale...

⋆ DÉMONSTRATION : Les implications directes sont immédiates, les implications réciproques ne sont pas accessibles facilement (nécessitent le théorème de la base incomplète, vu en Mathématiques Approfondies).

⋆

♣ MÉTHODE 3 ♣ **Pour montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel,** trois méthodes sont possibles :

1. montrer qu'elle est libre et génératrice ;
2. montrer qu'elle est libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question ;
3. montrer qu'elle est génératrice et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel en question.

À retenir... Quand on connaît la dimension de l'espace vectoriel étudié, on met presque toujours en place la seconde méthode !

EXEMPLES 9

E1 Montrons que la famille $\big((1,2),(-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La famille $\big((1,2),(-1,1)\big)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est :

- ✓ libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires,
- ✓ de cardinal 2, égal à $\dim(\mathbb{R}^2)$.

Conclusion : la famille $\big((1,2),(-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

E2 Montrons que la famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

La famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est :

✓ libre car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré,

✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$.

Conclusion : la famille $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

II.3 Coordonnées des vecteurs dans une base

Définitions 8 — **Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice des coordonnées**

Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, ...\vec{e}_n)$ une base de E et $\vec{u} \in E$. Il existe alors un unique uplet $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k$.

D1 Le n-uplet $(u_1, ..., u_n)$ est appelé **n-uplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.**

D2 On note appelle **matrice représentative de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$** (ou **matrice des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$**) la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$, définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Théorème 3 — **(Isomorphisme de représentation)**

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E.

T1 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v})$

T2 $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! \vec{u} \in E \ /\ X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$

> **☞ Pour info...**
> Après avoir vu le chapitre sur les applications linéaires, nous pourrons dire que l'application
> $$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \vec{u} & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) \end{array} \right.$$
> est un isomorphisme.

★ Démonstration : Notons $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

P1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in E$.
Puisque $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E, il existe des uniques n-uplets $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, que nous considérons ensuite, tels que

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k \quad ; \quad \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} &= \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k + \mu \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) \vec{e}_k \end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coordonnées du vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n + \mu v_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v})$$

> **Important !**
> On a au passage une information naturelle mais non moins importante : si $u_1, ..., u_n$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ et $v_1, ..., v_n$ celles de $\vec{v}$, alors $\lambda u_1 + \mu u_2, ..., \lambda u_n + \mu v_n$ sont celles de $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

P2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- **Existence.** Posons $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$.
  Ainsi : $\vec{u} \in E$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = X$. D'où l'existence.
- **Unicité.** Supposons qu'il existe $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = X$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{v}) = X$.
  Par conséquent, en notant $(u_1, ..., u_n)$ et $(v_1, ..., v_n)$ les n-uplets respectifs des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ u_k = v_k$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} v_k \vec{e}_k$$

Autrement dit :

$$\vec{u} = \vec{v}$$

D'où l'unicité.

$\star$

Exemples 10

E1 Notons $\vec{u} = (1,2) \in \mathbb{R}^2$.

- La matrice des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; autrement dit $\mathrm{Mat}_{bc}(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
  En effet :
  $$(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$$
- Nous avons vu, Exemples 9 - E1, que $\big((1,2),(-1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, que nous notons $\mathscr{B}$, la matrice des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; autrement dit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
  En effet :
  $$(1,2) = 1(1,2) + 0(-1,1)$$

E2 Notons $\mathscr{B} = \big(x \longmapsto 1, x \longmapsto 1+x, x \longmapsto 1+x+x^2\big)$. On a vu, dans Exemples 9 - E2, que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

On sait, d'après Théorème 3 - T2, qu'il existe une unique fonction $P \in \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Cette fonction est en fait la fonction

$$P : x \longmapsto 1 \times 1 - 1 \times (1+x) + 2 \times (1+x+x^2)$$

L'unique fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_2[x]$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est $P : x \longmapsto 2 + x + x^2$.

✘ Attention !
Attention à l'ordre des vecteurs dans une base !

Remarque
Cette même fonction admet comme matrice de coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ la matrice $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

III Rang d'une famille de vecteurs

Définition 9 — **Rang d'une famille de vecteurs**

Le **rang de la famille** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, noté $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, est la dimension de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

✓ Rigueur !
Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice finie de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, cette notion a bien du sens !

