2

Probabilités

Couples et suites de variables aléatoires discrètes

Introduction...

Ah, les probabilités... Bien évidemment, quand on parle de probabilités, on pense aux jeux de hasard. C'est bien, initialement, en ce sens qu'elles ont été développées. Au fil des siècles, viennent ensuite de nombreux contributeurs pour consolider et développer les connaissances sur ce domaine : Galilée, Fermat, Pascal, Huygens, Moivre, Laplace, Bayes, Lagrange.

Voici une citation de Jean Dieudonné (1906-1992, mathématicien français, un des membres fondateurs du célèbre groupe Bourbaki), datée de 1977 : "Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; elle a hérité de ses propres problèmes et même de son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels."

Que s'est-il alors passé en 1933 ? C'est en 1933 que parait en allemand le manuel *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fondements de la théorie des probabilités) rédigé par Andreï Kolmogorov (1903-1987, mathématicien russe), dans lequel il définit, entre autres, les trois axiomes de probabilités. On lui doit cette formalisation de la théorie des probabilités sur laquelle reposent désormais tous les résultats de probabilités. C'est bien cette formalisation qui a permis à la théorie des probabilités d'être légitimement reconnue comme branche des mathématiques.

Pour bien démarrer...

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Qu'est-ce qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{A}$?
   Une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0;1]$ telle que :
   - ✓ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
   - ✓ pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles de $\mathcal{A}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

2. Soient A, B deux évènements, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, ainsi que $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements.
   - **Définition :** $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \;/\; \forall i \in I,\ \omega \in A_i\}$; $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \;/\; \exists i \in I \;/\; \omega \in A_i\}$

     Autrement dit :
     $\omega \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I,\ \omega \in A_i$
     $\omega \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I,\ \omega \in A_i$
   - **Lois de Morgan :** $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$; $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$
   - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
   - Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

     ☞ Rappel...
     L'application $\mathbb{P}_A$ ainsi définie est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   - **Définition :** A et B sont incompatibles lorsque : $A \cap B = \varnothing$.

     ✘ Attention !
     La notion d'incompatibilité n'est pas définie par une probabilité ! En particulier
     $\cancel{\mathbb{P}(A\cap B) = 0 \Longrightarrow (A \text{ et } B \text{ incompatibles})}$
   - **Définition :** $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements lorsque :
     - ✓ $\forall (i,j) \in I^2,\ \left(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\right)$,
     - ✓ $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.
   - **Définition :** A et B sont indépendants (pour $\mathbb{P}$) lorsque : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

     ✘ Attention !
     La notion d'indépendance est liée à la notion de probabilité ! Deux évènements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité, et ne pas l'être pour une autre probabilité (probabilité conditionnelle par exemple).
   - Formule des probabilités composées :
     Si $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, alors
     $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_1\cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$
   - Formule des probabilités totales :
     Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de $\mathcal{A}$, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, la série $\sum \mathbb{P}(A_n \cap B)$ est convergente et
     $$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

3. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?
   Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$...

   Important !
   On retient surtout que c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$!

4. Si X est une variable aléatoire sur Ω, rappeler les définitions de $[X = a]$ et $[X \leqslant a]$.
   $$[X = a] = \{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) = a\} \qquad ; \qquad [X \leqslant a] = \{\omega \in \Omega \;/\; X(\omega) \leqslant a\}$$

5. La fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)$$

6. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
   - F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$,
   - F_X est continue à droite en tout réel,
   - F_X est constante par morceaux si, et seulement si, X est discrète (c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable),
   - la fonction de répartition caractérise la loi : deux variables aléatoires ont même loi si, et seulement si, elles ont même fonction de répartition.

7. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X possède une espérance et un moment d'ordre 2, alors : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}\big([X = n]\big)$ et $\mathbb{E}(X^2) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}\big([X = n]\big)$

8. Théorème de transfert :
   Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
   La variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ est absolument convergente et dans ce cas $\mathbb{E}\big(g(X)\big)$ est la somme de cette série.

9. Formule de Koenig-Huygens :
   X admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2 et le cas échéant :
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

10. L'inventaire des lois discrètes usuelles doit être parfaitement connu !

Définition 1 — **Suite double**

Une **suite double** est une fonction $u : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On notera $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une telle suite.

Théorème 1

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double.
Si :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ u_{i,j \geqslant 0}$,
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée s_j ($s_j = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$),
- la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} s_j$ est convergente,

alors :

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée t_i ($t_i = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$)),
- la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} t_i$ est convergente,

et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} s_j$$

autrement dit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

Petite remarque

Le théorème est également valable en échangeant i et j... En gros : peu importe l'ordre dans lequel on étudie la nature des séries, du moment que l'on fait les deux.

Vocabulaire

Dans le cas de ce théorème, on dit que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}$ est convergente et sa somme est le réel $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$, égal à $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

Exemple 1

Montrons que la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente et déterminons sa somme.

- On a déjà : $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \frac{1}{2^{i+j}} \geqslant 0$.
- Soit $j \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$, on a : $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^j}\sum\limits_{i=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^i$.

  Or $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, donc la série $\sum\limits_{i\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ est une série géométrique convergente ; et ainsi la série $\sum\limits_{i\geqslant 0}\frac{1}{2^{i+1}}$ est également convergente, de somme notée s_j avec :

$$\begin{aligned} s_j &= \frac{1}{2^j}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{2^j}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{2^j} \end{aligned}$$

- Comme ci-dessus on démontre que la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} s_j$ est convergente.

Par conséquent, la série double $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+j}} &= \sum_{j=0}^{+\infty} s_j \\ &= 2\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= 4 \end{aligned}$$

Conformément à ce qui est mentionné dans le programme officiel, on admet que les théorèmes et techniques classiques concernant les séries simples s'étendent dans le cas des séries doubles.

