

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●○○ - Pas des sous-espaces vectoriels !

Dans chaque cas, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Justifier pourquoi.

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
2. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y = x^2 \right\}$
3. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0_2\}$

EXERCICE 2 - ●●○ - Sous-espaces vectoriels

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AMA = 0_n\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $F_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$. Démontrer que F_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des fonctions paires. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
4. Notons E l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ ainsi que F le sous-ensemble de E constitué des suites qui convergent vers 0. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

EXERCICE 3 - ●○○ - Manipulation sur des combinaisons linéaires

On considère les matrices

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2 .
2. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2 .
3. En déduire que $\text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $Z = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\text{Vect}(X_1, X_2)$?

EXERCICE 4 - ●●○

Dans chaque cas, démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{3,1}\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
5. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$
7. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

EXERCICE 5 - ●●●

Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous, et préciser celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
3. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
5. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 6 - ●●●

Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel puis en déterminer une base ainsi que la dimension.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J , puis établir que $F = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
3. En déduire que la famille (I, A, A^2) est une base de F .
4. Déterminer la matrice des coordonnées de J dans la base (I, A, A^2) .

EXERCICE 7 - ●●●

Soient $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid JMJ = M\}$.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

EXERCICE 8 - ●●● - EV de fonctions polynomiales

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) - xP'(x) = 0\}$.

Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

EXERCICE 9 - ●●● - EV de fonctions polynomiales (bis)

On note $u : x \mapsto x^2$.

1. Donner les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Démontrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x(x-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.
3. Démontrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x+1, x \mapsto (x+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Déterminer les coordonnées de u dans cette base.

EXERCICE 10 - ●●● - Famille de fonctions ou de suites

1. Posons $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto e^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.a. Démontrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E . En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3) .

1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?

2. Considérons les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réelles.

2.a. Démontrer que la famille (u, v) est une famille libre de E .

2.b. Notons $F = \{w \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

EXERCICE 11 - ●●● - Matrices symétriques et antisymétriques

On rappelle que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note tM sa **transposée** définie par : ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Soient les ensembles :

• $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *symétriques*

• $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Donner une décomposition de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3. 3.a. Déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
3.b. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, alors cette décomposition est unique.
4. Établir que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.