

EXERCICES DU CHAPITRE 3

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●○ - Résolution d'EDL1

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y' + 2y = 2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y' - y = 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y' - y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $y' - y = 5x - 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
5. $y' + y = e^x + x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
6. $y' + y = \frac{1 + x \ln(x)}{x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$
7. $y' - 3y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.
8. $y' - 2y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction polynomiale de degré 2.
9. $y' - 4y = e^{4x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{4x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
10. $y' + y = 2xe^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 - ●●○ - Résolution d'EDL2

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y'' + y' - 2y = 4$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y'' + y' - 6y = 6x - 1$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y'' - 2y' + y = x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière qui soit une fonction affine.
4. $y'' - 4y' + 3y = x^2$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière dans $\mathbb{R}_2[x]$.
5. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
6. $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3 - ●●○ - Problèmes de Cauchy

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Justifier qu'il existe une unique fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = -2e^{-x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et la déterminer.

2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$, d'inconnue y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 - ●●○ - Quelques EDL3...

Résoudre les équations différentielles données.

1. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $y''' - y'' = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
3. $y''' - 2y'' + y' = 0$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 5 - ●●○ - Méthode de variation de la constante

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Résoudre $y' + y = 0$.
2. Soit λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Posons $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Établir :

$$(f \text{ est solution de } (E)) \iff \left(\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \right)$$

3. En déduire une solution particulière de (E) .
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E) .

EXERCICE 6 – ●●○ – Méthode de variation de la constante

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^{-x}$, où $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^x$, où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

EXERCICE 7 – ●●○ – Un premier système différentiel

Soient $x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre :

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= y \end{cases}$$

EXERCICE 8 – ●●○ – EDL1 à coefficients non constants (cas général)

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, et on note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) .

1. Justifier que a possède des primitives sur I . On notera A l'une d'elles.
2. Soit A une primitive de a sur I .
Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_H) est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. Supposons que (E) possède au moins une solution, notée f_p .
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Établir que f est solution de $y' + ay = b$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f_p(x) + \lambda e^{-A(x)}$.
4. Soient λ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit solution de (E) .
5. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E) .
6. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

7. Applications.

7.a. Résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7.b. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$, où y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

EXERCICE 9 – ●●○ – Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y) \quad (*)$$

1. Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
 - 1.a. Que dire de f dans le cas où $f(0) = 0$?
Dans toute la suite de l'exercice, on supposera que $f(0) \neq 0$.
 - 1.b. Déterminer $f(0)$.
 - 1.c. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}$.
 - 1.d. En déduire une équation différentielle vérifiée par f .
 - 1.e. En déduire qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax}$.
2. Conclure.

EXERCICE 10 – ●●○ – Équation fonctionnelle

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1 ; f(0) = -4 \quad (*)$$

1. Considérons f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(*)$. Posons $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.
 - 1.a. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
 - 1.b. En déduire une équation différentielle vérifiée par f .
 - 1.c. Déterminer alors la fonction f .
2. Conclure sur l'ensemble des solutions de $(*)$.