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I Définitions et premiers résultats

Définition 2 — **Couple de variables aléatoires**

Un **couple de variables aléatoires** (ou couple aléatoire) est une application $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
Plus concrètement, un couple de variables aléatoires Z est la donnée de deux variables aléatoires X et Y toutes deux définies sur Ω ; on note alors $Z = (X, Y)$.
Dans le cas où X et Y sont discrètes, on dit que le couple de variables aléatoires (X, Y) est discret.

Petite remarque
On définit de la même façon un n-uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (ou vecteur aléatoire) ainsi qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Dans toute la suite du chapitre, (X, Y) désignera un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-uplet de variables aléatoires sur Ω et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur Ω.
Nous nous intéresserons essentiellement aux couples de variables aléatoires et travaillerons sur quelques cas classiques de n-uplet ou suites de variables aléatoires.

I.1 Loi jointe

Définition 3 — **Loi jointe d'un couple**

La **loi jointe du couple (X, Y)** est l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{rcl} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) \end{array} \right.$$

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer la loi jointe de (X, Y)**, on donne :
- $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
- $\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Exemples 2

E1 On lance deux dés tetraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4, et on note :
- X le minimum des deux nombres obtenus,
- Y le maximum des deux nombres obtenus.

Petite remarque
Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et de cardinaux petits, on pourra résumer la loi jointe dans un tableau à double entrée.

Donnons la loi jointe du couple (X, Y), que nous résumerons dans un tableau.
Afin de déterminer la loi jointe du couple (X, Y), utilisons un tableau des issues dans lequel, à chaque intersection on indique l'issue de l'expérience sous forme de couple (dé 1, dé 2) :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

On remarque alors que $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;4]\!]$.
Puis, comme les 16 issues de l'expérience sont équiprobables, on obtient le tableau de la loi jointe du couple (X, Y), dans lequel à chaque intersection on indique la probabilité de l'évènement $[X = i] \cap [Y = j]$:

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

✗ Attention !
Certaines $\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ peuvent être nulles sans que ni $\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ ni $\mathbb{P}\big([Y = y]\big)$ ne soient nulles...

E2 Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note :
- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.

Commençons par donner les lois de X et Y puis déterminons la loi jointe du couple (X, Y).

- **Loi de X.**
  - ⋆ **Expérience.** L'expérience consiste en n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "obtenir PILE" est de probabilité p.
  - ⋆ **Variable aléatoire.** La variable aléatoire X prend comme valeur le nombre de succès obtenus sur des n répétitions.

  Par conséquent : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p)$.
- **Loi de Y.**
  De même : $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n; q)$.
- **Loi jointe de (X, Y).** On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et, pour tout $(i, j) \in [\![0; n]\!]^2$:
  - ⋆ si $i + j \neq n$, alors $[X = i] \cap [Y = j] = \varnothing$, d'où :
  $$\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 0$$
  - ⋆ si $i + j = n$, alors
  $$\begin{aligned}[X = i] \cap [Y = j] &= [X = i] \cap [Y = n - i] \\ &= [X = i] \qquad [Y = n - i] = [X = i]\end{aligned}$$
  D'où :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) &= \mathbb{P}\big([X = i]\big) \qquad X \hookrightarrow \mathscr{B}(n; p) \\ &= \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} \qquad q = 1 - p \text{ et } i + j = n, \text{ donc } n - i = j \\ &= \binom{n}{i} p^i q^j\end{aligned}$$

> **Conclusion :** $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et
> $$\forall (i, j) \in [\![0; n]\!]^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^j & \text{si } i + j = n \\ 0 & \text{si } i + j \neq n \end{cases}$$

$\boxed{\text{E3}}$ On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE et Y la variable aléatoire égale au rang du second PILE.
Déterminons la loi jointe du couple (X, Y).
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- P_k l'évènement "obtenir PILE au k-ième lancer",
- F_k l'évènement 'obtenir FACE au k-ième lancer".

Considérons déjà que :
$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \ ;\ Y(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$$
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2; +\infty[\![$.

- Si $i \geqslant j$:
  Il est impossible d'obtenir le second PILE à un rang inférieur ou égal à celui du premier PILE. Dans ce cas, on a ainsi :
  $$[X = i] \cap [Y = j] = \varnothing$$
  Et donc :
  $$\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 0$$
- Si $i < j$:

  $[X = i] \cap [Y = j]$ est réalisé si, et seulement si, on obtient le premier PILE au i-ème lancer et le second au j-ième lancer
  si, et seulement si, on obtient FACE aux éventuels lancers 1 à $i - 1$, puis PILE au i-ème lancer, puis FACE aux lancers éventuels $i + 1$ à $j - 1$, et PILE au j-ème lancer

  D'où :
  $$[X = i] \cap [Y = j] = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k\right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k\right) \cap P_j$$
  Et donc :
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} F_k\right) \cap P_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} F_k\right) \cap P_j\right) \qquad \text{indépendance des lancers} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{i-1} (1 - p)\right) \times p \times \left(\prod_{k=i+1}^{j-1} (1 - p)\right) \times p\end{aligned}$$

Conventions
- Une intersection d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à Ω
- Une union d'évènements indexée sur un ensemble vide est égale à $\varnothing$
- Un produit de réels indexé sur un ensemble vide est égal à 1
- Une somme de réels indexée sur un ensemble vide est égale à 0

$$= (1-p)^{i-1}p(1-p)^{j-i-1}p$$
$$= p^2(1-p)^{j-2}$$

Conclusion : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = [\![2 ; +\infty[\![$ et

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2 ; +\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \begin{cases} p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i<j \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

☞ Rappel...
$\text{Card}\big([\![a : b]\!]\big) = b - a + 1.$

Tout comme on l'avait pour la loi d'une variable aléatoire, on retrouve :

Propriétés 1 — **SCE associé à un couple**

P1 La famille $\big([X=x]\cap[Y=y]\big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

P2 La série double $\displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ est convergente et sa somme est égale à 1.

