



2

ANALYSE

ÉQUIVALENCE ET NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES

INTRODUCTION...

Lorsque l'on parle de *comportement asymptotique* d'une suite, la première idée à avoir est l'étude de l'existence et, le cas échéant, la recherche de la limite de cette suite. Il s'agit en effet du premier élément à étudier. Mais ce qui nous intéresse ensuite, c'est la *vitesse* à laquelle la suite tend vers cette limite. Autant il semble relativement simple de répondre à cette question dans le cas des suites dont on connaît le terme général ; autant cela sera nettement plus délicat pour les suites récurrentes ou les suites implicites.

L'idéal quand on souhaite étudier précisément une suite est d'en obtenir un *développement asymptotique* : en gros, une somme de suites simples ayant des comportements de plus en plus précis, dont la suite étudiée serait très proche. Cette notion n'est pas au programme, même si nous pourrions rencontrer des recherches de tels développements en exercices. Nous nous limiterons donc bien souvent au premier terme de ce développement asymptotique : un *équivalent* de la suite.

L'objectif de ce chapitre est d'affiner l'étude du comportement asymptotique des suites en voyant deux notions qui seront essentiellement illustrées sur des suites dont le terme général est connu, puis d'en voir une application dans l'étude des séries. Dans les cas où le terme général de la suite étudiée n'est pas connu, l'exercice guidera.

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une suite ?
2. Définition quantifiée de suite convergente, de suite divergente vers $+\infty$.
3. Définition de suites adjacentes. Conséquence ?
4. Définition de convergence d'une série. Condition nécessaire de convergence, est-elle suffisante ? Convergence absolue, lien avec la convergence.
5. Séries usuelles.

Dans tout le chapitre, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seront des suites de réels définies sur \mathbb{N} .
Tous les résultats du chapitre sont encore valables si les suites en jeu ne sont définies qu'à partir d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

I NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES

DÉFINITION 1

NÉGLIGEABILITÉ DE SUITES

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

ES Pour info...

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$,
- ✓ $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n$.

NOTATIONS

DE LANDAU

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas.

N1 On note $o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ l'ensemble des suites négligeables devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.

N2 Par abus, on écrira $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ au lieu de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.
On lira "u_n est un petit o de v_n quand n tend vers +∞".

Un peu d'histoire

Edmund Landau (1877-1938, allemand) a concentré son travail sur la théorie des nombres ; il a, entre autres, fourni une démonstration du théorème des nombres premiers plus simple que celles alors connues. Il a également popularisé les notations o et \sim vues dans ce chapitre.

Remarque

Dans l'écriture " $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ", le n est muet.

EXEMPLES 1

E1 $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^2)$, $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$,...

E2 $\frac{1}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$

E3 par croissances comparées : $\left(\frac{1}{2}\right)^n = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$:
Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$:
Dans ce cas, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ si, et seulement si
3. $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(1)$ si, et seulement si

En gros...

"Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

PROPRIÉTÉS 1

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annulent pas.

P1 $\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \implies \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u_n + \mu u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ (linéarité)

P2 $\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ (transitivité)

P3 $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \implies u_n w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n w_n)$

P4 $\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v'_n) \end{array} \right\} \implies u_n u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n v'_n)$

P5 $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\lambda v_n)$

P6 Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \implies \frac{1}{v_n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)$

♥ L'avis du chef ! ♥

Des démonstrations basiques et assez répétitives mais qui permettent de s'entraîner sur la structure de rédaction et de s'assurer que les concepts élémentaires sont maîtrisés.

* DÉMONSTRATION :

P1. Supposons $\left\{ \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right.$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = \lambda \frac{u_n}{v_n} + \mu \frac{u'_n}{v_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$; et $u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \frac{u_n}{v_n} + \mu \frac{u'_n}{v_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda u_n + \mu u'_n}{v_n} = 0$, autrement dit, $\lambda u_n + \mu u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

P2. Supposons $\begin{cases} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$; et $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$, autrement dit, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$.

P3. Supposons $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n w_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n w_n}{v_n w_n} = 0$, autrement dit, $u_n w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n w_n)$.

P4. Supposons $\begin{cases} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v'_n) \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$; et $u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v'_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 0$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 0$, autrement dit, $u_n u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n v'_n)$.

P5. Supposons $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{\lambda v_n} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$...

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\lambda v_n} = 0$, autrement dit, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\lambda v_n)$.

P6. Supposons qu'à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = \frac{u_n}{v_n}$$

Or $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$...

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}} = 0$, autrement dit, $\frac{1}{v_n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

EXEMPLES 2

E1 On a : $n^2 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$, $n = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ et $1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$. D'où : $n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

E2 $n^4 + n^2 + 2n + 1 = o_{n \rightarrow +\infty}(n^3) = n^4 + o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$.