Propriétés 8

P1 Si E est de dimension finie p, alors $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \leqslant \min(n,p)$.

P2 $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = n$ si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre.

En gros...
Le rang d'une famille de vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendants qu'elle contient.

$\star$ Démonstration :

P1. Supposons que E est de dimension finie p. Notons $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

- Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, on obtient, d'après Propriété 6 - P1, que F est de dimension finie et :
  $$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$
  Autrement dit :
  $$\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \leqslant p$$
- Ensuite, par définition, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de F. D'où, d'après Propriété 6 - P3 :
  $$\mathrm{Card}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \geqslant \dim(F)$$
  Autrement dit :
  $$n \geqslant \mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \leqslant \min(n,p)$.

À retenir...
$$x \leqslant \min(n,p) \iff \begin{cases} x \leqslant p \\ \text{ET} \\ x \leqslant n \end{cases}$$

P2. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = n$. Autrement dit, $\dim\left(\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\right) = n$.
Par conséquent, la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est :

- ✓ génératrice de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ par définition,
- ✓ de cardinal égal à $\dim\left(\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\right)$.

La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est donc une base de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et est donc, en particulier, libre.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre. Étant aussi génératrice de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ par définition, la famille $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et ainsi :

$$\dim\left(\mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\right) = \mathrm{Card}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

Autrement dit :

$$\mathrm{rg}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = n$$

⋆

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs,** on cherche à la **réduire** (en utilisant les propriétés 3) jusqu'à la rendre libre...

Exemple 11

Déterminons le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) &= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ est libre car seulement constituée de deux vecteurs non colinéaires

IV Rappels et compléments sur l'inversibilité de matrices

Définition 10 — **Matrice inversible**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.
Une telle matrice B est appelée **inverse de A.**

Propriété 9 — **Unicité de l'inverse**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A est inversible, alors elle admet une unique matrice inverse.

✎ **Notations**
Maintenant que l'on sait que cette matrice inverse est unique, on peut lui attribuer une notation : A^{-1}, c'est bien !

⋆ Démonstration : Supposons que A est inversible. Considérons B et C deux inverses de A. On a alors : $AB = BA = AC = CA = I_n$. Montrons que $B = C$.
On a :

$$AB = AC$$

D'où :

$$BAB = BAC$$

Mais $BA = I_n$, donc :

$$I_nB = I_nC$$

Autrement dit :

$$B = C$$

Conclusion : A ne possède qu'une seule matrice inverse.

⋆

PROPRIÉTÉ 10 — **INVERSIBILITÉ DE LA TRANSPOSÉE**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si, et seulement si, la matrice ${}^tA$ est inversible. Le cas échéant : $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

DÉMONSTRATION : Par double implication...

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned} {}^tA \times {}^t\left(A^{-1}\right) &= {}^t\left(A^{-1}A\right) \\ &= {}^tI_n \\ &= I_n \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} {}^t\left(A^{-1}\right) \times {}^tA &= {}^t\left(AA^{-1}\right) \\ &= {}^tI_n \\ &= I_n \end{aligned}$$

Par conséquent : ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On procède de la même façon, ou alors on utilise $\boxed{\Longrightarrow}$ avec $B = {}^tA$...

PROPRIÉTÉ 11 — **CARACTÉRISATIONS DE L'INVERSIBILITÉ D'UNE MATRICE**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) A est inversible
(b) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; AB = I_n$
(c) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;/\; BA = I_n$
(d) la famille des colonnes de A est une base de de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
(e) la famille des lignes de A est une base de $\mathbb{R}^n$
(f) pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède une unique solution
(g) pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, possède au moins une solution
(h) le système linéaire $AX = 0_{n,1}$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, admet $0_{n,1}$ comme unique solution

DÉMONSTRATION :

- On a déjà de façon immédiate :
  - $(a) \Longrightarrow (b)$
  - $(a) \Longrightarrow (c)$
  - $(f) \Longrightarrow (g)$
  - $(f) \Longrightarrow (h)$

Ensuite, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, remarquons que si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$AX = x_1C_1 + \dots + x_nC_n$$

