



3

ANALYSE ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

INTRODUCTION...

Les équations différentielles sont apparues au XVII^{ème} siècle, alors que Newton et Leibniz (entre autres) mettent en place les théories de dérivation et d'intégration ; tout en s'intéressant de près aux phénomènes d'évolutions physiques et en particulier à la mécanique.

Ce n'est qu'à partir du XVIII^{ème} siècle que la résolution de ces équations a été possible, grâce notamment aux travaux d'Euler. De nombreux mathématiciens (D'Alembert, Cauchy, Lipschitz, Lagrange...) ont ensuite œuvré à développer la théorie des équations différentielles.

Nous allons nous intéresser à un cas bien particulier d'équations différentielles ; mais il faut savoir qu'il n'existe pas de méthode systématique pour résoudre de façon exacte toutes les équations différentielles. Pour cette raison, une branche entière des mathématiques – l'analyse numérique – développe des méthodes et algorithmes performants qui permettent la résolution approchée de ces équations très utiles dans de nombreux domaines (mécanique, électricité, économie, chimie...).

I GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I.1 PREMIÈRES DÉFINITIONS

DÉFINITIONS 1

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE, SOLUTION, TRAJECTOIRE, ÉQUILIBRE

D1 On appelle **équation différentielle** toute équation reliant une fonction y (suffisamment régulière) et une ou plusieurs de ses dérivées.

D2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n, b$ des fonctions définies et continues sur I , telles que a_n n'est pas la fonction nulle.

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme :

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

D3 Par convention, la fonction y et ses dérivées sont toutes sur le même membre de l'équation ; et le reste est sur l'autre membre. Dans le cas où ce second membre est la fonction nulle, on dira que l'équation différentielle est **homogène**.

D4 Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle donné vérifiant l'égalité de fonctions. Résoudre l'équation différentielle, c'est trouver toutes ses solutions.

D5 Une **trajectoire** d'une équation différentielle est la courbe d'une solution de cette équation différentielle.

D6 Un **équilibre** d'une équation différentielle est une solution constante de cette équation différentielle.

Remarque

Souvent, f est la lettre désignant une fonction étudiée. Pour éviter toute ambiguïté, on notera y la **fonction inconnue** d'une équation différentielle.

Vocabulaire

Les fonctions $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients** de l'équation différentielle.

⚠ Attention !

Il s'agit d'une égalité de fonctions !

Remarque

Si l'intervalle I n'est pas précisé, on considérera par défaut qu'il s'agit de $\mathbb{R}$.

EXEMPLES 1

E1 L'équation $y'' \times y' + 3y^2 = g$, où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g : x \mapsto e^x + x^2 - 1$, est une équation différentielle. Une solution f de cette équation différentielle est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \times f'(x) + 3f(x)^2 = e^x + x^2 - 1$$

Pour éviter de nommer le membre de droite, on écrira l'équation différentielle ainsi :

$$y'' \times y' + 3y^2 = e^x + x^2 - 1$$

E2 Sont des équations différentielles linéaires :

$$y' + 2y = 2x^2 ; \quad y'' - 3y' + 2y = 0 ; \quad y''' - 3y' + y = e^x + 1 ; \quad y' + 2xy = 0$$

E3 Ne sont pas des équations différentielles linéaires :

$$y' + y^2 = 0 ; \quad \frac{y'}{y} = x ; \quad y'y = e^x$$

E4 L'équation $(E) : y' - 2xy = 2x^2 - 1$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ; et $(E_H) : y' - 2xy = 0$ est son équation différentielle homogène associée.

- Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H) .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x) - 2xf_\lambda(x) &= 2x\lambda e^{x^2} - 2x\lambda e^{x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\lambda : x \mapsto \lambda e^{x^2}$ est solution de (E_H) .

- Cherchons une solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$. On la notera f_p .

Soit $f \in \mathbb{R}_1[x]$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

On a :

$$\begin{aligned} (f \text{ est solution de } (E)) &\iff f' - 2xf = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2xf(x) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, a - 2x(ax + b) = 2x^2 - 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -2ax^2 - 2bx + a = -1 \end{aligned}$$

Confusion d'objets !

Il faut bien être conscient que c'est un abus de notation : le membre de gauche est une fonction, alors que le membre de droite est un réel, et x n'est même pas quantifié ! Bref, c'est un peu une abomination ce truc... sans doute une écriture due à des physiciens ou des économistes...

En fait...

Une équation différentielle est linéaire lorsque le membre de gauche est une expression linéaire en y ...