♡ Astuce du chef ! ♡
Nous pouvons utiliser ce résultat pour déterminer la valeur d'un paramètre inconnu dans l'expression de la loi jointe d'un couple. En pratique, nous serons un peu plus malins... Voir Exemples 4 - E3.

Petite remarque
Cette série double peut être une somme finie double si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

⋆ Démonstration : Analogue au cas d'une variable aléatoire, P2 étant une conséquence directe de P1. ⋆

Là encore, un résultat analogue à ce qui a été vu dans le cas d'une seule variable aléatoire, que l'on admet :

Propriété 2

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables.
Si $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est une suite double positive telle que la série double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j}$ soit convergente de somme égale à 1, alors pour toutes suites de réels $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un couple (X, Y) de variables aléatoires sur Ω tels que :

- $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j,\ j\in J\}$
- $\forall (i,j) \in I\times J,\ \mathbb{P}\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big) = p_{i,j}$

Petite remarque
Utile si on demande de vérifier qu'une suite double définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires discrètes. Mais c'est très rare...

Exemple 3

Dans l'exemple 1, on a établi que la série $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4. Définissons alors la suite $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par : $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ p_{i,j} = \dfrac{1}{2^{i+j-2}}$. On a ainsi :

- $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ p_{i,j} \geqslant 0$
- la série $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.

Conclusion : la suite $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.

I.2 Lois marginales et lois conditionnelles

Définitions 4 — **Lois marginales d'un couple**

D1 La **première loi marginale de (X, Y)** est la loi de X.

D2 La **seconde loi marginale de (X, Y)** est la loi de Y.

♣ Méthode 2 ♣ **Pour obtenir les lois marginales à partir de la loi jointe :** on obtient la loi de X en utilisant la formule des probabilités totales avec $\big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$ comme système complet d'évènements :

$$\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X=x]\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$$

Bien évidemment...
On utilise la FPT avec le sce $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ pour obtenir la loi de Y...
Et s'il est possible et utile de le faire : on continue avec les probabilités conditionnelles.

Exemples 4

E1 Reprenons le tableau obtenu dans Exemples 2 - E1 représentant la loi jointe du couple (X, Y) et complétons-le avec les lois marginales.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	Loi de X
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\mathbb{P}\big([X=1]\big) = \frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\mathbb{P}\big([X=2]\big) = \frac{3}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\mathbb{P}\big([X=3]\big) = \frac{5}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\mathbb{P}\big([X=4]\big) = \frac{7}{16}$
Loi de Y	$\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \frac{1}{16}$	$\mathbb{P}\big([Y=2]\big) = \frac{3}{16}$	$\mathbb{P}\big([Y=3]\big) = \frac{5}{16}$	$\mathbb{P}\big([Y=4]\big) = \frac{7}{16}$	1 \ 1

E2 Reprenons la loi jointe du couple obtenue dans Exemples 2 - E3 et déterminons la loi de Y.

On avait :

$$Y(\Omega) = [\![2;+\infty[\![\ ;\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \begin{cases} p^2(1-p)^{j-2} & \text{si } i<j \\ 0 & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

> **✘ Attention !**
> S'il y a plusieurs cas dans la loi jointe, on retrouvera ces cas dans les calculs qui suivent...

Soit $j \in [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=j]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) + \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} \\
&= (j-1)p^2(1-p)^{j-2}
\end{aligned}$$

$\forall i \in [\![j;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = 0,$
$\forall i \in [\![1;j-1]\!],\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = p^2(1-p)^{j-2}$

> **Conseil**
> En procédant en deux temps (d'abord la relation de Chasles, puis le remplacement des probabilités), on effectue deux vérifications : ce n'est jamais trop ! Ne pas hésiter à procéder ainsi, au moins au début...

Conclusion : $Y(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$ et $\forall j \in [\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([Y=j]\big) = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}$.

E3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \frac{a}{2^{i+j}j!}$$

Déterminons la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y).

- **Loi de X.**
  Soit $i \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y=j]\big)_{j\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} \mathbb{P}\big([Y=j]\cap[X=i]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=i]\big) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y=j]\cap[X=i]\big) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a}{2^{i+j}j!} \\
&= \frac{a}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{j!} \\
&= \frac{a}{2^i}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> On commence par déterminer une des deux lois marginales, en fonction du paramètre inconnu. Puis on détermine ce paramètre comme on le faisait dans le cas d'une seule VA.
> Ce n'est pas plus long que de calculer directement une somme double ; et si l'on a besoin des lois marginales ensuite, on en a déjà une !

- **Valeur de a.**
  Ensuite, on sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, donc la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X=i]\big)$ est convergente et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\big) = 1$.

