Exercices du chapitre 3
Variables aléatoires discrètes : rappels, couplesb et suites.

Technique

Exercice 1 - ●○○
On effectue une succession de lancers indépendants d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0;1[$; et on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE obtenu ainsi que Y celle du premier FACE obtenu.

1. Donner les lois de X et Y ainsi que leur espérance et variance.
2. En distinguant des cas, déterminer la loi jointe du couple (X, Y).
3. Vérifier par le calcul que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = 1$.

Exercice 2 - ●○○
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1; n+1]\!]$.
On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1; n+1]\!]^2,\ \mathbb{P}\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = a\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).

Exercice 3 - ●○○
Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$. Une urne contient n balles numérotées de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et Y celui de la seconde balle.

1. Écrire une fonction `Python` prenant en argument un entier $n \in [\![2; +\infty[\![$ puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y.
2. Donner la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
3. Déterminer, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 - ●○○
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. On pose $Y = X^2$.
Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes et qu'elles sont pourtant non corrélées.

Exercice 5 - ●○○ - Avec des Bernoulli
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_iX_{i+1}$; et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de S_n.
3. La variable aléatoire S_n suit-elle une loi binomiale ?

Exercice 6 - ●○○ - Avec des Bernoulli (bis)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$.
On pose : $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires S et D.
2. Déterminer la loi du couple (S, D). Calculer $\text{Cov}(S, D)$.
3. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 - ●○○
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère trois variables aléatoires U, V, W indépendantes telles que : $U \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $W \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu)$.
On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

1. Rappeler les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. Justifier l'existence de $\text{Cov}(X, Y)$ et la calculer.
3. En déduire $\rho(X, Y)$.

Entraînement

Exercice 8 - ●●○ - Loi d'un maximum

Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. On considère une urne composée de n boules, numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus.

1. Démontrer que pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big) = \dfrac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9 - ●●○ - Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{2}$. On définit également la variable aléatoire Z par $Z = X - Y$.

1. Justifier que Z possède une espérance et la calculer.
2. Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
3. Donner $\mathbb{P}\big([Z = 0]\big)$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}\big([Z = k]\big)$ et $\mathbb{P}\big([Z = -k]\big)$.

Exercice 10 - ●●○ - Minimum et loi uniforme

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes deux la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X,Y)$ et on admet que M est une variable aléatoire sur Ω.
   - 1.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X \geqslant k]\big)$.
   - 1.b. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([M \geqslant k]\big)$.
   - 1.c. En déduire la loi de M.
2. Soient maintenant $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur Ω, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. On note $M = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
   - 2.a. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([M \geqslant k]\big)$.
   - 2.b. En déduire la loi de M.
   - 2.c. Notons $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = 1]$. Démontrer : $\mathbb{P}(A) \geqslant 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 11 - ●●○ - Conditionnement classique

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$). A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, l'auto-stoppeur lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0;1[$).
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, nombre de PILE obtenus et nombre de FACE obtenus.

1.
   - 1.a. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[N=j]}\big([X = i]\big)$.
   - 1.b. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.
2. Sans aucun calcul, mais en justifiant, donner la loi de Y.
3. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
4.
   - 4.a. Démontrer : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\mathrm{Cov}(N,X)$.
   - 4.b. En déduire $\mathrm{Cov}(N,X)$.

Concours

Exercice 12 - ●○○ - EML 1997 E

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est un réel $p \in]0;1[$. Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel non nul.
On effectue N lancers du dé et, si n désigne le nombre de 6 obtenus, alors on lance n fois la pièce. On définit ensuite les variables aléatoires suivantes : Z indique le nombre de 6 obtenus, X indique le nombre de PILE obtenus et Y indique le nombre de FACE obtenus.
Ainsi, $X + Y = Z$.

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Justifier que $X(\Omega) = [\![0;N]\!]$.
3. Soit $n \in [\![0;N]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$.
4. Établir que pour tous entiers k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, on a : $\dbinom{n}{k}\dbinom{N}{n} = \dbinom{N}{k}\dbinom{N-k}{n-k}$. En déduire, pour tout $k \in [\![0;N]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}\big([X = k]\big)$; puis reconnaître la loi de X.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
7. En exprimant $\mathbb{V}(X+Y)$, calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 13 – ●●○ - Une marche aléatoire

Un mobile se déplace sur un axe comme suit : à l'instant 0, il est au point 0. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si le mobile est à l'instant n sur le point d'abscisse k, alors à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0;1[$, sur le point d'abscisse 0 sinon. On appelle X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. On a donc $X_0 = 0$.

1. Donner la loi de X_1.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1; n]\!]$:
$$\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p\mathbb{P}\big([X_{n-1} = k-1]\big)$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p$; puis déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.
5. 5.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}\big([X_n = n]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$.
   5.b. En utilisant la question 3., démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $\mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = p^k(1-p)$.

