



3

PROBABILITÉS

COUPLES ET SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

INTRODUCTION...

Ah, les probabilités... Bien évidemment, quand on parle de probabilités, on pense aux jeux de hasard. C'est bien, initialement, en ce sens qu'elles ont été développées. Au fil des siècles, viennent ensuite de nombreux contributeurs pour consolider et développer les connaissances sur ce domaine : Galilée, Fermat, Pascal, Huygens, Moivre, Laplace, Bayes, Lagrange.

Voici une citation de Jean Dieudonné (1906–1992, mathématicien français, un des membres fondateurs du célèbre groupe Bourbaki), datée de 1977 : "Le calcul des probabilités, en tant que discipline, n'existe guère que depuis 1933, comme partie de la théorie moderne de l'Intégration ; elle a hérité de ses propres problèmes et même de son langage, des trois siècles antérieurs au cours desquels le Calcul des probabilités était un mélange de raisonnements d'allure mathématique et de considérations plus ou moins intuitives sur le rôle et l'évaluation du hasard dans les comportements humains ou les phénomènes naturels."

Que s'est-il alors passé en 1933 ? C'est en 1933 que paraît en allemand le manuel *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fondements de la théorie des probabilités) rédigé par Andreï Kolmogorov (1903–1987, mathématicien russe), dans lequel il définit, entre autres, les trois axiomes de probabilités. On lui doit cette formalisation de la théorie des probabilités sur laquelle reposent désormais tous les résultats de probabilités. C'est bien cette formalisation qui a permis à la théorie des probabilités d'être légitimement reconnue comme branche des mathématiques.

POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Qu'est-ce qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{A}$?
2. Soient A, B deux évènements, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, ainsi que $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements.

- **Définition :** $\bigcap_{i \in I} A_i =$; $\bigcup_{i \in I} A_i =$
- **Lois de Morgan :** $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} =$; $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} =$
- $\mathbb{P}(A \cup B) =$
- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}_A(B) =$
- **Définition :** A et B sont incompatibles lorsque :
- **Définition :** $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements lorsque :

- **Définition :** A et B sont indépendants (pour $\mathbb{P}$) lorsque :
- Formule des probabilités composées :

- Formule des probabilités totales :

Autrement dit :

$$\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \omega \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff$$

Rappel...

L'application $\mathbb{P}_A$ ainsi définie est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Attention !

La notion d'incompatibilité n'est pas définie par une probabilité ! En particulier $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ n'implique pas nécessairement que A et B sont incompatibles.

Attention !

La notion d'indépendance est liée à la notion de probabilité ! Deux évènements peuvent être indépendants pour une certaine probabilité, et ne pas l'être pour une autre probabilité (probabilité conditionnelle par exemple).

Important !

On retient surtout que c'est une application de Ω dans $\mathbb{R}$!

3. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$?
4. Si X est une variable aléatoire sur Ω , rappeler les définitions de $[X = a]$ et $[X \leq a]$.
5. La fonction de répartition de X , notée F_X , est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
6. Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

7. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si X possède une espérance et un moment d'ordre 2, alors : $\mathbb{E}(X) =$ et $\mathbb{E}(X^2) =$

8. Théorème de transfert :

9. Formule de Koenig-Huygens :

Une **suite double** est une fonction $u : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On notera $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une telle suite.

THÉORÈME 1

(HP)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double.

Si :

- ✓ $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, u_{i,j} \geq 0$,
- ✓ pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i \geq 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée s_j ($s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$),
- ✓ la série $\sum_{j \geq 0} s_j$ est convergente,

alors :

- pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j \geq 0} u_{i,j}$ est convergente, de somme notée t_i ($t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$),
- la série $\sum_{i \geq 0} t_i$ est convergente,

et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} t_i = \sum_{j=0}^{+\infty} s_j$$

autrement dit :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

Remarque

Le théorème est également valable en échangeant i et j ... En gros : peu importe l'ordre dans lequel on étudie la nature des séries, du moment que l'on fait les deux.

