Exercices du chapitre 2
Couples et suites de variables aléatoires discrètes

Technique

Exercice 1 - ●○○○
Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$. Montrer que si f est positive et majorée, alors la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance.

Exercice 2 - ●●○○ - Loi d'un maximum
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Justifier que pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 - ●○○○
On effectue une succession de lancers indépendants d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$; et on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE obtenu ainsi que Y celle du premier FACE obtenu.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leur espérance et variance.
2. En distinguant des cas, déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
3. Vérifier par le calcul que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 1$.

Exercice 4 - ●○○○
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1; n+1]\!]$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = a \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

Exercice 5 - ●○○○
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Une urne contient n balles numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et Y celui de la seconde balle.

1. Donner la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
2. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
3. En déduire la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 - ●○○○
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. On pose $Y = X^2$.
Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes et qu'elles sont pourtant non corrélées.

Exercice 7 - ●○○○ - Avec des Bernoulli
Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$; et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de S_n.
3. La variable aléatoire S_n suit-elle une loi binomiale ?

Exercice 8 - ●○○○ - Avec des Bernoulli (bis)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.
On pose : $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires S et D.
2. Déterminer la loi du couple (S, D). Calculer $\mathrm{Cov}(S, D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 - ●●○○ - Autour de la loi de Poisson

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Poisson de paramètre 1.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

1. Déterminer, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, la loi de S_n. Rappeler son espérance et son écart-type.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n^*.
3. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([S_n^* \leqslant 0]\big) = \mathrm{e}^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$.

Exercice 10 - ●○○○

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. On considère trois variables aléatoires U, V, W indépendantes telles que : $U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $W \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Rappeler les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. Justifier l'existence de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et la calculer.
3. En déduire $\rho(X, Y)$.

Entraînement

Exercice 11 - ●●○○ - Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$.

1. Donner $Z(\Omega)$. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
2. Calculer $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}\big([Z = k]\big)$ et $\mathbb{P}\big([Z = -k]\big)$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Z = k]\big) = 1$.

Exercice 12 - ●●○○ - Minimum et loi uniforme

Dans toute l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$. On note $M = \min(X, Y)$.
   - 1.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X \geqslant k]\big)$.
   - 1.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([M \geqslant k]\big)$.
   - 1.c. En déduire la loi de M.
2. Soient maintenant $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.
   On note $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
   - 2.a. Déterminer la loi de M.
   - 2.b. Notons $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

     Indication : $\forall x \in]-1; +\infty[, \ \ln(1 + x) \leqslant \dots$

Exercice 13 - ●○○○ - Type écrit

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_*^+$). A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, l'auto-stoppeur lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0; 1[$).
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, nombre de PILE obtenus et nombre de FACE obtenus.

1. 1.a. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[N=j]}\big([X = i]\big)$.
   - 1.b. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.
2. Sans aucun calcul, mais en justifiant, donner la loi de Y.
3. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
4. 4.a. Démontrer : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\mathrm{Cov}(N, X)$.
   - 4.b. En déduire $\mathrm{Cov}(N, X)$.

Exercice 14 - ●●●○ - Calcul d'une somme double

Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, on pose $u_{i,j}=\dfrac{1}{(i+j)!}$.

1. 1.a. Établir : $\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ u_{i,j}\leqslant \dfrac{1}{j!}\dfrac{1}{(j+1)^i}$.

   1.b. En déduire que, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0}u_{i,j}$ est convergente et que sa somme, notée s_j, vérifie : $s_j\leqslant\dfrac{2}{j!}$.

   1.c. Démontrer alors que la série double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}u_{i,j}$ est convergente. Pour la suite de l'exercice, on notera $a=\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}u_{i,j}$.
2. Justifier l'existence d'un couple (X,Y) de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :
$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=\frac{1}{a(i+j)!}$$
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, exprimer simplement $\mathbb{P}\big([X+Y=n]\big)$ en fonction de a et n.
4. En déduire la valeur de a.