*** Attention !**

On rappelle que " $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ " est un abus de notation : " $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ " n'est pas une égalité comme on la connaît. En particulier :

$$\left. \begin{array}{l} u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \Rightarrow u_n = u'_n$$

En effet, puisque $n^2 + 2n + 1$ est négligeable devant n^3 en $+\infty$, l'expression $n^4 + n^2 + 2n + 1 + o_{n \rightarrow +\infty}(n^3)$ est en fait égale à n^4 + la somme de deux quantités négligeables devant n^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(n)^a = o_{n \rightarrow +\infty}(n^b)$$

$$\forall b \in \mathbb{R}^{+*}, \forall q \in]1; +\infty[, n^b = o_{n \rightarrow +\infty}(q^n)$$

$$\forall q \in]1; +\infty[, q^n = o_{n \rightarrow +\infty}(n!)$$

$$n! = o_{n \rightarrow +\infty}(n^n)$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \forall q \in]1; +\infty[, \ln(n)^a \ll n^b \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

Vocabulaire

Le symbole " \ll " se lisant alors "est négligeable devant".

E4 Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$, donc : $\frac{\ln(n)}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

E5 Par croissances comparées, on a $\ln(n) = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ et $e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc : $\ln(n)e^{-n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Parfois, on écrira $u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$ qui se lit " u_n égale v_n + un petit o de w_n ". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une suite (h_n) , négligeable devant (w_n) , telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + h_n$.

II ÉQUIVALENCE DE SUITES

DÉFINITION 2

ÉQUIVALENCE DE SUITES

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas. On dit que **la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Dans ce cas, on écrira : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

ES Pour info...

De façon générale, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$,
- ✓ $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n = \alpha_n v_n$.

EXEMPLES 3

E1 $n^2 + 2n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$

E2 $\sqrt{2n^2 - 5n + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}n$

E3 par croissances comparées : $e^n + n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$

E4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq u_n \leq 2n$. Donnons un équivalent de $\ln(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

★ Classique ! ★

Il est fréquent d'obtenir un équivalent à l'aide d'un encadrement...

Trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équivalente à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$ c'est trouver une suite qui a le même comportement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$. Le but étant de trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont l'expression est plus simple que celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$...

À retenir...

On ne cherche des équivalents que de suites dont le terme général contient des sommes ou dont on ne connaît pas le terme général.

PROPRIÉTÉS 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cinq suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

P1 $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ (réflexivité)

P2 $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ (symétrie)

P3 $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{array} \right\} \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ (transitivité)

P4 $\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

P5 $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell \right)$

P6 $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n$ (compatibilité avec le produit)

En particulier : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda v_n$.

P7 $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{array} \right\} \implies \frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}$ (compatibilité avec le quotient)

P8 $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \forall m \in \mathbb{N}, u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m$ (compatibilité avec la puissance)

P9 $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont strictement positives à partir d'un certain rang} \end{array} \right\} \implies \forall a \in \mathbb{R}, u_n^a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^a$ (compatibilité avec la puissance)

P10 $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$ (compatibilité avec la valeur absolue)

P11 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors, à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même signe.

P12 Trois choses souvent utiles : (liens \sim et o)

P12.a $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n) \end{array} \right\} \implies u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(w_n)$

P12.b $\left. \begin{array}{l} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \end{array} \right\} \implies u_n + u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

P12.c $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n) \iff u_n = v_n + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n)$

* DÉMONSTRATION :

P1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{u_n} = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_n} = 1$, autrement dit $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

P2. Procédons par double implication.

\implies Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ puis

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}} = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, autrement dit $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

\impliedby De même, en échangeant u_n et v_n .

Important !

On peut donc dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Pour info...

Une relation entre deux objets d'un même ensemble qui est réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence. C'est le cas de $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ sur l'ensemble des suites réelles; mais également de \iff sur l'ensemble des assertions mathématiques.

Remarque

En particulier :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \implies \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$$

Attention !

L'exposant de la puissance ne doit pas dépendre de la variable !

Remarque

Si on utilise P11, on voit qu'une seule des deux hypothèses de stricte positivité suffit en pratique...

P3. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$. D'où, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$, autrement dit, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (w_n)$.

P4. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$u_n = \frac{u_n}{v_n} \times v_n$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Conclusion : par opération, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

P5. Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Puisque $\ell \neq 0$, on a par opération : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$.

Conclusion : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$.

P6. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v'_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{u'_n}{v'_n} = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n u'_n}{v_n v'_n} = 1$, autrement dit $u_n u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n v'_n$.