Vocabulaire

Dans le cas de ce théorème, on dit que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j}$ est convergente et sa somme est le réel $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$, égal à $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

EXEMPLE 1

Montrons que la série double $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente et déterminons sa somme.

Conformément à ce qui est mentionné dans le programme officiel, on admet que les théorèmes et techniques classiques concernant les séries simples s'étendent dans le cas des séries doubles.

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

I DÉFINITIONS ET PREMIERS RÉSULTATS

DÉFINITION 2

COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Un **couple de variables aléatoires** (ou couple aléatoire) est une application $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
Plus concrètement, un couple de variables aléatoires Z est la donnée de deux variables aléatoires X et Y toutes deux définies sur Ω ; on note alors $Z = (X, Y)$.
Dans le cas où X et Y sont discrètes, on dit que le couple de variables aléatoires (X, Y) est discret.

Remarque
On définit de la même façon un n -uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (ou vecteur aléatoire) ainsi qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Dans toute la suite du chapitre, (X, Y) désignera un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω , $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n -uplet de variables aléatoires sur Ω et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur Ω .
Nous nous intéresserons essentiellement aux couples de variables aléatoires et travaillerons sur quelques cas classiques de n -uplet ou suites de variables aléatoires.

I.1 LOI JOINTE

DÉFINITION 3

LOI JOINTE D'UN COUPLE

La **loi jointe du couple** (X, Y) est l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \end{cases}$$

♣ **MÉTHODE 1** ♣ Pour déterminer la loi jointe de (X, Y) , on donne :

- $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
- $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

EXEMPLES 2

- E1** On lance deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4, et on note :
- X le minimum des deux nombres obtenus,
 - Y le maximum des deux nombres obtenus.

Donnons la loi jointe du couple (X, Y) , que nous résumerons dans un tableau.

Remarque
Dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et de cardinaux petits, on pourra résumer la loi jointe dans un tableau à double entrée.

- E2** Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $p \in]0; 1[$. On lance n fois une même pièce donnant PILE avec la probabilité p et FACE avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note :
- X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus,
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus.

⚠ Attention !
Certains $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ peuvent être nuls sans que ni $\mathbb{P}([X = x])$ ni $\mathbb{P}([Y = y])$ ne soient nuls...

Commençons par donner les lois de X et Y puis déterminons la loi jointe du couple (X, Y) .

E3 On effectue une infinité de lancers indépendants de la même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$. On note X et Y les variables aléatoires respectivement égales aux rangs du premier PILE et du second PILE. Déterminons la loi jointe du couple (X, Y) .

Conventions

Tout comme on l'avait pour la loi d'une variable aléatoire, on retrouve :

PROPRIÉTÉS 1

SCE ASSOCIÉ À UN COUPLE

- P1** La famille $([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
- P2** La série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente et sa somme est égale à 1.

♥ Astuce du chef ♥

Nous pouvons utiliser ce résultat pour déterminer la valeur d'un paramètre inconnu dans l'expression de la loi jointe d'un couple. En pratique, nous serons un peu plus malins... Voir Exemples 4 - E3.

Remarque

Cette série double peut être une somme finie double si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

★ DÉMONSTRATION : Analogie au cas d'une variable aléatoire, P2 étant une conséquence directe de P1. ★

Là encore, un résultat analogue à ce qui a été vu dans le cas d'une seule variable aléatoire, que l'on admet :

PROPRIÉTÉ 2

Soient I et J deux ensembles finis ou dénombrables.

Si $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est une suite double positive telle que la série double $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{i,j}$ soit convergente de somme égale

à 1, alors pour toutes suites de réels $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et un couple (X, Y) de variables aléatoires sur Ω tels que :

- $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}, Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$
- $\forall (i, j) \in I \times J, \mathbb{P}([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = p_{i,j}$

Remarque

Utile si on demande de vérifier qu'une suite double définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires discrètes. Mais c'est très rare. C'est en revanche plus souvent le cas pour une suite simple dans le cas de la loi d'une VA.