Exercice 14 – ●●○ - EML 2024 Appli

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose d'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, et on effectue une succession illimitée de tirages d'une boule avec remise dans l'urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier $i \in [\![1; N]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir i numéros distincts, ainsi $T_i = k$ si on a obtenu i numéros distincts lors des k premiers tirages, mais seulement $i-1$ numéros distincts lors des $k-1$ premiers tirages.

Exemple : on suppose $N = 4$, si les huit premiers tirages donnent

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	3	3	3	1	2	1	4

alors $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 8$.

Partie A. Simulation informatique

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_k.
2. Le programme en langage **Python** ci-dessous définit une fonction **ajout** qui prend en argument une liste **L** et un entier **x**.

```
def ajout(L,x):
    if (x in L)==False:
        L.append(x)
```

Expliquez succinctement comment et à quelle condition l'exécution de la commande `ajout(L,x)` modifie la liste **L**.

3. Recopier et compléter la fonction **Python Simul_T** ci-dessous.
Cette fonction prend en argument deux entiers $N \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1; N]\!]$. Elle a pour but de simuler la variable aléatoire T_i. Dans le script nous notons :
   - **L** la liste sans répétition des numéros sortis lors des tirages effectués ;
   - **k** le rang du tirage en cours ;
   - **x** le résultat du tirage en cours.

```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L=[]
    k=0
    while ...:
        x=rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k=...
    return(...)
```

4. On suppose $N = 3$.
Rédiger un programme **Python** qui calcule et affiche la moyenne de 100 réalisations de `Simul_T(3,2)`.
Que représente le résultat obtenu par rapport à la variable aléatoire T_2 ?

Partie B. Étude de T_2 dans le cas d'une urne contenant trois boules

Dans cette partie on suppose $N = 3$, ainsi l'urne contient exactement trois boules numérotées 1, 2 et 3.

5. Donner l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.
6. Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé.
   6.a. Décrire l'évènement $[T_2 = k] \cap [X_1 = 1]$ à l'aide des évènements $[X_j = 1]$ et $[X_j \neq 1]$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
   6.b. En déduire $\mathbb{P}\big([T_2 = k] \cap [X_1 = 1]\big)$.
   6.c. Montrer que $\mathbb{P}\big([T_2 = k]\big) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$.
7. Justifier que T_2 admet une espérance et la calculer.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_2 = T_2 - 1$.
   Reconnaître une loi usuelle, retrouver l'espérance de T_2 et donner sa variance.

Partie C. Quelques résultats dans le cas général

On retourne au cas général, l'urne contient N boules numérotées de 1 à N.

Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Z_1 = 1 & \text{si } i = 1 \\ Z_i = T_i - T_{i-1} & \text{si } i \geqslant 2. \end{cases}$$

La variable aléatoire Z_i donne le nombre de tirages nécessaires, après le T_{i-1}-ième tirage, pour obtenir un numéro distinct des $i-1$ numéros déjà tirés.

On admet que les variable aléatoires $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendantes.

Décomposition de T_i

9. Soit $i \in [\![2; N]\!]$.
   9.a. Justifier que Z_i suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{N-i+1}{N}$.
   9.b. Exprimer $\mathbb{E}(Z_i)$ et $\mathbb{V}(Z_i)$ en fonction de i et N. Vérifier que ces formules restent vraies pour $i = 1$.
10. Soit $i \in [\![1; N]\!]$. Exprimer T_i comme somme de $Z_1, \dots, Z_i$.

Loi de T_3

11. 11.a. Calculer $\mathbb{P}\big([Z_2 = \ell] \cap [Z_3 = k]\big)$ pour tous ℓ et k dans $\mathbb{N}^*$.
    11.b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}\big([Z_2 + Z_3 = n]\big) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)$$

    11.c. Déterminer la loi de T_3.

Espérance et covariance

12. Soit $i \in [\![1; N]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(T_i) = N \displaystyle\sum_{k=N-i+1}^{N} \frac{1}{k}$.
13. Soient i et j deux entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant N$, montrer que

$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \mathbb{V}(T_i)$$

    où $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$ désigne la covariance de T_i et T_j.

Exercice 15 – ●●● Oral ESCP 2017 S

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \dots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \dots, J_n$ selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est donnée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est donnée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1, \dots, J_n$.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ et $\mathbb{P}\big([X_n = n-1]\big)$.
2. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et vaut 0 sinon.
   Déterminer la loi de B_i. Exprimer X_n en fonction des B_i et en déduire l'espérance de X_n.
3. Donner la loi de X_4.
4. 4.a. Montrer que pour i et j dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i < j$, on a :

$$\mathbb{P}\big([B_i = 1] \cap [B_j = 1]\big) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

   4.b. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$, avec $i \neq j$. Les évènements $[B_i = 1]$ et $[B_j = 1]$ sont-ils indépendants ?