P7. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u'_n \neq 0$, $v_n \neq 0$ et $v'_n \neq 0$ puis

$$\frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v'_n$, donc d'après P2 $v'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u'_n$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v'_n}{u'_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v'_n}{u'_n} = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_n}{u'_n}}{\frac{v_n}{v'_n}} = 1$, autrement dit $\frac{u_n}{u'_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{v'_n}$.

P8. Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Soit $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$, donc $v_n^m \neq 0$ et

$$\frac{u_n^m}{v_n^m} = \left(\frac{u_n}{v_n} \right)^m$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. D'où, par opération :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)^m = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^m}{v_n^m} = 1$, autrement dit $u_n^m \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^m$.

P9. On procède de la même façon.

Important !

Il s'agit bien d'une opération sur les limites, car m ne dépend pas de n .

Attention !

Les puissances à exposants non entiers ne sont bien définies que pour des réels strictement positifs !

P10. Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\left| \frac{u_n}{v_n} \right| = \left| \frac{u_n}{v_n} \right|$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, dont $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n|}{|v_n|} = 1$, autrement dit $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |v_n|$.

P11. Supposons $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon \right)$$

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$.

D'où :

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$$

En particulier :

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \frac{u_n}{v_n} > 0$$

Par conséquent, pour tout $n \in \llbracket N; +\infty \llbracket$, u_n et v_n ont même signe.

Conclusion : à partir d'un certain rang, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même signe.

P12. P12.a. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n) \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $w_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0$. D'où, par opération :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} \times \frac{v_n}{w_n} = 0$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$, autrement dit, $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(w_n)$.

P12.b. Supposons $\begin{cases} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \\ u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \end{cases}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $v_n \neq 0$ et

$$\frac{u_n + u'_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n}$$

Or $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; et $u'_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{v_n} = 0$. D'où, par opération :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} + \frac{u'_n}{v_n} = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + u'_n}{v_n} = 1$, autrement dit, $u_n + u'_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

P12.c. Par équivalences, en débutant avec **Propriétés 2 - P2** :

$$u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$$\iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

et :

$$u_n = v_n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(u_n) \iff 1 = \frac{v_n}{u_n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

$$\iff \frac{v_n}{u_n} = 1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

$$\iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

$$\iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

↪ P2

★

Rappel...

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$
 $(n \geq N \implies |w_n - \ell| \leq \varepsilon)$

Réflexe !

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+$
 $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

À retenir...

Deux réels non nuls ont même
 signe si, et seulement si, le pro-
 duit (ou quotient) est strictement
 positif.

EXEMPLES 4

E1 Donnons un équivalent simple de $n^3 2^n + n 3^n$ en $+\infty$.

♣ **Méthode !**

◀ Pour le trouver : chercher ce qui domine dans les différents termes.

E2 Donnons un équivalent simple de $\frac{(n^2 + 1)^4 + n + 7}{2n(n^3 + 5)}$ en $+\infty$.

E3 On a :

$$n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n ; n + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Et bien entendu :

$$-n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n$$

Ainsi, si on pouvait sommer les équivalents, on obtiendrait :

$$1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 : \text{FAUX!}$$

Conclusion :

E4 Les suites $(\ln(n + 1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

★ **Classique !** ★

◀ On rencontre souvent cet équivalent.

E5 Les suites $(\exp(n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?

◀ **À retenir...**

◀ Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne peut appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent.

Trois choses importantes sur les équivalents :

1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'un équivalent (autre que la valeur absolue et une puissance) !
3. Si un jour on arrive à écrire $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?

D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0$ n'est pas permise...
D'autre part, les seules suites équivalentes à la suite nulle sont les suites nulles à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 1

ÉQUIVALENTS USUELS

T1 Soient $k \in \mathbb{N}^*$, a_0, a_1, \dots, a_k des réels et b_0, b_1, \dots, b_k des réels tels que $b_0 < b_1 < \dots < b_k$. Si $a_k \neq 0$, alors $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2 Si :

- ✓ à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas,
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;

alors :

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n ; e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n ; \forall a \in \mathbb{R}^*, (1 + u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a u_n$$

Autrement dit :

Une somme de puissances de n est équivalente, en $+\infty$, à son terme non nul de plus grand exposant.
Cas particulier : une expression polynomiale est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.

*** DÉMONSTRATION :**

T1. Supposons $a_k \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \dots + 1$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket$, $b_k - b_i > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{b_k - b_i} = +\infty$.

Ainsi, par opérations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_k n^{b_k - b_0}} + \frac{a_1}{a_k n^{b_k - b_1}} + \dots + 1 = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k}}{a_k n^{b_k}} = 1$, autrement dit $a_0 n^{b_0} + a_1 n^{b_1} + \dots + a_k n^{b_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a_k n^{b_k}$.