Or :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) = 1 \iff \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a}{2^i} e^{\frac{1}{2}} = 1$$
$$\iff a e^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$
$$\iff a e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$
$$\iff a = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Conclusion : $a = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$.
On obtient ainsi :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=i]) = \frac{1}{2^{i+1}}$$

Petite remarque
La variable aléatoire $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

- **Loi de Y.**
Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$ est convergente et :

$$\mathbb{P}\big([Y=j]\big) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{i+j+1} j!}$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1} j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^{j+1} j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2^j j!}$$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Définitions 5 — Lois conditionnelles

D1 Soit $y \in Y(\Omega)$. Si $\mathbb{P}\big([Y=y]\big) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de X sachant** $[Y=y]$ est l'application

$$\begin{array}{|rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}\big([X=x]\big) \end{array}$$

D2 Soit $x \in X(\Omega)$. Si $\mathbb{P}\big([X=x]\big) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de Y sachant** $[X=x]$ est l'application

$$\begin{array}{|rcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0;1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}\big([Y=y]\big) \end{array}$$

♣ Méthode !
Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$, on donne :
- $X(\Omega)$
- $\mathbb{P}_{[Y=y]}\big([X=x]\big)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

☞ Rappel...
Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors :
$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exemple 5

On s'intéresse à une chaîne de production de baguettes magiques mise en place par des elfes de maison. On estime que 10% des baguettes magiques produites sont défectueuses[1]. On suppose que le nombre de baguettes produites en une heure est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre 10. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes défectueuses produites en une heure. Déterminons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$; puis déduisons-en la loi de Y.

- Commençons déjà par montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Procédons par double inclusion.

  $\boxed{\subset}$ La variable aléatoire Y prend comme valeurs le nombre de baguettes défectueuses produites en une heure, donc prend comme valeurs des entiers naturels.

[1] Espérons qu'Ollivander fait mieux...

✘ Attention !
$\cancel{Y(\Omega) = [\![0;n]\!]}$: ça n'aurait aucun sens ! La variable aléatoire Y ne dépend d'aucun n (l'expérience non-plus d'ailleurs).

D'où :

$$Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $k \in Y(\Omega)$.
Considérons l'issue définie comme suit :

- ◇ k baguettes magiques ont été produites en une heure,
- ◇ ces k baguettes magiques sont toutes défectueuses.

Cette issue réalise l'évènement $[Y = k]$.
On a donc établi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ [Y = k] \neq \varnothing$$

Par conséquent :

$$\mathbb{N} \subset Y(\Omega)$$

Autrement dit :
Il faut établir :

$$\exists \omega \in \Omega \ / \ Y(\omega) = k$$

Ce qui équivaut à exhiber une issue réalisant l'évènement $[Y = k]$.

Conclusion : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'évènement $[X = n]$ réalisé. Dans ce cas, n baguettes ont été produites en une heure. Sous cette condition :
  - ⋆ l'expérience s'assimile alors à n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "la baguette produit est défectueuse" est de probabilité $0,1$;
  - ⋆ la variable aléatoire Y compte le nombre de baguettes défectueuses ainsi produites.

  Conclusion : la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est la loi binomiale de paramètres n et $0,1$.
  D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Important !
La quantification sur k porte sur $Y(\Omega)$ en entier ; et il est indispensable que ce soit le cas.

- **Loi de Y.**
  - ⋆ On sait que déjà $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  - ⋆ Soit $k \in \mathbb{N}$.
    D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X = n]\big)_{n \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y = k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n] \cap [Y = k]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big) \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}\big([X = n]\big) \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = n]\big) \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-10} 10^n}{n!} \binom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k} \\
&= e^{-10} 0,1^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{10^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} 0,9^{n-k} \\
&= \frac{e^{-10} 0,1^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{10^n \times 0,9^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-10} 0,1^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{10^{j+k} \times 0,9^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-10} 0,1^k \times 10^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{10^j \times 0,9^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-10}}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{9^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-10}}{k!} e^9 \\
&= \frac{e^{-1}}{k!}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) \neq 0$

✗ Attention !
Vigilance constante à cet endroit, quand il s'agit de remplacer les probabilités...

$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = n]\big) = \dfrac{e^{-10} 10^n}{n!}$,
$\forall n < k,\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = 0$,
$\forall n \in [\![k; +\infty[\![,\ \mathbb{P}_{[X=n]}\big([Y = k]\big) = \dbinom{n}{k} 0,1^k 0,9^{n-k}$

$j = n - k$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$.

I.3 Fonction de variables aléatoires discrètes

Théorème 2 — **Loi de $Z = f(X, Y)$ (HP ?)**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et f une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $Z = f(X, Y)$.

T1 L'application Z est une variable aléatoire sur Ω.

T2 $Z(\Omega) = \left\{f\big(X(\omega), Y(\Omega)\big) \ / \ \omega \in \Omega\right\} \subset \left\{f(x, y) \ / \ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\right\}$

T3

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}\big([Z = z]\big) = \sum_{(x,y)\in E} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

où $E = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \ / \ z = f(x, y)\}$.

★Subtil...★
On perd l'égalité car dans l'écriture $\left\{f(x, y) \ / \ (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\right\}$, les choix de x et y sont indépendants et non nécessairement des valeurs associées à la même issue.

Petite remarque
Au cas par cas, nous verrons comment nous dispenser de l'écriture un peu lourde de cette somme.

Exemples 6

La somme, la différence, le produit, le minimum, le maximum de variables aléatoires sur Ω sont également des variables aléatoires sur Ω.

II Indépendance de variables aléatoires

Définitions 6 — **Indépendance de VA**

D1 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = \mathbb{P}\big([X = x]\big) \times \mathbb{P}\big([Y = y]\big)$$

D2 Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.
On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega),\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X_k = x_k]\big)$$

D3 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes.
On dit que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Petite remarque
On peut également définir l'indépendance 2 à 2 d'une suite de VA...
Si on mentionne seulement "indépendance", il s'agit de la mutuelle indépendance.

♣ Méthode 3 ♣ Des méthodes classiques...