EXEMPLE 3

Dans l'exemple 1, on a établi que la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{i+j}}$ est convergente de somme égale à 4. Définissons alors la suite

$(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ par : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j-2}}$. On a ainsi :

- ✓ $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p_{i,j} \geq 0$
- ✓ la série $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j}$ est convergente de somme égale à 1.

Conclusion : la suite $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définit la loi jointe d'un couple de variables aléatoires.

I.2 LOIS MARGINALES ET LOIS CONDITIONNELLES

DÉFINITIONS 4

LOIS MARGINALES D'UN COUPLE

- D1** La première loi marginale de (X, Y) est la loi de X .
- D2** La seconde loi marginale de (X, Y) est la loi de Y .

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour obtenir les lois marginales à partir de la loi jointe : on obtient la loi de X en utilisant la formule des probabilités totales avec $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme système complet d'événements :

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Bien évidemment...

On utilise la FPT avec le sce $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ pour obtenir la loi de Y ...

Et s'il est possible et utile de le faire : on continue avec les probabilités conditionnelles.

EXEMPLES 4

E1 Reprenons le tableau obtenu dans Exemples 2 - E1 représentant la loi jointe du couple (X, Y) et complétons-le avec les lois marginales.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	

E2 Reprenons la loi jointe du couple obtenue dans Exemples 2 - E3 et déterminons la loi de Y .

⚠ Attention !
S'il y a plusieurs cas dans la loi jointe, on retrouvera ces cas dans les calculs qui suivent...

Conseil

E3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont on donne la loi jointe :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j}j!}$$

Déterminons la valeur de a ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

DÉFINITIONS 5

LOIS CONDITIONNELLES

D1 Soit $y \in Y(\Omega)$. Si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** est l'application

$$\begin{array}{lcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \end{array}$$

D2 Soit $x \in X(\Omega)$. Si $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, alors la **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$** est l'application

$$\begin{array}{lcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0; 1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \end{array}$$

♣ Méthode !

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$, on donne :

- $X(\Omega)$
- $\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

📖 Rappel...

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

EXEMPLE 5

On s'intéresse à une chaîne de production de baguettes magiques mise en place par des elfes de maison. On estime que 10% des baguettes magiques produites sont défectueuses¹. On suppose que le nombre de baguettes produites en une heure est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson de paramètre 10. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes défectueuses produites en une heure. Déterminons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$; puis déduisons-en la loi de Y .

¹ Espérons qu'Ollivander fait mieux...

THÉORÈME 2

LOI DE $Z = f(X, Y)$ (HP ?)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et f une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $Z = f(X, Y)$.

T1 L'application Z est une variable aléatoire sur Ω .

T2 $Z(\Omega) = \{f(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \subset \{f(x, y) \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$

T3

$$\forall z \in Z(\Omega), \mathbb{P}([Z = z]) = \sum_{(x,y) \in E} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

où $E = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid z = f(x, y)\}$.

★ Subtil... ★

On perd l'égalité car dans l'écriture $\{f(x, y) \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$, les choix de x et y sont indépendants et non nécessairement des valeurs associées à la même issue.

Remarque

Au cas par cas, nous verrons comment nous dispenser de l'écriture un peu lourde de cette somme.

EXEMPLES 6

La somme, la différence, le produit, le minimum, le maximum de variables aléatoires sur Ω sont également des variables aléatoires sur Ω .

II INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITIONS 6

INDÉPENDANCE DE VA

D1 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** lorsque :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k = x_k])$$

D3 Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes. On dit que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

Remarque

On peut également définir l'indépendance 2 à 2 d'une suite de VA...
Si on mentionne seulement "indépendance", il s'agit de la mutuelle indépendance.

♣ MÉTHODE 3 ♣ Des méthodes classiques...

1. Pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes : il suffit de trouver un contre-exemple. En particulier, on peut essayer de trouver $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0$ et $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$.
2. Pour déterminer la loi de $X \pm Y$ ou $|X - Y|$, on utilise la FPT (avec $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ ou $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme sce) puis :
 - soit on connaît la loi jointe,
 - soit on connaît une loi conditionnelle associée avec la bonne loi marginale,
 - soit X et Y sont indépendantes et on connaît leur loi.

