Exercices du chapitre 1
Espaces vectoriels

Technique

Exercice 1 - ●○○ - Pas des sous-espaces vectoriels !

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\right\}$
2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ y = x^2 \right\}$
3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = 0_n\right\}$

Exercice 2 - ●●○ - Sous-espaces vectoriels

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMA = 0_n\right\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $F_\lambda = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\right\}$. Démontrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4. Notons E l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers 0.
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 - ●○○ - Manipulation sur des combinaisons linéaires

On considère les matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2.
2. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2.
3. En déduire que $\mathrm{Vect}(X_1, X_2) = \mathrm{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$?

Exercice 4 - ●●○

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\right\}$
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{n,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\right\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & b & b \\ 0 & a - b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 5 – ●●○

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous, et préciser celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Entraînement

Exercice 6 – ●○○

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad ; \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base ainsi que la dimension.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J, puis établir que $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
3. En déduire que la famille (I, A, A^2) est une base de F.
4. Déterminer la matrice des coordonnées de J dans la base (I, A, A^2).

Exercice 7 – ●○○

Soient $J = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ JMJ = M\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 8 – ●●○ – EV de fonctions polynomiales

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - xP'(x) = 0\}$.

Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice 9 – ●●○ – EV de fonctions polynomiales (bis)

On note $u : x \longmapsto x^2$.

1. Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x, x \longmapsto x(x-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.
3. Démontrer que la famille $\big(x \longmapsto 1, x \longmapsto x+1, x \longmapsto (x+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.

Exercice 10 – ●●○ – Famille de fonctions ou de suites

1. Posons $f_1 : x \longmapsto e^x$, $f_2 : x \longmapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \longmapsto e^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - 1.a. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).
   - 1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?
2. Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réels.
   - 2.a. Démontrer que la famille (u, v) est une famille libre de E.
   - 2.b. Notons $F = \big\{w \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\big\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 11 – ●●○ – Matrices symétriques et antisymétriques

On rappelle que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa **transposée** définie par : ${}^tM = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$. Soient les ensembles :

- $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *symétriques*
- $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.

2. Donner une décomposition de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. 3.a. Déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
   3.b. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, alors cette décomposition est unique.
4. Établir que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 12 - ●●● - Matrices symétriques et antisymétriques (le retour)

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ ainsi que les ensembles :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *symétriques*
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \ / \ M = S + A$$

Concours

Exercice 13 - ●●○ - Classique !

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\right\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   3.a. Vérifier que $AV \in \mathrm{Vect}(U, V)$.
   3.b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   3.c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   4.a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   4.b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\right\}$.
   5.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   5.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$

   5.c. Démontrer que $\left\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\right\} = \mathrm{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   5.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.
   6.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   6.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$

   6.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   6.d. En déduire, à l'aide de la question 5.c., les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
   6.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.