Vocabulaire

On a ainsi trouvé une **solution particulière** de (E) .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a &= 2 \\ -2b &= 0 \\ a &= -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -1 \\ b &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : l'unique solution de (E) qui soit dans $\mathbb{R}_1[x]$ est la fonction $f_p : x \mapsto -x$.

E5 On considère l'équation (E) : $y' - y^2 = 0$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

- Soit y une solution de (E) telle que $y(0) = 1$. Démontrons que pour tout $t \in [0; 1]$, $y(t) \geq 1$.

Puisque y est solution de (E), on a :

$$\forall t \in [0; 1], y'(t) = y(t)^2$$

Ainsi :

$$\forall t \in [0; 1], y'(t) \geq 0$$

La fonction y est donc croissante sur $[0; 1]$. Et comme $y(0) = 1$, on a :

$$\forall t \in [0; 1], y(t) \geq 1$$

- Déduisons-en toutes les solutions de (E) telles que $y(0) = 1$.

- * Soit y une solution de (E) telle que $y(0) = 1$. On a :

$$(y \text{ est solution de (E)}) \Leftrightarrow \forall t \in [0; 1], y'(t) - y(t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0; 1], y'(t) = y(t)^2$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0; 1], \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1$$

point précédent : $\forall t \in \mathbb{R}^+, y(t) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} / \forall t \in [0; 1], \frac{-1}{y(t)} = t + C$$

Or $y(0) = 1$, d'où $C = -1$. Ainsi :

$$\forall t \in [0; 1], y(t) = \frac{1}{1-t}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est la seule solution possible du problème.

- * Réciproquement, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$:

- ✓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$,
- ✓ vérifie (E),
- ✓ prend la valeur 1 en 0.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est solution du problème.

Conclusion : la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est la seule fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ vérifiant (E) et telle que $f(0) = 1$.

Pour info...

Il n'existe aucune fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant qui soit solution de (E) telle que $y(0) = 1$. En effet, en procédant comme dans l'exemple, on trouverait également $C = -1$; sauf qu'on aurait :

$$\forall t \neq 1, y(t) = \frac{1}{1-t}$$

et $y(1)$ vérifierait $\frac{-1}{y(1)} = 0$: impossible.

I.2 LA LINÉARITÉ, C'EST LE PIED !

PROPRIÉTÉS 1

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS D'UNE EDL

Soient (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation différentielle linéaire homogène associée. Notons S_E l'ensemble des solutions de E, S_H l'ensemble des solutions de (E_H) .

P1 S_H est un espace vectoriel.

P2 Toute solution de (E) est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) une solution quelconque de (E_H) . Autrement dit :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

Ou encore, en notant f_p une solution particulière de E :

$$S_E = \{f_p + f_H / f_H \in S_H\}$$

Important !

Cette structure de l'ensemble des solutions est importante et nous guide sur la méthode à mettre en œuvre pour résoudre une EDL...

* DÉMONSTRATION : Voir QUESTION CLASSIQUE 24 pour le cas particulier d'une EDL1 à coefficients constants. La méthode s'adapte dans le cas général.

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ ainsi que b_1 et b_2 des fonctions continues sur I .

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_2$$

Si f_1 est une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) , alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution particulière de

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

★ DÉMONSTRATION : Soient f_1 une solution particulière de (E_1) et f_2 une solution particulière de (E_2) . Soient également $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Puisque f_1 et f_2 sont des solutions respectives de (E_1) et (E_2) , elles sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , et donc $\lambda f_1 + \mu f_2$ également.

Puis, par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^{(k)} &= \sum_{k=0}^n a_k (\lambda_1 f_1^{(k)} + \lambda_2 f_2^{(k)}) && \swarrow \text{linéarité de la somme} \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n a_k f_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=0}^n a_k f_2^{(k)} && \swarrow f_1 \text{ est solution de } (E_1) \text{ et } f_2 \text{ de } (E_2) \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$. ★

EXEMPLE 2

Une solution particulière de $y' + y = 1$ est la fonction $f_1 : x \mapsto 1$.

Une solution particulière de $y' + y = x$ est la fonction $f_2 : x \mapsto x - 1$.

Conclusion : par principe de superposition, une solution particulière de $y' + y = 3 + 2x$ est la fonction $f_p : x \mapsto 2x + 1$.

Ciblons maintenant sur l'essentiel : les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 à coefficients constants.

II EDL DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 2

EDL1 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0 et a_1 des réels tels que $a_1 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I .