1. **Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes :** il suffit de trouver un contre-exemple. En particulier, on peut essayer de trouver $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big) = 0$ et $\mathbb{P}\big([X = x]\big) \neq 0$, $\mathbb{P}\big([Y = y]\big) \neq 0$.
2. Pour déterminer la loi de $X \pm Y$ ou $|X - Y|$, on utilise la FPT (avec $\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)}$ ou $\big([Y = y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :
   - soit on connaît la loi jointe,
   - soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,
   - soit X et Y sont indépendantes et on connaît leur loi.
3. Pour la loi de $\min(X, Y)$ **si X et Y sont indépendantes** et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([\min(X, Y) \geqslant z]\big) &= \mathbb{P}\big([X \geqslant z] \cap [Y \geqslant z]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \mathbb{P}\big([X \geqslant z]\big) \times \mathbb{P}\big([Y \geqslant z]\big) && \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y\\ &= \dots\end{aligned}$$

   Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}\big([\min(X, Y) = z]\big)$...
4. Pour la loi de $\max(X, Y)$ **si X et Y sont indépendantes** et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([\max(X, Y) \leqslant z]\big) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant z] \cap [Y \leqslant z]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \mathbb{P}\big([X \leqslant z]\big) \times \mathbb{P}\big([Y \leqslant z]\big) && \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y\\ &= \dots\end{aligned}$$

   Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}\big([\max(X, Y) = z]\big)$...

✘ Attention !
Pour $\mathbb{P}\big([X+Y = z]\big)$, on obtiendra la somme des $\mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = z-x]\big)$: cette probabilité est nulle dès que $z - x \notin Y(\Omega)$...

➠Réflexe !
Pour tous réels x, y, z :

$\min(x, y) \geqslant z \iff \begin{cases} x \geqslant z \\ y \geqslant z \end{cases}$

$\max(x, y) \leqslant z \iff \begin{cases} x \leqslant z \\ y \leqslant z \end{cases}$

Petite remarque
Méthode identique pour $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Exemples 7

E1 Les variables aléatoires X et Y introduites dans Exemples 2 - E2 sont-elles indépendantes ?

On avait :

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p) \quad ; \quad Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n;q) \quad ; \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![2;+\infty[\![, \ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \begin{cases} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} & \text{si } i+j=n \\ 0 & \text{si } i+j \neq n \end{cases}$$

Ainsi :

- $\mathbb{P}\big([X=0]\big) = q^n$ et $\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = p^n$, donc $\mathbb{P}\big([X=0]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=0]\big) = p^n q^n \neq 0$ (car $p \in]0;1[$) ;
- $\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = 0$, car $n \neq 0$

D'où :

$$\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big) \neq \mathbb{P}\big([X=0]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=0]\big)$$

Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

E2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Déterminons $\mathbb{P}\big([X=Y]\big)$.

On a ainsi :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([X=n]\big) = \mathbb{P}\big([Y=n]\big) = p(1-p)^{n-1}$$

D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\big([X=n]\cap[X=Y]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=Y]\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\cap[X=Y]\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\cap[Y=n]\big) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big)\mathbb{P}\big(\cap[Y=n]\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p^2\big((1-p)^2\big)^{n-1} && k=n-1 \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)^2\big)^k \\
&= p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{p^2}{2p-p^2} \\
&= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

☞ **Rappel...**
$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall m \in \mathbb{N},$
$(x^m)^2 = x^{2m} = (x^2)^m$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([X=Y]\big) = \dfrac{p}{2-p}$.

E3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Notons $q = 1-p$ et $Z = \min(X,Y)$. On a : $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(1-q^2)$. Voir QCl17.

Théorème 3 — **Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson**

T1 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ainsi que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1;p) \\ X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2;p) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1+n_2;p)$$

T2 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ainsi que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1) \\ X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

⋆ Démonstration :

T1. A faire en exercice, en utilisant la formule de Vandermonde ci-dessous... Pour tous $k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant m+n$, on a :

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

T2. Voir QCl16.

⋆

Et si c'est vrai pour deux, c'est vrai pour n... A condition de pouvoir conserver l'indépendance, et ça, c'est l'affaire du lemme suivant :

Lemme 1 — **des coalitions**

L1 **Cas particulier, de deux variables aléatoires.** Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y.

L2 **Cas général, de n variables aléatoires.** Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.
Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in [\![1; n-1]\!]$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \ldots, X_n$.

Conséquence :

Théorème 4 — **Stabilité des lois binomiales et lois de Poisson**

T1 Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall N \in [\![2; +\infty[\![,\ \sum_{k=1}^{N} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k; p\right)$$

T2 Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}_*^+$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda_k) \\ (X_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$$

À retenir...
Cas particulier si les $n_k = 1$, on retrouve que la somme de n VA indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$ est une VA qui suit la loi $\mathscr{B}(n; p)$: QCl18.

⋆ Démonstration :

T1. Supposons $\left\{\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array}\right.$.

Montrons : $\forall N \in [\![2; +\infty[\![,\ \sum_{k=1}^{N} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k; p\right)$.

- **Initialisation.** Pour $N = 2$.
  On a :
  - ✓ $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1; p)$
  - ✓ $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2; p)$
  - ✓ X_1 et X_2 sont indépendantes

  Donc d'après Théorème 3 – T1 :
  $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2; p)$$
  L'initialisation est ainsi vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $N \in [\![2; +\infty[\![$. Supposons $\sum_{k=1}^{N} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k; p\right)$ et montrons $\sum_{k=1}^{N+1} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N+1} n_k; p\right)$.
  On a :
  $$\sum_{k=1}^{N+1} X_k = \sum_{k=1}^{N} X_k + X_{N+1}$$
  Or :
  - ✓ par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{N} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k; p\right)$,
  - ✓ $X_{N+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n_{N+1}; p)$,

✓ les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, les variables aléatoires $X_1 + \ldots + X_N$ et X_{N+1} sont également indépendantes.

Ainsi, d'après Théorème 3 - T1, la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{N} X_k + X_{N+1}$ suit la loi $\mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N+1} n_k ; p\right)$.