3. Pour la loi de $\min(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\min(X, Y) \geq z]) &= \mathbb{P}([X \geq z] \cap [Y \geq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \geq z]) \times \mathbb{P}([Y \geq z]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y \end{array} \right\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}([\min(X, Y) = z])$...

4. Pour la loi de $\max(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes et qu'on connaît leur loi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\max(X, Y) \leq z]) &= \mathbb{P}([X \leq z] \cap [Y \leq z]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq z]) \times \mathbb{P}([Y \leq z]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{indépendance de } X \text{ et } Y \\ \text{on connaît les lois de } X \text{ et } Y \end{array} \right\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Puis, si demandé, on retrouve $\mathbb{P}([\max(X, Y) = z])$...

✗ Attention !

Pour $\mathbb{P}([X + Y = z])$, on obtiendra la somme des $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x])$: cette probabilité est nulle dès que $z - x \notin Y(\Omega)$...

→ Réflexe !

Pour tous réels x, y, z :

$$\begin{aligned} \min(x, y) \geq z &\iff \begin{cases} x \geq z \\ y \geq z \end{cases} \\ \max(x, y) \leq z &\iff \begin{cases} x \leq z \\ y \leq z \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque

Méthode identique pour $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

EXEMPLES 7

E1 Les variables aléatoires X et Y introduites dans Exemples 2 – E2 sont-elles indépendantes ?

E2 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Déterminons $\mathbb{P}([X = Y])$.

E3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.
Notons $q = 1 - p$ et $Z = \min(X, Y)$. On a : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^2)$. Voir [Question classique 11](#).

THÉORÈME 3

STABILITÉ DES LOIS BINOMIALES ET LOIS DE POISSON

T1 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1; p) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2; p) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$$

T2 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1) \\ X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2) \\ X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \end{array} \right\} \implies X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

★ DÉMONSTRATION :

T1. A faire en exercice, en utilisant la formule de Vandermonde ci-dessous... Pour tous $k, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq m + n$, on a :

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

T2. Voir [Question classique 20](#).

★

Et si c'est vrai pour deux, c'est vrai pour n ... A condition de pouvoir conserver l'indépendance, et ça, c'est l'affaire du lemme suivant :

LEMME 1

DES COALITIONS

L1 **Cas particulier, de deux variables aléatoires.** Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors toute variable aléatoire fonction de X est indépendante de toute variable aléatoire fonction de Y .

L2 **Cas général, de n variables aléatoires.** Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire fonction des $X_1, \dots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des $X_{p+1}, \dots, X_n$.

Conséquence :

THÉORÈME 4

STABILITÉ DES LOIS BINOMIALES ET LOIS DE POISSON

T1 Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k; p) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array} \right\} \implies \forall N \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^N X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^N n_k; p\right)$$

T2 Soient $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi que $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $\mathbb{R}^{+*}$. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k) \\ (X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite de VA indépendantes} \end{array} \right\} \implies \forall n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket, \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)$$

À retenir...

Cas particulier si les $n_k = 1$, on retrouve que la somme de n VA indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ est une VA qui suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$: ??

★ DÉMONSTRATION :

III ESPÉRANCE DE $f(X, Y)$

Pour commencer, on retrouve le fameux :

THÉORÈME 5

DE TRANSFERT

Soit f une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

La variable aléatoire $f(X, Y)$ admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente et dans ce cas, $\mathbb{E}(f(X, Y))$ est la somme de cette série.

Important !

Cas particulier : sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

EXEMPLE 8

Considérons deux variables aléatoires X et Y dont la loi jointe est définie par :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} ; \quad \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{j+k}{e2^{j+k}j!k!}$$

Justifions que la variable aléatoire 2^{X+Y} admet une espérance et déterminons-la.

Pourquoi ?

Pourquoi peut-on dire que les deux lois marginales sont les mêmes ?