- Pour $(f) \Longleftrightarrow (d)$:

$$\begin{aligned} (f) &\Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; Y = AX \\ &\Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; Y = x_1C_1 + \dots + x_nC_n \\ &\Longleftrightarrow (d) \end{aligned}$$

définition d'une base

- Pour $(g) \Longleftrightarrow (d)$:

$$\begin{aligned} (g) &\Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;/\; Y = AX \\ &\Longleftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \exists(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; Y = x_1C_1 + \dots + x_nC_n \\ &\Longleftrightarrow \left(\text{la famille } (C_1, \dots, C_n) \text{ est génératrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) \\ &\Longleftrightarrow (d) \end{aligned}$$

définition d'une famille génératrice

$(C_1, \dots, C_n)$ est de cardinal n et Propriétés 7 - P2

- Pour $(h) \iff (d)$:

$$\begin{aligned}(h) &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (AX = 0_{n,1} \iff X = 0_{n,1}) \\ &\iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (x_1 C_1 + \dots + x_n C_n = 0_{n,1} \iff x_1 = \dots = x_n = 0) \\ &\iff \big(\text{la famille } (C_1, \dots, C_n) \text{ est libre}\big) && \text{définition de famille libre} \\ &\iff (d) && (C_1, \dots, C_n) \text{ est de cardinal } n \text{ et Propriétés 7 - P1}\end{aligned}$$

- Pour $(a) \iff (f)$: Par double implication...

  $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible.
  Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

  Le système $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ possède donc une unique solution.

  $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système $AX = Y$ admet une unique solution.
  L'objectif est de montrer qu'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$. On veut donc pouvoir passer d'un résultat général sur les colonnes ($AX = Y$) à un résultat particulier sur les matrices ($AB = I_n$).

  × Puisque pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = Y$ possède une unique solution ; en particulier, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, si Y_i désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice I_n, alors le système $AX = Y_i$ possède une unique solution, notée B_i. En posant B la matrice dont les colonnes sont $B_1, B_2, \dots, B_n$, alors on a bien $AB = I_n$.

  × A-t-on $BA = I_n$?
  Notons $C'_1, \dots, C'_n$ les colonnes de BA. Puisque $ABA = I_n A = A$, on a :

$$\forall i \in [\![2; n]\!],\ AC'_i = C_i$$

  Or, par hypothèse, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, le système linéaire $AX = C_i$ possède une unique solution. Mais la i-ème matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (colonne nulle avec un seul 1 en i-ème ligne) en est solution c'est donc la seule. Par conséquent : $\forall i \in [\![1; n]\!],\ C'_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ème ligne}$. D'où :

$$BA = I_n$$

  Par conséquent, A est inversible.

Important !
A ce stade, on a établi :
$(a) \iff (d) \iff (f) \iff (g) \iff (h)$

- Pour $(a) \iff (e)$:
  On a :

$$\begin{aligned}(a) &\iff \big({}^t\!A \text{ est inversible}\big) \\ &\iff \big(\text{la famille des colonnes de } {}^t\!A \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big) && \text{on a démontré } (a) \iff (d)\text{, appliquée à } {}^t\!A \\ &\iff (e)\end{aligned}$$

- Pour $(b) \implies (g)$:
  Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que nous considérons ensuite, telle que $AB = I_n$.
  Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Remarquons que $A(BY) = ABY = Y$, donc BY est solution de l'équation $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'où (g).

Important !
On vient d'établir $(b) \implies (g)$, mais $(g) \implies (a)$, donc $(b) \implies (a)$. Et comme on avait déjà $(a) \implies (b)$, on obtient $(a) \iff (b)$.

- Pour $(c) \implies (h)$:
  Supposons l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que nous considérons ensuite, telle que $BA = I_n$.
  - On sait déjà que $0_{n,1}$ est solution de $AX = 0_{n,1}$.
  - Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Supposons que $AX = 0_{n,1}$. Ainsi :

$$B(AX) = B \times 0_{n,1}$$

  Autrement dit :

$$BAX = 0_{n,1}$$

  Or $BA = I_n$. D'où :

$$X = 0_{n,1}$$

  Par conséquent : le système linéaire $AX = 0_{n,1}$ possède une unique solution, d'où (h).

Important !
On vient d'établir $(c) \implies (h)$, mais $(h) \implies (a)$, donc $(c) \implies (a)$. Et comme on avait déjà $(a) \implies (c)$, on obtient $(a) \iff (c)$.