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall N \in [\![2 ; +\infty[\![, \ \sum_{k=1}^{N} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\sum_{k=1}^{N} n_k ; p\right)$.

T2. On procède de la même façon.

Important !
Le lemme des coalitions permet de généraliser, par récurrence, la stabilité d'une loi dans le cas de 2 VA aux cas de n VA.

III Espérance de $f(X, Y)$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

Théorème 5 — de transfert

Soit f une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
La variable aléatoire $f(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$ est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbb{E}\big(f(X, Y)\big)$ est la somme de cette série.

Important !
Cas particulier : sous réserve de convergence absolue, on a :
$\mathbb{E}(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$

Exemple 8

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est définie par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad ; \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \ \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big) = \frac{j + k}{e 2^{j+k} j! k!}$$

Justifions que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.

Pourquoi ?
Pourquoi peut-on dire que les deux lois marginales sont les mêmes ?
Parce-que X et Y ont des rôles symétriques dans la loi jointe.

- Par théorème de transfert :

2^{X+Y} admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(j,k) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} 2^{j+k} \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big)$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série double $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} 2^{j+k} \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big)$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} 2^{j+k} \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big) &= \frac{1}{e j!} \sum_{k=0}^{N} \frac{j + k}{k!} \\
&= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{k!} \right) \\
&= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} \right) && n = k - 1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \right)
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente.
Par conséquent, la série $\sum_{k \geqslant 0} 2^{j+k} \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k} \mathbb{P}\big([X = j] \cap [Y = k]\big) &= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{e j!} (j e + e) \\
&= \frac{j + 1}{j!}
\end{aligned}$$

- Ensuite, de la même façon que ci-dessus, la série $\sum_{j \geqslant 0} \frac{j + 1}{j!}$ est convergente, de somme égale à $2e$.

- Par conséquent, d'après Théorème 1, la série double $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} 2^{j+k}\mathbb{P}\big([X=j]\cap[Y=k]\big)$ est convergente. On en déduit que 2^{X+Y} admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2^{X+Y}) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k}\mathbb{P}\big([X=j]\cap[Y=k]\big)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j+1}{j!}\\ &= 2\mathrm{e}\end{aligned}$$

Propriété 3 — **Linéarité de l'espérance**

Soit $n\in[\![2;+\infty[\![$. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, la variable aléatoire $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\ldots+\lambda_nX_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kX_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbb{E}(X_k)$$

Démonstration : Si on devait la démontrer, on le ferait en trois temps :

- on sait déjà que si X admet une espérance, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, λX admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X)=\lambda\mathbb{E}(X)$;
- ensuite, on démontrerait le résultat dans le cas d'une somme de deux variables aléatoires en utilisant le théorème de transfert et le théorème 1 ;
- puis on obtiendrait le résultat voulu par récurrence.

Propriétés 4 — **Croissance de l'espérance**

P1 $\left.\begin{array}{l}\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant 0\ \ (\text{ou } \mathbb{P}\big([X\geqslant 0]\big)=1)\\ X \text{ admet une espérance}\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathbb{E}(X)\geqslant 0$

P2 $\left.\begin{array}{l}\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\leqslant Y(\omega)\ \ (\text{ou } \mathbb{P}\big([X\leqslant Y]\big)=1)\\ X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance}\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$

Démonstration :

P1. Supposons que $\mathbb{P}\big([X\geqslant 0]\big)=1$ et que X admet une espérance.
Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}\big([X=x]\big)$ est absolument convergente et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}\big([X=x]\big) && \mathbb{P}\big([X\geqslant 0]\big)=1\text{), donc si } x<0, \text{ alors } \mathbb{P}\big([X=x]\big)=0\\ &= \sum_{x\in X(\Omega),\ x\geqslant 0} x\mathbb{P}\big([X=x]\big)\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

P2. On applique le point précédent à la variable aléatoire $Z=Y-X$, avec la linéarité de l'espérance…

Petite remarque — Je traite ce cas, car le cas "$\forall\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant 0$" est inclus dans le cas $\mathbb{P}\big([X\geqslant 0]\big)=1$…

Propriétés 5 — **Espérance d'un produit de VA indépendantes**

P1 Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

P2 Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^{n}X_k$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n}X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$.

Utile… — La contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

✘ Attention ! — La réciproque est fausse !

Démonstration : Le théorème de transfert et le théorème 1 permettent de démontrer P1, puis on en déduit P2 par récurrence, en utilisant le lemme des coalitions.

Exemples 9

E1 Soit $p \in]0;1[$. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-1;1\} \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X=1]\big) = p \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X=-1]\big) = 1-p$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on pose $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Déterminons l'espérance de Y_n puis déduisons-en la loi de Y_n.

- Puisque $X(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -1\mathbb{P}\big([X=-1]\big) + 1\mathbb{P}\big([X=1]\big)\\ &= 2p-1\end{aligned}$$

- Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ admettent une espérance et sont indépendantes, donc Y_n admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) && X_1, \dots, X_n \text{ ont même loi que } X\\ &= (2p-1)^n\end{aligned}$$

Petite remarque

On pourrait justifier que Y_n admet une espérance car $Y_n(\Omega)$ est fini, puisque $Y_n(\Omega) = \{-1;1\}$.

- On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = \{-1;1\}$. D'où :

$$Y_n(\Omega) = \{-1;1\}$$

On a ainsi :

$$\mathbb{P}\big([Y_n=-1]\big) + \mathbb{P}\big([Y_n=1]\big) = 1$$

Et d'après le point précédent $\mathbb{E}(Y_n) = (2p-1)^n$; autrement dit :

$$-\mathbb{P}\big([Y_n=-1]\big) + \mathbb{P}\big([Y_n=1]\big) = (2p-1)^n$$

Conclusion : $\mathbb{P}\big([Y_n=1]\big) = \dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y_n=-1]\big) = \dfrac{1-(2p-1)^n}{2}$.

