Exercices du chapitre 3
Espaces vectoriels

Technique

Exercice 1 - ●●○○
Dans chaque cas, dire si F est un espace vectoriel ou non.

1. $F = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}\right\}$
2. $F = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f \text{ est paire}\right\}$
3. $F = \left\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(1) = 0\right\}$
4. $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$

Exercice 2 - ●○○○ - EV de matrices
1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMA = 0_n\right\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout réel λ, $E_\lambda = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\right\}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un espace vectoriel.

Exercice 3 - ●○○○ - Manipulation sur des combinaisons linéaires
On considère les matrices $E_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}9\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que X est combinaison linéaire de E_1 et E_2.
2. Montrer que $Y \notin \operatorname{Vect}(E_1, E_2)$.

Exercice 4 - ●○○○ - Manipulation sur des combinaisons linéaires
On considère les matrices $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que X_1 et X_2 sont des combinaisons linéaires de Y_1 et Y_2.
2. Vérifier que Y_1 et Y_2 sont des combinaisons linéaires de X_1 et X_2.
3. En déduire que $\operatorname{Vect}(X_1, X_2) = \operatorname{Vect}(Y_1, Y_2)$.
4. La matrice $A = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ appartient-elle à $\operatorname{Vect}(X_1, X_2)$?

Exercice 5 - ●●○○
Dans chaque cas, dire si F est un espace vectoriel ou non. Si oui, en donner une base et préciser sa dimension.

1. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = y\right\}$
2. $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 1\right\}$
3. $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \ / \ y = x^2\right\}$
4. $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}\right\}$
5. $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}\right\}$
6. $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+y\end{pmatrix}, \ x, y \in \mathbb{R}\right\}$
7. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}$, où $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & -2\end{pmatrix}$
8. $F = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, où $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & -2\end{pmatrix}$
9. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\}$, où $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 3 & -1\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$
10. $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\right\}$
11. $F = \left\{\begin{pmatrix}1 & a & a\\0 & a & b\\0 & 0 & b\end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$
12. $F = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & ab\end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$
13. $F = \left\{\begin{pmatrix}a+b & b & b\\0 & a-b & b\\0 & 0 & a\end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$
14. $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = A\right\}$, où $A = (i^j)_{i,j\in[\![1;n]\!]}$

Exercice 6 - ●●○○
Déterminer le rang de chacune des familles ci-dessous, et préciser celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
3. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$
5. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$

Entraînement

Exercice 7 - ●○○○
Soient a, b, c trois réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix}a & b & c\\b & a+c & b\\c & b & a\end{pmatrix}$$

et on note F l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J, puis montrer que $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
3. La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 8 - ●●○○
Soient $J = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ JMJ = M\}$.
Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 9 - ●●●○ - Matrice nilpotente
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice et un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

- $A^p = 0$
- $\forall k \in [\![1; p-1]\!], \ A^k \neq 0$

1. Démontrer que la famille $(I_n, A, A^2, ..., A^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelle information peut-on en déduire sur p ?

Exercice 10 - ●●●○ - Famille de fonctions ou de suites
1. Posons $f_1 : x \longmapsto e^x$, $f_2 : x \longmapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \longmapsto e^{3x}$. Notons E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   - 1.a. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de E. En déduire le rang de la famille (f_1, f_2, f_3).
   - 1.b. La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle génératrice de E ?
2. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2^n$. Notons E l'espace vectoriel des suites réels.
   - 2.a. Montrer que la famille $\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est libre dans E.
   - 2.b. Notons $F = \big\{w \in E \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+2} - w_{n+1} - 2w_n = 0\big\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base. Quelle est sa dimension ?

Exercice 11 - ●●○○ - Matrices symétriques et antisymétriques
On rappelle que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa **transposée** définie par : ${}^tM = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$. Soient les ensembles :

- $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *symétriques*
- $\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille 2 *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Donner une décomposition de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$ en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
3.
   - 3.a. Déterminer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.
   - 3.b. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, alors cette décomposition est unique.
4. Établir que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 12 - ●●●○ - Matrices symétriques et antisymétriques (le retour)

Soient $n \in [\![2; +\infty[\![$ ainsi que les ensembles :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *symétriques*
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tM = -M\}$: l'ensemble des matrices carrées de taille n *antisymétriques*

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base de chaque ainsi que la dimension.
2. Montrer que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \ / \ M = S + A$$

Exercice 13 - ●●○○ - EV de polynômes

1. Donner les coordonnées du polynôme X^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Démontrer que la famille $\big(1, 1+X, (1+X)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base.
3. Démontrer que la famille $\big(1, X, X(X-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées du polynôme X^2 dans cette base.

Exercice 14 - ●●○○ - EV de polynômes

Notons $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(X) - XP'(X) = 0\}$.
Justifier que E est un espace vectoriel et en déterminer une base ainsi que la dimension.

Exercice 15 - ●●●○ - EV de polynômes

Soient a et b deux réels fixés ainsi que F l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 dont a et b sont racines. Vérifier que F est un espace vectoriel puis déterminer sa dimension.

Concours

Exercice 16 - ●●○○ - Classique !

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - 2I_3)^2$ puis en déduire que $(A - 2I_3)^3 = 0$.
2. Montrer que l'ensemble $E_2 = \big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 2X\big\}$ est un espace vectoriel. En déterminer une base et la dimension.
3. Posons $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - 3.a. Vérifier que $AV \in \text{Vect}(U, V)$.
   - 3.b. Résoudre l'équation $AX = 2X + V$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   - 3.c. Posons $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Considérons $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - 4.a. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   - 4.b. Déterminer la matrice T de sorte que $A = PTP^{-1}$ et vérifier que $T = 2I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. On considère l'ensemble $\mathcal{C} = \big\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\big\}$.
   - 5.a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   - 5.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
$$M \in \mathcal{C} \iff NQ = QN$$
   - 5.c. Démontrer que $\big\{Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ NQ = QN\big\} = \text{Vect}(I_3, N, N^2)$.
   - 5.d. Déterminer alors une base de $\mathcal{C}$ ainsi que sa dimension.
6. On considère l'ensemble $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 + I_3 = A\}$.
   - 6.a. L'ensemble $\mathcal{R}$ est-il un espace vectoriel ?
   - 6.b. Soient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $Q = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :
$$M \in \mathcal{R} \iff Q^2 = I_3 + N$$
   - 6.c. Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que si $Q^2 = I_3 + N$, alors nécessairement, Q et N commutent.
   - 6.d. En déduire, à l'aide de la question 5.c, les matrices $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^2 = I_3 + N$.
   - 6.e. Conclure en déterminant l'ensemble $\mathcal{R}$.