Concours

Exercice 15 - ●○○○ - EML 1997 E

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est un réel $p\in]0;1[$. Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel non nul.
On effectue N lancers du dé et, si n désigne le nombre de 6 obtenus, alors on lance n fois la pièce. On définit ensuite les variables aléatoires suivantes : Z indique le nombre de 6 obtenus, X indique le nombre de PILE obtenus et Y indique le nombre de FACE obtenus.
Ainsi, $X+Y=Z$.

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Justifier que $X(\Omega)=[\![0;N]\!]$.
3. Soit $n\in[\![0;N]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z=n]$.
4. Établir que pour tous entiers k et n tels que $0\leqslant k\leqslant n\leqslant N$, on a : $\dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n}=\dbinom{N}{k}\dbinom{N-k}{n-k}$. En déduire, pour tout $k\in[\![0;N]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$; puis reconnaître la loi de X.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
7. En exprimant $\mathbb{V}(X+Y)$, calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 16 - ●●○○ - Ecricome 2023 E (sujet 0 numéro 2)

Soit $p\in]0;1[$. On considère une pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE sinon. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du second PILE, et on admet que cet évènement se produit presque-sûrement.
On note alors X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier PILE et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier PILE jusqu'à l'apparition du second PILE.

1. Reconnaître la loi de X_1 et la loi de X_2.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1,X_2).
3. En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.
4. Établir :
$$\forall n\in[\![2;+\infty[\![,\ \mathbb{P}\big([X_1+X_2=n]\big)=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0;1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```python
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y=0
    nb_pile=0
    while .......... :
        if .......... :
            nb_pile=nb_pile+1
        else :
            ..........
    return Y
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.
7. En déduire l'espérance, la variance ainsi que la loi de Y.

Une fois le second PILE obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de FACE, alors on place $n+1$ balles numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue ensuite un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

8. Écrire une fonction **Python** `simul_UV` prenant en argument d'entrée la valeur du réel p et renvoyant une réalisation du couple (U, V). On pourra faire appel à la fonction `simul_Y` définie en question 5..
9. Justifier que $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et préciser $V(\Omega)$.
10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\big([U = k]\big)$.
11. Montrer que la variable aléatoire $U + 1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra. En déduire l'espérance et la variance de U.
12. Montrer que V suit la même loi que U.
13. 13.a. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
    13.b. En déduire la covariance du couple (Y, U).
    13.c. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y, U) est égal à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 17 - ●●○○

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0;1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1; n]\!]$: $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p\mathbb{P}\big([X_{n-1} = k-1]\big)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$; puis déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.
5. 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.
   5.b. En utilisant la question 3., démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k(1-p)$.
   5.c. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = 1$.

Exercice 18 - ●●●○ Oral ESCP 2017 S

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$ selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1, \ldots, J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n-1]\big)$.
2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon. Déterminer la loi de B_i. Exprimer X_n en fonction des B_i et en déduire l'espérance de X_n.
3. Donner la loi de X_4.
4. 4.a. Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :
   $$\mathbb{P}\big([B_i = 1] \cap [B_j = 1]\big) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$
   4.b. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$, avec $i \neq j$. Les évènements $[B_i = 1]$ et $[B_j = 1]$ sont-ils indépendants ?

Exercice 19 - ●●●○ - Type oral

1. **Question de cours**. Formule des probabilités totales.

Un étudiant répond à un questionnaire de 20 questions. A chaque question, il obtient 1 point s'il répond correctement du premier coup, il obtient 0,5 point s'il répond correctement du second coup, et il n'obtient aucun point sinon.
Pour $i \in [\![1; 20]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à la i-ème question, et Y celle égale au nombre total de points obtenus au questionnaire.
A chaque question, il y a k (où $k \in [\![2; +\infty[\![$) réponses possibles, dont une seule est correcte. On suppose que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{20}$ sont indépendantes.

2. 2.a. Pour $i \in [\![1; 20]\!]$, déterminer la loi de Y_i.
   2.b. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
   2.c. Quelle valeur de k maximise $\mathbb{V}(Y)$?
3. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue du premier tour (respectivement du second tour).
   3.a. Déterminer la loi de X_1.
   3.b. Poun tout $j \in [\![0; 20]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $[X_1 = j]$. En déduire la loi de X_2.
4. Retrouver l'espérance de Y.