E2 Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On pose $Y = X_1X_2$ et $Z = X_2X_3$. Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

- Puisque X_1 et X_2 admettent une espérance et sont indépendantes, la variable aléatoire Y admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\\ &= p^2\end{aligned}$$

- De même, Z admet une espérance et $\mathbb{E}(Z) = p^2$.
- Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}YZ &= X_1X_2^2X_3 && X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p), \text{ donc } X_2^2 = X_2\\ &= X_1X_2X_3\end{aligned}$$

À retenir...

$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \implies X^2 = X$

Or X_1, X_2, X_3 admettent une espérance et sont indépendantes, donc la variable aléatoire YZ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(YZ) &= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_3)\\ &= p^3\end{aligned}$$

Puisque $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on a $p^3 \neq p^4$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(YZ) \neq \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$$

Conclusion : les variables aléatoires Y et Z ne sont pas indépendantes.

E3 On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0;1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$ et $(0;-1)$. On note X la variable aléatoire égale à l'abscisse du point et Y son ordonnée.

- Donnons la loi de X et celle de Y puis leur espérance.
  - ⋆ Par équiprobabilité, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X=-1]\big) = \frac{1}{4} \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}\big([X=1]\big) = \frac{1}{4}$$

Puisque $X(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X admet une espérance et on trouve :

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

⋆ On trouve les mêmes résultats pour Y.

- Que dire de la variable aléatoire XY ?
  Peu importe le point choisi, le produit de son abscisse et de son ordonnée vaut toujours 0.
  Conclusion : la variable aléatoire XY suit la loi certaine égale à 0.
- Montrons que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
  On a :
  ⋆ $\mathbb{P}\big([X=0]\big) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = \frac{1}{2}$
  ⋆ $\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big) = 0$

  D'où :
  $$\mathbb{P}\big([X=0]\cap[Y=0]\big) \neq \mathbb{P}\big([X=0]\big) \times \mathbb{P}\big([Y=0]\big)$$
  Conclusion : les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Qu'avons-nous ainsi mis en évidence ?
Nous avons mis en évidence le fait que la réciproque de Propriétés 5 - P1 est fausse. En effet, dans ce qui précède, on a $\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et pourtant les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

IV Covariance d'un couple

Définition 7 — **Covariance**

La **covariance du couple (X, Y)** est le réel, noté $\mathrm{Cov}(X, Y)$, défini par (si existence) :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big)$$

Petite remarque
$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$

Lemme 2 — (HP)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

✘ Attention !
Si X et Y sont indépendantes, l'existence de leur espérance suffit à l'existence de l'espérance de XY. Si elles ne sont pas indépendantes, il est possible que XY n'ait pas d'espérance même si X et Y en ont une. On peut aisément trouver un exemple dans le cas où $X = Y$...

⋆ Démonstration :

- Résultat préliminaire. Montrons :
  $$\forall a, b \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$$
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Travaillons par équivalences. On a :
  $$\begin{aligned} |ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} &\iff -\frac{a^2+b^2}{2} \leqslant ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\iff -a^2-b^2 \leqslant 2ab \leqslant a^2+b^2 \\ &\iff -a^2-b^2-2ab \leqslant 0 \leqslant a^2+b^2-2ab \\ &\iff -(a+b)^2 \leqslant 0 \leqslant (a-b)^2 \end{aligned}$$
  Ce dernier résultat est vrai. Par équivalences, le premier l'est également.
  Conclusion : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$
- Ensuite, d'après le théorème de transfert :

  XY admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ est absolument convergente

  ⋆ Or, d'après le résultat préliminaire :
  $$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ |xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$
  D'où :
  $$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ 0 \leqslant |xy|\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big) \leqslant \frac{1}{2}\Big(x^2\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big) + y^2\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)\Big)$$
  ⋆ Démontrons que les séries doubles $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x^2\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ et $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} y^2\mathbb{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ sont convergentes.

◇ Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([Y = y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big)$ est convergente et :

$$\mathbb{P}\big([X = x]\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big)$$

D'où :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \sum_{y\in Y(\Omega)} x^2\mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big) = x^2\mathbb{P}\big([X = x]\big)$$

Or X admet un moment d'ordre 2, donc la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2\mathbb{P}\big([X = x]\big)$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème 1, la série double $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} x^2\mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big)$ est convergente.

◇ De la même façon, on démontre la convergence de la série double $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} y^2|\mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big)$.

Par critère de comparaison sur les séries doubles à terme général positif, la série double $\sum\limits_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |xy|\mathbb{P}\big([X = x]\cap[Y = y]\big)$ est convergente.
Conclusion : XY admet une espérance.

⋆

Théorème 6 — Condition suffisante d'existence de la covariance

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe.

⋆ Démonstration : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. On a déjà :

$$\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big) = XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Or :

- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc d'après le lemme précédent, XY admet une espérance ;
- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc elles admettent une espérance ;
- la variable aléatoire $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est constante, donc elle admet une espérance.

Par conséquent, $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance.
Conclusion : $\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)$ admet une espérance, autrement dit, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe.

⋆

En pratique, on utilisera assez peu la définition 7, mais plutôt la formule qui suit :

Propriété 6 — Formule de Koenig-Huygens

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Petite remarque
Dans le cas $X = Y$, on retrouve la formule du KH sur la variance.

