Les Chartreux

3

Ensembles

Introduction...

Si l'on ne devait retenir qu'un seul nom, attaché à la théorie des ensembles, ce serait très certainement celui de Cantor. C'est en effet de la correspondance entre Georg Cantor (1845-1918, né en Russie, naturalisé allemand) et Richard Dedekind (1831-1916, allemand) que naît la notion d'ensemble telle que nous la manipulons actuellement.

Définition d'ensemble selon Cantor : "Nous appelons **ensemble** M toute réunion d'objets m de notre conception, déterminés et bien distincts, et que nous nommons **éléments** de M."
Par la suite, la définition d'ensemble a suscité de vifs débats. Pour la culture, voici en particulier le paradoxe de Russell : *Considérons l'ensemble* $A = \{X \mid X \notin X\}$ *(l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes). Dans ce cas, on a :* $A \in A \iff A \notin A$*, ce qui pose bien évidemment un problème (on parle alors d'incohérence ou inconsistance d'une telle théorie qui permet d'avoir à la fois une assertion et sa négation).* En voici une reformulation : "Dans un village, un barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-ci. Le barbier se rase-t-il lui-même ?".

Ce paradoxe a donc amené à revoir la définition d'ensemble ; en particulier, un ensemble ne peut être une collection d'objets dont l'un de ces objets est l'ensemble lui-même. Autrement dit : un ensemble ne peut se contenir lui-même. Bref, ne rentrons pas dans davantage de considérations qui seraient vite très complexes... la notion d'ensemble reste une notion compliquée, et l'objectif de ce chapitre n'est en aucun cas de manipuler des notions ou outils trop abstraits. Nous nous contenterons des notions de bases accolées à celles d'ensemble, et quelques démonstrations pourront être vues pour parfaire la rédaction et les raisonnements déjà rencontrés.

Définitions 1 — Ensemble, élément, égalité, inclusion, cardinal

D1 Un **ensemble** est une collection d'objets distincts. Ces objets sont appelés **éléments de l'ensemble**. Si E est l'ensemble constitué des éléments $e_1, e_2, \ldots$, on notera $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$.

D2 Soit E un ensemble.

- On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de E ;
- on note $x \notin E$ pour indiquer que x n'est pas un élément de E.

D3 L'ensemble ne comportant aucun élément est appelé **ensemble vide**, noté $\varnothing$.

D4 Soient A et B deux ensembles. On dit que A **et** B **sont égaux**, que l'on note $A = B$, lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

D5 Soient A et E deux ensembles. On dit que A **est inclus dans** E, que l'on note $A \subset E$, lorsque tout élément de A est aussi un élément de E. Lorsque $A \subset E$, on dit que A est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'**ensemble des parties de** E.

D6 Si E est constitué d'un nombre fini d'éléments, ce nombre est appelé **cardinal de** E, noté $\mathrm{Card}(E)$.

Remarque

On manipulera essentiellement des ensembles dont les éléments sont des objets de même nature (tous sont des nombres, ou tous sont des fonctions, ou tous sont des issues d'une même expérience aléatoire...) ; même s'il est tout à fait possible d'avoir un ensemble composé d'éléments de natures différentes.

Vocabulaire

On dira qu'un ensemble est fini lorsqu'il possède un nombre fini d'éléments.

Exemples 1

E1 On connaît et on manipule déjà un certain nombre d'ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ qui sont des ensembles usuels de nombres... Mais aussi :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$[\![1;n]\!] = \underbrace{\{i \in \mathbb{N} \ / \ 1 \leqslant i \leqslant n\}}_{\text{forme compréhensive}} = \underbrace{\{1, 2, \ldots, n\}}_{\text{forme extensive}}$$

E2 Soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{a\}$ est l'ensemble constitué uniquement du nombre a.

E3 $\{1;2\} = \{2;1\}$: *on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les éléments d'un ensemble sont écrits.*

E4 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{+*}$, $[-17;43[$ sont des parties de $\mathbb{R}$.

E5 Pour tout ensemble E, on a : $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$.

E6 Soit $E = \{a;b\}$. On a : $\mathcal{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, E\big\}$.