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_1 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$:

$$a_1 y' + a_0 y = b \iff y' + \frac{a_0}{a_1} y = \frac{b}{a_1}$$

Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL1 normalisées de la forme : $y' + ay = b$ ($a \in \mathbb{R}$, b une fonction continue sur I).

Si l'EDL1 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

II.1 RÉOLUTION D'UNE EDL1

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$,
- trouver une solution particulière de $y' + ay = b$...

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$. On en a même une base : $(x \mapsto e^{-ax})$.

★ DÉMONSTRATION : Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

⇐ Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que nous considérons ensuite, tel que : $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$.

- * La fonction $x \mapsto -ax$ est affine donc $\mathcal{C}^1$ sur I . Par conséquent, f est $\mathcal{C}^1$ sur I .
- * Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) + af(x) &= -a\lambda e^{-ax} + a\lambda e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de $y' + ay = 0$.

⇒ Soit f une solution de $y' + ay = 0$. Montrons : $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$.
Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x)e^{ax} = \lambda$$

Posons alors la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{ax}$ et montrons qu'elle est constante sur I .

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur I , car elle est solution de $y' + ay = 0$, donc la fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur I , comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + f(x)ae^{ax} \\ &= e^{ax}(f'(x) + af(x)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \leftarrow f \text{ est solution de } y' + ay = 0$$

Par conséquent, la fonction g est dérivable et de dérivée nulle sur un intervalle, cette fonction est donc constante sur I . Il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I, g(x) = \lambda$. Autrement dit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax}$$

Conclusion : $(f \text{ est solution de } y' + ay = 0) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{-ax})$

★

EXEMPLES 3

E1 L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficients constants dont l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

E2 On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 6$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
L'ensemble des solutions de $y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière.**
On remarque que la fonction $x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' - 3y = 6$ est $\{x \mapsto -2 + \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Remarque

Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière... Une idée à avoir en tête : la chercher "sous la même forme" que le second membre.

E3 Résolvons l'équation différentielle $y' + y = x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**
L'ensemble des solutions de $y' + y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- **Solution particulière.**
On remarque que la fonction $x \mapsto x$ est une solution particulière de (E).

Conclusion : l'ensemble des solutions l'équation différentielle $y' + y = x + 1$ est $\{x \mapsto x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

♣ MÉTHODE 1 ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y' + ay = b$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si b est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{b}{a}$ convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

II.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL1

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y' + ay = b$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 2

DE CAUCHY SUR EDL1

Si a est un réel et b une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et la condition $y(x_0) = y_0$ en est la **condition initiale**.

* DÉMONSTRATION : En exercice.

*

Ce théorème permet alors de dire que si deux trajectoires d'une EDL1 ont un point commun, alors elles sont identiques. Ou bien, par contraposée : deux trajectoires différentes d'une EDL1 ne se croisent jamais. Ou encore : deux trajectoires d'une EDL1 sont soit identiques, soit d'intersection vide.

En effet :

Si deux trajectoires ont un point commun, en (x_0, y_0) , alors les deux solutions associées vérifient le même problème de Cauchy...

♣ MÉTHODE 2 ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 donnée,
- on utilise la condition initiale donnée pour déterminer la valeur de la constante λ dans la forme générale des solutions.

III EDL DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

DÉFINITION 3

EDL2 À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soient a_0, a_1, a_2 des réels tels que $a_2 \neq 0$ et b une fonction définie et continue sur I . On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$$

où $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ est la fonction inconnue.

Puisque $a_2 \neq 0$, on a, pour tout $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b \iff y'' + \frac{a_1}{a_2} y' + \frac{a_0}{a_2} y = \frac{b}{a_2}$$

Vocabulaire

On dit alors qu'on a normalisé l'équation différentielle.

Dans la suite, nous ne considérerons que des EDL2 normalisées de la forme : $y'' + ay' + by = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$, c une fonction continue sur I).
Si l'EDL2 n'est pas normalisée, on commencera toujours par le faire...

III.1 RÉOLUTION D'UNE EDL2

Dans la première partie, nous avons vu le résultat :

$$\text{solution générale de l'EDL} = \text{solution particulière de l'EDL} + \text{solution générale de l'équation homogène associée}$$

L'idéal serait donc maintenant de voir comment :

- résoudre l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$,
- trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$...

Pour l'équation homogène, commençons par une petite définition, qui n'est pas sans nous rappeler quelques souvenirs...