- Par théorème de transfert :

2^{X+Y} admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(j,k) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série double $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$ est convergente, car il s'agit d'une série à terme général positif

- Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$, suffisamment proche de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \frac{1}{e j!} \sum_{k=0}^N \frac{j+k}{k!} \\ &= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^N \frac{k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k-1)!} \right) \quad \swarrow n = k-1 \text{ dans la seconde somme} \\ &= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente.

Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 0} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$ est convergente et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \frac{1}{e j!} \left(j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{e j!} (je + e) \\ &= \frac{j+1}{j!} \end{aligned}$$

- Ensuite, de la même façon que ci-dessus, la série $\sum_{j \geq 0} \frac{j+1}{j!}$ est convergente, de somme égale à $2e$.

- Par conséquent, d'après Théorème 1, la série double $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k])$ est convergente. On en déduit que 2^{X+Y} admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2^{X+Y}) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k} \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j+1}{j!} \\ &= 2e \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 3

LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ admettent toutes une espérance, alors, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la variable aléatoire $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{E}(X_k)$$

★ DÉMONSTRATION : Si on devait la démontrer, on le ferait en trois temps :

- on sait déjà que si X admet une espérance, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$;
- ensuite, on démontrerait le résultat dans le cas d'une somme de deux variables aléatoires en utilisant le théorème de transfert et le théorème 1 ;
- puis on obtiendrait le résultat voulu par récurrence.

★

PROPRIÉTÉS 4

CROISSANCE DE L'ESPÉRANCE

- P1** $\left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0 \text{ (ou } \mathbb{P}([X \geq 0]) = 1) \\ X \text{ admet une espérance} \end{array} \right\} \implies \mathbb{E}(X) \geq 0$
- P2** $\left. \begin{array}{l} \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ (ou } \mathbb{P}([X \leq Y]) = 1) \\ X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance} \end{array} \right\} \implies \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

★ DÉMONSTRATION :

P1. Supposons que $\mathbb{P}([X \geq 0]) = 1$ et que X admet une espérance.

Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}([X = x]) \quad \swarrow \mathbb{P}([X \geq 0]) = 1, \text{ donc si } x < 0, \text{ alors } \mathbb{P}([X = x]) = 0 \\ &= \sum_{x \in X(\Omega), x \geq 0} x \mathbb{P}([X = x]) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

P2. On applique le point précédent à la variable aléatoire $Z = Y - X$, avec la linéarité de l'espérance...

★

Remarque

Je traite ce cas, car le cas " $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$ " est inclus dans le cas $\mathbb{P}([X \geq 0]) = 1$...

PROPRIÉTÉS 5

ESPÉRANCE D'UN PRODUIT DE VA INDÉPENDANTES

- P1** Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors la variable aléatoire XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- P2** Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\prod_{k=1}^n X_k$ admet une espérance et $\mathbb{E} \left(\prod_{k=1}^n X_k \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$.

Utile...

La contraposée peut servir pour montrer que deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes !

✗ Attention !

La réciproque est fautive !

★ DÉMONSTRATION : Le théorème de transfert et le théorème 1 permettent de démontrer P1, puis on en déduit P2 par récurrence, en utilisant le lemme des coalitions.

★

EXEMPLES 9

E1 Soit $p \in]0; 1[$. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-1; 1\} \quad ; \quad \mathbb{P}([X = 1]) = p \quad ; \quad \mathbb{P}([X = -1]) = 1 - p$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on pose $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Déterminons l'espérance de Y_n puis déduisons-en la loi de Y_n .

E2 Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $Y = X_1 X_2$ et $Z = X_2 X_3$. Montrons que Y et Z ne sont pas indépendantes.

E3 On choisit au hasard et de façon équiprobable un point dans le plan parmi les points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$ et $(0; -1)$. On note X la variable aléatoire égale à l'abscisse du point et Y son ordonnée.

- Donnons la loi de X et celle de Y puis leur espérance.

- Que dire de la variable aléatoire XY ?
- Montrons que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Qu'avons-nous ainsi mis en évidence ?