E7 $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Card}\big([\![1;n]\!]\big) = n$.

Vocabulaire

Un ensemble constitué d'un seul élément est un **singleton**.

Remarque

L'inclusion est *large* (comme le $\leqslant$) ; on utilise également le symbole $\subseteq$ plus explicite. L'inclusion *stricte* est notée $\subsetneq$ et la non-inclusion $\not\subset$ ou $\not\subseteq$.

Retenons au passage l'équivalence (évidente) suivante souvent utile pour démontrer l'égalité de deux ensembles :

$$E = F \iff (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Des propriétés naturelles que nous ne démontrerons pas :

Propriétés 1

Soient E et F deux ensembles

P1 Si $E \subset F$ et que F est fini, alors E est fini et : $\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(F)$

P2 $E = F \iff \begin{cases} E \subset F \\ \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) \end{cases}$

Opérations sur les ensembles

Définitions 2 — Intersection, union et complémentaire

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

D1 L'**intersection** de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble défini par :

$$A \cap B = \big\{x \in E \ / \ (x \in A \text{ et } x \in B)\big\}$$

D2 L'**union** de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble défini par :

$$A \cup B = \big\{x \in E \ / \ (x \in A \text{ ou } x \in B)\big\}$$

D3 Le **complémentaire de** A dans E, noté $\overline{A}$, est l'ensemble défini par :

$$\overline{A} = \big\{x \in E \ / \ x \notin A\big\}$$

D4 La **différence de** B **par** A, notée $B \setminus A$, est l'ensemble défini par :

$$B \setminus A = \big\{x \in E \ / \ (x \in B \text{ et } x \notin A)\big\} = B \cap \overline{A}$$

Vocabulaire

On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

✘ Attention !

Le ou en mathématiques est **inclusif** ; c'est-à-dire qu'il signifie *soit l'un, soit l'autre, soit les deux.*

Remarque

$A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$ et $B \setminus A$ sont également des parties de E.

Exemple 2

Considérons $E = \{1; 2; a, b\}$, $A = \{1; 2\}$, $B = \{a\}$, $C = \{1; a\}$.

- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $B \cap C =$
- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $B \cup C =$
- $\overline{A} =$
- $\overline{B} =$
- $\overline{C} =$
- $A \setminus C =$
- $A \setminus B =$
- $B \setminus C =$

Propriétés 2

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

P1 $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

P2 $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

P3 $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*

P4 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*

P5 $A \cap E = A$; $A \cup \varnothing = A$ *(existence de neutres)*

P6 $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup E = E$

P7 $A \cap A = A$; $A \cup A = A$

P8 $\overline{(\overline{A})} = A$; $\overline{E} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = E$; $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $E \setminus A = \overline{A}$

P9 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *(lois de Morgan)*

P10 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributivité de $\cap$ sur $\cup$)*

P11 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(distributivité de $\cup$ sur $\cap$)*

P12 $A \cap B = \varnothing \iff A \subset \overline{B}$

P13 Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ également et :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

P14 Si E est un ensemble fini, alors A et $\overline{A}$ également et :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

P15 Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ également et :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

Remarque

$A \cap B$ est même le plus grand ensemble vérifiant P1 ; tout comme $A \cup B$ est le plus petit vérifiant P2...

Notation

Du fait de l'associativité, on note $A \cap B \cap C$ au lieu de $A \cap (B \cap C)$ (comme l'on note $1 + 2 + 3$ et non $1 + (2 + 3)$).

À retenir...

Peut parfois servir pour démontrer qu'un intersection est vide.

À retenir...

En particulier, si A et B sont finis et disjoints :

$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$

⋆ Démonstration : Elles ont un intérêt... Mais les exercices permettront de s'entraîner sur les structures de rédaction. ⋆

On peut aisément définir l'intersection et l'union d'un nombre fini, et même infini, d'ensembles... Soit I un sous-ensemble (fini ou infini) de $\mathbb{N}$. Considérons E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On a ainsi les définitions/notations suivantes :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\} \quad ; \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$:

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I,\ x \in A_i) \quad ; \quad x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I \mid x \in A_i)$$

Remarque

Les propriétés précédentes se généralisent à ces unions/intersections finies ou infinies ; en particulier, les lois de Morgan.