DÉFINITION 4

ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ le discriminant associé à l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

T1 Si $\Delta > 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mid \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

T2 Si $\Delta = 0$, alors l'équation $r^2 + ar + b = 0$ admet une solution r_0 et :

$$(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x})$$

Autrement dit : l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est $\{x \in I \mid (\lambda x + \mu)e^{r_0 x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Remarque

On retrouve la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de $y'' + ay' + by = 0$. On en a même une base :

• si $\Delta > 0$:

$$(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$$

• si $\Delta = 0$:

$$(x \mapsto x e^{r_0 x}, x \mapsto e^{r_0 x})$$

★ DÉMONSTRATION :

T1. Supposons $\Delta > 0$ et notons r_1 et r_2 les deux solutions distinctes de $r^2 + ar + b = 0$.

Il s'agit de démontrer une équivalence. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que : $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) + af'(x) + bf(x) &= \lambda r_1^2 e^{r_1 x} + \mu r_2^2 e^{r_2 x} + a(\lambda r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}) + b(\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}) \\ &= \lambda e^{r_1 x}(r_1^2 + ar_1 + b) + \mu e^{r_2 x}(r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont solutions de } r^2 + ar + b = 0$$

Ainsi f est solution de $y'' + ay' + by = 0$.

⇐ Soit f une solution de $y'' + ay' + by = 0$. Montrons : $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$.

Transformons le résultat à établir... On a :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x)e^{-r_1 x} = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Posons alors la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{-r_1 x}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , car elle est solution de $y'' + ay' + by = 0$, donc la fonction g est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-r_1 x} - r_1 f(x)e^{-r_1 x} \\ &= e^{-r_1 x}(f'(x) - r_1 f(x)) \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -r_1 e^{-r_1 x}(f'(x) - r_1 f(x)) + e^{-r_1 x}(f''(x) - r_1 f'(x)) \\ &= e^{-r_1 x}(f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \\ &= e^{-r_1 x}(-af'(x) - bf(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x)) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0 \\ &= e^{-r_1 x}((-a - 2r_1)f'(x) + (r_1^2 - b)f(x)) \\ &= e^{-r_1 x}((r_2 - r_1)f'(x) - r_1(r_2 - r_1)f(x)) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} r_1 + r_2 = -a \text{ et } r_1 r_2 = b \\ &= (r_2 - r_1)e^{-r_1 x}(f'(x) - r_1 f(x)) \\ &= (r_2 - r_1)g'(x) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{calcul ci-dessus} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction g' est solution de l'équation $y' - (r_2 - r_1)y = 0$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que :

$$\forall x \in I, g'(x) = \alpha e^{(r_2 - r_1)x}$$

Et donc, puisque $r_2 - r_1 \neq 0$ (car $r_1 \neq r_2$) et que I est un intervalle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $x \in I$:

$$g(x) = \lambda + \frac{\alpha}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)x}$$

En posant $\mu = \frac{\alpha}{r_2 - r_1}$, on obtient :

$$\forall x \in I, g(x) = \lambda + \mu e^{(r_2 - r_1)x}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

Conclusion : $(f \text{ est solution de } y'' + ay' + by = 0) \iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in I, f(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})$.

T2. Supposons $\Delta = 0$ et notons r_0 l'unique solution de $r^2 + ar + b = 0$. Raisonnons par double implication.

⇒ Sans difficulté, en utilisant le fait que $r_0^2 + ar_0 + b = 0$...

Rappel...

Si $x^2 - Sx + P = 0$ admet deux solutions (distinctes ou non) notées x_1 et x_2 , alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$ (car on a alors $x^2 - Sx + P = (x - x_1)(x - x_2) \dots$).

Important !

Le fait que I soit un intervalle est nécessaire... Si $h' = 0$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $h = C_1$ sur $]-\infty; 0[$ et $h = C_2$ sur $]0; +\infty[$...

⇒ On raisonne de la même façon que pour T1 ; en posant cette fois $g : x \mapsto f(x)e^{-r_0x}$.
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, de la même façon que précédemment, on obtient, pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 0$$

Puisque I est un intervalle, il existe donc un réel λ tel que pour tout $x \in I$, $g'(x) = \lambda$. Et donc :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, g(x) = \lambda x + \mu$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0x}$$

Conclusion : (f est solution de $y'' + ay' + by = 0$) $\iff (\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, f(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0x})$.

★

Remarque

Les calculs de $g'(x)$ et de $g''(x)$ du cas précédent sont encore valables : ils ne nécessitent pas que $r_1 \neq r_2$.