IV COVARIANCE D'UN COUPLE

DÉFINITION 7

COVARIANCE

La **covariance du couple** (X, Y) est le réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, défini par (si existence) :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) \right)$$

Remarque

$\text{Cov}(X, X) =$

LEMME 2

(HP)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance.

⚠ Attention !

Si X et Y sont indépendantes, l'existence de leur espérance suffit à l'existence de l'espérance de XY . Si elles ne sont pas indépendantes, il est possible que XY n'ait pas d'espérance même si X et Y en ont une. On peut aisément trouver un exemple dans le cas où $X = Y$...

★

DÉMONSTRATION :

- Résultat préliminaire. Montrons :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

- Ensuite, d'après le théorème de transfert :

XY admet une espérance si, et seulement si, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est absolument convergente

- ★ Or, d'après le résultat préliminaire :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

D'où :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), 0 \leq |xy| \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \leq \frac{1}{2} \left(x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) + y^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \right)$$

- ★ Démontrons que les séries doubles $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ et $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ sont convergentes.

× Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales, avec $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente et :

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

D'où :

$$\forall x \in X(\Omega), \sum_{y \in Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = x^2 \mathbb{P}([X = x])$$

Or X admet un moment d'ordre 2, donc la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x])$ est convergente.

Par conséquent, d'après le théorème 1, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente.

× De la même façon, on démontre la convergence de la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y^2 \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

Par critère de comparaison sur les séries doubles à terme général positif, la série double $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |xy| \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ est convergente.

Conclusion : XY admet une espérance.

★

THÉORÈME 6

CONDITION SUFFISANTE D'EXISTENCE DE LA COVARIANCE

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y)$ existe.

★ DÉMONSTRATION : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. On a déjà :

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Or :

- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc d'après le lemme précédent, XY admet une espérance ;
- X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc elles admettent une espérance ;
- la variable aléatoire $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ est constante, donc elle admet une espérance.

Par conséquent, $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ est une combinaison linéaire de variables aléatoires admettant une espérance.

Conclusion : $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ admet une espérance, autrement dit, $\text{Cov}(X, Y)$ existe.

★

En pratique, on utilisera assez peu la définition 7, mais plutôt la formule qui suit :

PROPRIÉTÉ 6

FORMULE DE KOENIG-HUYGENS

Si les variables aléatoires X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Remarque

Dans le cas $X = Y$, on retrouve la formule du KH sur la variance.

★ DÉMONSTRATION : Supposons que X et Y admettent un moment d'ordre 2. Dans ce cas $\text{Cov}(X, Y)$ existe et :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{linéarité de l'espérance, licite car } XY, X \text{ et } Y \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{admettent une espérance (hypothèse + lemme 2)} \end{aligned}$$

★

PROPRIÉTÉS 7

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.

P1 $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$

P2 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$

(symétrie)

P3 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)$

(linéarité à gauche)

P4 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2)$

(linéarité à droite)

P5 $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0$

P6 Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

✗ Attention !

La réciproque de P6 est fausse...
Mais la contraposée peut servir
pour montrer que deux variables
aléatoires ne sont pas indépen-
dantes !

★ DÉMONSTRATION :

★

PROPRIÉTÉS 8

VARIANCE D'UNE SOMME

P1 Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

P2 Si X et Y admettent une variance et sont indépendantes, alors $X + Y$ admet une variance et : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

P3 Si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et : $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.

📌 Rappel...

Si X admet une variance, alors
pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet
une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$$

📌 Pour info...

Il existe une formule donnant la
variance d'une somme de n VA
non nécessairement indépen-
dantes...

★ DÉMONSTRATION :

★

PROPRIÉTÉ 9

INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ (HP)

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors :

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

★

DÉMONSTRATION : [Question classique 22](#)

★

Pour terminer, le coefficient de corrélation linéaire et son interprétation :

DÉFINITION 8

COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance non nulle.

Le **coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y)** est le réel, noté $\rho(X, Y)$, défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ désignent les écarts-types respectifs de X et Y .

☞ **Rappel...**

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque

$$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$$

PROPRIÉTÉS 10

INTERPRÉTATION DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une variance non nulle.