Propriétés 3 — **Intersection / union et inclusion**

Soient E un ensemble, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de sous-ensembles de E.

P1 $(\forall i \in I,\ A_i \subset B_i) \Longrightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} B_i$

P2 $(\forall i \in I,\ A_i \subset B_i) \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i$

⋆ Démonstration :

⋆

Exemple 3

Démontrons que $\bigcup_{i=0}^{+\infty} [-i; i] = \mathbb{R}$.

Définitions 3 — Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.

D1 On appelle **produit cartésien**[1] **de E et F** l'ensemble, noté $E \times F$, défini par :

$$E \times F = \{(x, y) \ / \ x \in E, \ y \in F\}$$

Autrement dit, $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y un élément de F.

D2 On note $E^2 = E \times E$ et on généralise ainsi pour $n \in [\![2; +\infty[\![$: $E^n = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{n \text{ fois}}$.

Un peu d'histoire

En hommage à René Descartes (1596-1650, français), mathématicien, physicien, philosophe, dont l'impact sur ces différents domaine est colossal ; et qui a ouvert la voie de la géométrie analytique : ou comment faire de la géométrie avec des nombres...

☞ Pour info...

On pourrait également définir le produit cartésien d'un nombre infini, d'ensembles, mais nous n'aurons pas l'occasion de nous en servir ; même si l'ensemble des suites de nombres réels peut être écrit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$...

Propriétés 4

P1 Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ également et :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

P2 Si E est un ensemble fini, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E^n est un ensemble fini et :

$$\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$$

⋆ Démonstration :

P1. Notons : $p = \text{Card}(E)$ et $q = \text{Card}(F)$, ainsi que : $E = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ et $F = \{f_1, f_2, ..., f_q\}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(e_1, f_1), (e_1, f_2), ..., (e_1, f_q), (e_2, f_1), ..., (e_2, f_q), ..., (e_p, f_1), ..., (e_p, f_q)\} \\ &= \{(e_1, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\} \cup \{(e_2, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\} \cup ... \cup \{(e_p, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\} \end{aligned}$$

Or : pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, chacun des $\{(e_k, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\}$ est constitué de q couples différents (les f_i sont deux à deux distincts), donc est de cardinal q.
De plus, puisque les éléments $e_1, e_2, ..., e_p$ sont deux à deux distincts, l'union écrite ci-dessus est donc une union d'ensembles deux à deux disjoints.
Par conséquent, $E \times F$ est de cardinal fini et :

$$\begin{aligned} \text{Card}(E \times F = &\text{Card}\left(\{(e_1, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\}\right) + \text{Card}\left(\{(e_2, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\}\right) + ... + \text{Card}\left(\{(e_p, f_i), \ i \in [\![1, q]\!]\}\right) \\ &= \underbrace{q + q + ... + q}_{p \text{ fois}} \end{aligned}$$

$= pq$

Conclusion : $E \times F$ est fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

P2. Supposons que E est un ensemble fini. Procédons par récurrence.

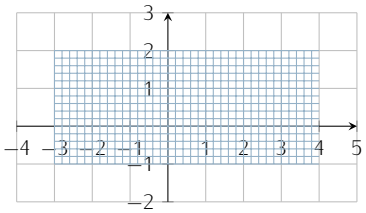
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E^n est un ensemble fini et $\text{Card}(E^n) = \text{Card}(E)^n$.

$\star$

Exemples 4

E1 Posons $E = \{0; 1\}$ et $F = \{a; b\}$. Donnons $E \times F$ ainsi que $F \times E$.

✘ Attention !
Puisque les couples (x, y) et (y, x) ne sont pas les mêmes (on tient compte de l'ordre dans un couple), les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ ne sont, en général, pas égaux.

E2 Considérons $E = \{0; 1\}$. Donnons E^3.

E3 L'ensemble $[-3; 4] \times [-1; 2]$ peut être représenté ainsi :