⋆ Démonstration : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. Dans ce cas $\mathrm{Cov}(X, Y)$ existe et :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\big(XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

linéarité de l'espérance, licite car XY, X et Y admettent une espérance (hypothèse + lemme 2)

⋆

Propriétés 7

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$

P2 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$ *(symétrie)*

P3 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2, Y) = \lambda_1\mathrm{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2\mathrm{Cov}(X_2, Y)$ *(linéarité à gauche)*

P4 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(X, \lambda_1Y_1 + \lambda_2Y_2) = \lambda_1\mathrm{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2\mathrm{Cov}(X, Y_2)$ *(linéarité à droite)*

P5 $\forall a \in \mathbb{R},\ \mathrm{Cov}(X, a) = 0$

P6 Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

✘ Attention !
La réciproque de P6 est fausse... Mais la contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

DÉMONSTRATION :

P1. Immédiat par définition de $\mathrm{Cov}(X, X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

P2. Immédiat par définition de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(Y, X)$.

P3. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
On sait que X_1 et X_2 admettent un moment d'ordre 2, donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ également. Et on sait que Y admet un moment d'ordre 2.
Par conséquent, $\mathrm{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y)$ existe et d'après la formule de Koenig-Huygens :

☞ Rappel...
La somme de VA admettant un moment d'ordre r admet également un moment d'ordre r. Immédiat en utilisant :
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ |(a+b)^r| \leqslant |a^r| + |b^r|$
(avec formule du binôme...).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X, Y) &= \mathbb{E}\big((\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)Y\big) - \mathbb{E}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(\lambda_1 X_1 Y + \lambda_2 X_2 Y) - \big(\lambda_1 \mathbb{E}(X_1) + \lambda_2 \mathbb{E}(X_2)\big)\mathbb{E}(Y) && \text{linéarité de l'espérance, licite car } \mathbb{E}(X_1) \text{ et } \mathbb{E}(X_2) \text{ existent} \\
&= \lambda_1 \mathbb{E}(X_1 Y) + \lambda_2 \mathbb{E}(X_2 Y) - \lambda_1 \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y) - \lambda_2 \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(Y) && \text{linéarité de l'espérance, licite car } \mathbb{E}(X_1 Y) \text{ et } \mathbb{E}(X_2 Y) \text{ existent } (X_1, X_2, Y \text{ ont un moment d} \\
&= \lambda_1 \mathrm{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \mathrm{Cov}(X_2, Y) && \text{formule de Koenig-Huygens}
\end{aligned}$$

P4. Immédiat, par symétrie et linéarité à gauche de la covariance.

P5. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, a) &= \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X)(a - a))\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Confusion d'objets !
Ici, a désigne la VA constante égale à a.

P6. D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) && \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= 0
\end{aligned}$$

⋆

PROPRIÉTÉS 8 — VARIANCE D'UNE SOMME

P1 Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

P2 Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

P3 Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et : $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.

☞ Rappel...
Si X admet une variance, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et
$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

☞ Pour info...
Il existe une formule donnant la variance d'une somme de n VA non nécessairement indépendantes...

DÉMONSTRATION :

P1. Supposons que Xe t Y admettent une variance. Ainsi, x et Y admettent un moment d'ordre 2, et donc $X + Y$ également.
Par conséquent, $X + Y$ admet une variance et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X + Y) &= \mathrm{Cov}(X + Y, X + Y) \\
&= \mathrm{Cov}(X, X + Y) + \mathrm{Cov}(Y, X + Y) && \text{linéarité à gauche de la covariance} \\
&= \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Y, X) + \mathrm{Cov}(Y, Y) && \text{linéarité à droite de la covariance} \\
&= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y) && \text{symétrie de la covariance}
\end{aligned}$$

P2. Immédiat d'après P1 et Propriétés 7 - P6.

P3. Supposons que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une variance. Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 1$: rien à faire.

Petite remarque
Si on initialise à $n = 2$, c'est alors P2...

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$" ; et montrons "$\sum_{k=1}^{n+1} X_k$ admet une variance et $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{V}(X_k)$".
  On a :
  $$\sum_{k=1}^{n+1} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}$$
  Or :
  - ✓ par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance,
  - ✓ X_{n+1} admet une variance,
  - ✓ les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ sont indépendantes, donc par lemme des coalitions, les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont également indépendantes.

  Ainsi, d'après P2, la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}$ admet une variance et :
  $$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1}\right) = \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \mathbb{V}(X_{n+1})$$
  Par conséquent :
  $$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k\right) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) + \mathbb{V}(X_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + \mathbb{V}(X_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{V}(X_k)\end{aligned}$$
  hypothèse de récurrence

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et : $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$.

⋆

PROPRIÉTÉ 9 — **INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ (HP)**

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\left(\mathrm{Cov}(X, Y)\right)^2 \leqslant \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

⋆ DÉMONSTRATION : QCI19 ⋆

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

DÉFINITION 8 — **COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE**

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance non nulle.
Le **coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y)** est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types respectifs de X et Y.

☞ **Rappel...**
$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Petite remarque
$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$

PROPRIÉTÉS 10 — **INTERPRÉTATION DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE**

Soient X et Y deux variables aléatoires admettent une variance non nulle.

P1 $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.

P2 $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre ;

P3 $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre ;

Vocabulaire

Si $\rho(X, Y) = 0$ (càd si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$), on dit que ***X* et *Y* sont non corrélés**.
ATTENTION :

indépendantes $\Longrightarrow$ non corrélées

La réciproque est fausse !

⋆ DÉMONSTRATION : P1 découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz... Le reste fait l'objet de QCl20. ⋆

EXEMPLE 10

En reprenant les variables aléatoires X et Y de Exemples 9 - E2, on a :

- $\mathbb{E}(XY) = 0$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, donc par formule de Koenig-Huygens : $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Conclusion : les variables aléatoires X et Y sont non corrélées, mais ne sont pas indépendantes !