P1 $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

- P2**
- $\rho(X, Y) = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement croissante de l'autre ;
 - $\rho(X, Y) = -1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine strictement décroissante de l'autre.

★ DÉMONSTRATION :

P1. Découle immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz...

P2. Supposons que X et Y admettent une variance non nulle.

Remarque

Il est indispensable d'avoir travaillé la démonstration précédente pour comprendre celle-ci...

- Remarquons déjà que :

Y est presque-sûrement fonction affine de X si, et seulement si, X est presque-sûrement fonction affine de Y .

En effet, raisonnons par double implication :

⇒ Supposons que Y est presque-sûrement fonction affine de X , alors il existe deux réels a, b , que l'on considère ensuite, tels que $\mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$.

Montrons que $a \neq 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons $a = 0$.

Dans ce cas :

$$\mathbb{P}([Y = b]) = 1$$

Autrement dit, la variable aléatoire Y est presque-sûrement constante ; et donc de variance nulle : ce qui contredit l'hypothèse initiale. Par conséquent : $a \neq 0$.

On obtient alors :

$$\mathbb{P}\left(\left[X = \frac{1}{a}Y - \frac{b}{a}\right]\right)$$

La variable aléatoire X est donc presque-sûrement fonction affine de Y .

⇐ De la même façon, ou par symétrie des rôles de X et Y .

Dans la suite, établissons donc les résultats dans le cas de Y fonction affine de X .

- Ensuite :

$$\begin{aligned} |\rho(X, Y)| = 1 &\iff \rho(X, Y)^2 = 1 \\ &\iff \left(\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\right)^2 = 1 \\ &\iff \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} = 1 \\ &\iff (\text{Cov}(X, Y))^2 = \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \end{aligned}$$

↙ $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ sont non nulles

Par conséquent :

$ \rho(X, Y) = 1$	si, et seulement si,	il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz
	si, et seulement si,	le discriminant de $t \mapsto \mathbb{V}(tX + Y)$ est nul (voir démo précédente)
	si, et seulement si,	$t \mapsto \mathbb{V}(tX + Y)$ possède une unique racine
	si, et seulement si,	il existe un unique réel α tel que $\mathbb{V}(\alpha X + Y) = 0$
	si, et seulement si,	il existe un unique réel α tel que la variable aléatoire $\alpha X + Y$ est presque-sûrement constante
	si, et seulement si :	$\exists! \alpha, b \in \mathbb{R} / \mathbb{P}([\alpha X + Y = b]) = 1$
	si, et seulement si :	$\exists! a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$

Considérons ensuite deux tels réels a et b . On a ainsi, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(X(aX + b)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(aX + b) \\ &= a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) - a\mathbb{E}(X)^2 - b\mathbb{E}(X) \\ &= a(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) \\ &= a\mathbb{V}(X) \end{aligned}$$

↙ $\mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$
↙ linéarité de l'espérance
↙ formule de Koenig-Huygens

Et ainsi :

$$\rho(X, Y) = \frac{a\mathbb{V}(X)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Enfin, puisque $\mathbb{V}(X) \geq 0$, $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, on obtient que $\rho(X, Y)$ est du signe de a .

Conclusion : $|\rho(X, Y)| = 1$ si, et seulement si, l'une des variables aléatoires est presque-sûrement fonction affine de l'autre ; et, dans ce cas, le coefficient dominant de la fonction affine est du signe de $\rho(X, Y)$.

Peut être utile...

$$\mathbb{P}([X = Y]) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$$

Vocabulaire

Si $\rho(X, Y) = 0$ (càd si $\text{Cov}(X, Y) = 0$), on dit que X et Y sont non corrélés.

ATTENTION :

indépendantes $\implies$ non corrélées

La réciproque est fautive !

EXEMPLE 10

En reprenant les variables aléatoires X et Y de Exemples 9 - E2, on a :

- $\mathbb{E}(XY) = 0$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, donc par formule de Koenig-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
- les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

Conclusion : les variables aléatoires X et Y sont non corrélées, mais ne sont pas indépendantes !