EXEMPLES 4

E1 L'équation $y'' - y' - 6y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$. Les solutions de $r^2 - r - 6 = 0$ sont -2 et 3 .

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - y' - 6y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{3x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E2 L'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. L'unique solution de $r^2 + 2r + 1 = 0$ est -1 .

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 0$ est $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E3 On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- **Solution particulière.**

On remarque que la fonction $x \mapsto 1$ est une solution particulière de $y'' + 2y' + y = 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + 2y' + y = 1$ est $\{x \mapsto 1 + (\lambda x + \mu)e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E4 Résolvons l'équation différentielle $y'' - 4y = 4x + 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- **Solution particulière.**

Remarquons que :

* la fonction $x \mapsto \frac{-1}{4}$ est solution particulière de $y'' - 4y = 1$.

* la fonction $x \mapsto -x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x$.

Par principe de superposition, la fonction $x \mapsto \frac{-1}{4} - x$ est solution particulière de $y'' - 4y = 4x + 1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' - 4y = 4x + 1$ est $\{x \mapsto \frac{-1}{4} - x + \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

E5 Résolvons l'équation différentielle $y''' - y' = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarquons que l'équation différentielle $y''' - y' = 0$ est en fait une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants sur y' .

Soit $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Posons $f = y'$ de sorte que

$$y''' - y' = 0 \iff f'' - f = 0$$

Or $f'' - f = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont 1 et -1 . L'ensemble des solutions de $f'' - f = 0$ est alors $\{x \mapsto ae^x + be^{-x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Par conséquent :

$$y''' - y' = 0 \iff y' \in \{x \mapsto ae^x + be^{-x}, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\iff \exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = ae^x + be^{-x}$$

$$\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = ae^x - be^{-x} + c$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y''' - y' = 0$ est $\{x \mapsto ae^x - be^{-x} + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

✍ Rédaction

Il n'est pas nécessaire de poser $f = y'$, mais cela permet peut-être, dans un premier temps, de bien voir l'EDL2 sur y' .

✗ Attention !

Ne pas oublier le "+c".

Remarque

Cet ensemble est d'ailleurs égal à $\text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x \mapsto 1)$

♣ **MÉTHODE 3** ♣ Pour déterminer une solution particulière de $y'' + ay' + by = c$:

- soit on en trouve une évidente (en appliquant éventuellement le principe de superposition pour décomposer la recherche); en particulier, si c est constante, la fonction constante $x \mapsto \frac{c}{b}$ (quand $b \neq 0$) convient;
- soit on se laisse guider par l'énoncé...

III.2 PROBLÈME DE CAUCHY SUR EDL₂

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que l'équation (E) : $y'' + ay' + by = c$ admet une infinité de solutions... En revanche, le théorème suivant permet, grâce à une contrainte supplémentaire, d'obtenir l'unicité d'une solution.

THÉORÈME 4

DE CAUCHY SUR EDL₂

Si a et b sont des réels réels et c une fonction continue sur I , alors pour tous $x_0 \in I$ et $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, le problème $\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = y_0 ; y'(x_0) = z_0 \end{cases}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, possède une et une seule solution.

Vocabulaire

Un tel problème est appelé **problème de Cauchy** et les conditions $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$ en sont les **conditions initiales**.

★ DÉMONSTRATION : Celui-ci, on l'admet ! ★

♣ **MÉTHODE 4** ♣ Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée,
- on utilise les conditions initiales données pour déterminer les valeurs des constantes λ et μ dans la forme générale des solutions.

EXEMPLE 5

Résolvons le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 - 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- **Résolution de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$.**

Cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

- * **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.**

L'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- * **Solution particulière.**

Remarquons que la fonction $x \mapsto x$ est solution particulière de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = 1 - 2x$ est $\{x \mapsto x + \lambda e^x + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Le problème donné est un problème de Cauchy, qui admet donc une unique solution, notée f . D'après ce qui précède, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que l'on considère ensuite, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \lambda e^x + \mu e^{-2x}$$

Or $f(0) = f'(0) = 0$, d'où :

$$\lambda + \mu = 0 ; 1 + \lambda - 2\mu = 0$$

Mais :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = -1 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} \lambda = \frac{-1}{3} \\ \mu = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion : l'unique solution du problème de Cauchy est la fonction $f : x \mapsto x - \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$.

Remarque

Ne pas hésiter à commencer par calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ avant de donner $f'(0)$...