T2. Supposons qu'à partir d'un certain rang $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :

- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$,

donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + u_n)}{u_n} = 1$$

Conclusion : $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :

- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$,

donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1$$

Conclusion : $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a $u_n \neq 0$ et :

- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$,
- ✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$,

donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + u_n)^a - 1}{u_n} = a$$

Conclusion : $(1 + u_n)^a - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a u_n$.

Rappels...

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
 - $\forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$
- Méthode pour retrouver ces limites : les voir comme des limites de taux d'accroissements de fonctions entre 0 et x ...

EXEMPLES 5

E1 Déterminons la limite de la suite de terme général $\frac{7n^6 - 3n^5 + n^3 - n^2 + 3}{3n^6 + 7n^2 + 1}$.

E2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

★ **Classique !** ★
 Tellement classique... En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

III APPLICATION À L'ÉTUDE DES SÉRIES

Voyons trois critères pour étudier la nature de séries à terme général positif.

THÉORÈME 2 CRITÈRE DE COMPARAISON PAR INÉGALITÉ SUR LES SÉRIES À TERMES GÉNÉRAUX POSITIFS

T1 $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \end{array} \right\} \implies \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \right)$

T2 $\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n \\ \sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \end{array} \right\} \implies \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \right)$

Important !
 Si le terme général est négatif, il suffit de le multiplier par -1 et se ramener aux critères qui suivent. En fait, le problème est seulement si le terme général n'est jamais de signe constant !

Remarque
 Ces critères sont encore valables si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

* **DÉMONSTRATION** : Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

★

On en déduit les deux suivants :

THÉORÈME 3 CRITÈRE DE COMPARAISON PAR NÉGLIGEABILITÉ SUR LES SÉRIES À TERMES GÉNÉRAUX POSITIFS

T1 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à termes positifs
 $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
 $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente } $\implies \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \right)$

T2 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à termes positifs
 $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$
 $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente } $\implies \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \right)$

★ Classique ! ★

On utilise souvent le premier point dans le cas où $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de Riemann convergente. Autrement dit, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $u_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

★ DÉMONSTRATION :

★

THÉORÈME 4 CRITÈRE DE COMPARAISON PAR ÉQUIVALENCE SUR LES SÉRIES À TERMES GÉNÉRAUX POSITIFS

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right\} \implies \left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ ont même nature} \right)$$

♥ Astuce du chef ♥

En fait, puisque $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, il suffit que (v_n) soit à termes positifs pour que (u_n) le soit à partir d'un certain rang...

★ DÉMONSTRATION : Supposons $\left\{ \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont à termes positifs} \\ u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \end{array} \right.$

- Supposons que $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

On sait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (v_n)$, donc à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon \right)$$

En particulier, avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq 1$.

D'où :

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, 0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$$

Et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs :

$$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, 0 \leq u_n \leq 2v_n$$

Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par inégalité) sur les séries à termes généraux positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

- Par symétrie des rôles, on en déduit que si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ également.

On a ainsi établi :

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est convergente} \right) \iff \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est convergente} \right)$$

D'où :

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n \text{ est divergente} \right) \iff \left(\sum_{n \geq 0} v_n \text{ est divergente} \right)$$

Autrement dit, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ ont même nature.

★

♣ MÉTHODE 1 ♣

1. Si l'énoncé ne demande que la nature de $\sum u_n$:

- si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente ;
- on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
- sinon :
 - * si $\sum u_n$ est à terme général positif : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec le terme général d'une série de Riemann par exemple),
 - * si $\sum u_n$ est à terme général négatif : on utilise le fait que $-\sum u_n = \sum -u_n$ et que les séries $-\sum u_n$ et $\sum u_n$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent,
 - * si le terme général de $\sum u_n$ est alterné :
 - × étudier la convergence absolue : si $\sum |u_n|$ CV, alors $\sum u_n$ CV ;
 - × revenir à la suite des sommes partielles et étudier sa nature par théorème de recouvrement.
- Ou le résultat : la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. Si l'énoncé demande de justifier la convergence et de calculer la somme d'une série :

- on regarde s'il s'agit d'une combinaison linéaire de séries usuelles ;
- on regarde si l'on peut mettre en place un télescopage.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes (en mettant par exemple en place une comparaison série/intégrale comme dans [Question classique 18](#)).

Remarque

Les critères sont encore valables si les suites (u_n) et (v_n) ne sont à termes positifs qu'à partir d'un certain rang.

✗ Attention !

Si $\sum |u_n|$ est divergente, alors on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$!

Remarque

Il faut savoir redémontrer ce résultat !

EXEMPLES 6

Déterminons la nature des séries suivantes :

E1 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}$

E2 $\sum_{n \geq 0} \frac{2n+7}{n^3+5n^2+3}$

E3 $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$

★ Classique ! ★

Et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$?