

EXERCICES DU CHAPITRE 4

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES : RAPPELS, COUPLES ET SUITES.

TECHNIQUE

EXERCICE 1 – ●●●

On effectue une succession de lancers indépendants d'une même pièce donnant PILE avec la probabilité $p \in]0; 1[$; et on note X la variable aléatoire égale au rang du premier PILE obtenu ainsi que Y celle du premier FACE obtenu.

- Donner les lois de X et Y ainsi que leur espérance et variance.
- En distinguant des cas, déterminer la loi jointe du couple (X, Y) .

- Vérifier par le calcul que : $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 1$.

EXERCICE 2 – ●●●

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ainsi que X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = a \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

- Déterminer la valeur de a .
- Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
- Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

EXERCICE 3 – ●●●

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. On pose $Y = X^2$.

Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes et qu'elles sont pourtant non corrélées.

EXERCICE 4 – ●●● – Avec des Bernoulli

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_i = X_i X_{i+1}; \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } S_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

- Déterminer, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_i .
- En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de S_n .
- La variable aléatoire S_n suit-elle une loi binomiale ?

EXERCICE 5 – ●●● – Avec des Bernoulli (bis)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose : $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

- Déterminer les lois des variables aléatoires S et D .
- Déterminer la loi du couple (S, D) . Calculer $\text{Cov}(S, D)$.
- Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 6 – ●●●

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{++}$. On considère trois variables aléatoires U, V, W indépendantes telles que : $U \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $W \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $V \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$.

On pose $X = U + V$ et $Y = V + W$.

- Rappeler les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
- Justifier l'existence de $\text{Cov}(X, Y)$ et la calculer.
- En déduire $\rho(X, Y)$.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 7 – ●●● – Deux géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètres respectifs $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{2}$. On définit également la variable aléatoire Z par $Z = X - Y$.

- Justifier que Z possède une espérance et la calculer.

2. Décrire l'évènement $[X = Y]$ puis en déduire sa probabilité.
3. Donner $\mathbb{P}([Z = 0])$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}([Z = k])$ et $\mathbb{P}([Z = -k])$.

EXERCICE 8 - ●●○ - Avec des lois uniformes

Soit $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$. Une urne contient n balles numérotées de 1 à n . On tire successivement et sans remise 2 balles de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la première balle et Y celui de la seconde balle.

1. Écrire une fonction **Python** prenant en argument un entier $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ puis renvoyant une réalisation de la variable aléatoire Y .
2. Donner la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
3. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$. En déduire la loi de Y .
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. On note $Z = \max(X, Y)$.
 - 5.a. Démontrer que pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $\mathbb{P}([Z \leq k]) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.
 - 5.b. En déduire la loi de Z .
 - 5.c. Calculer l'espérance et la variance de Z .

EXERCICE 9 - ●●○ - Avec des lois uniformes (bis)

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

On considère p urnes numérotées de 1 à p contenant chacune n boules numérotées de 1 à n . On extrait une boule dans chaque urne et on note, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée dans l'urne numéro i .

On pose $Y = \max(X_1, \dots, X_p)$.

1. Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Déterminer, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}([X_i \leq k])$.
2. Déterminer la loi de Y .
3. Démontrer :

$$\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^p$$

Simplifier cette expression dans le cas où $p = 2$.

4. On suppose $p = 2$ et on pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

EXERCICE 10 - ●●○

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que :

$$X(\Omega) = \{1; 2\} ; \quad Y(\Omega) = \mathbb{N} ; \quad \forall (i, j) \in \{1; 2\} \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{q^j}{2^i}$$

avec q un réel de $]0; 1[$.

1. Déterminer la valeur de q .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. On pose $Y' = Y + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y' puis en déduire l'espérance de Y .
5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
6. On pose $Z = XY$ et $T = \frac{Y}{X}$.
 - 6.a. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.
 - 6.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z .

EXERCICE 11 - ●●○ - Conditionnement classique

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$). A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, l'auto-stoppeur lance une pièce donnant PILE avec la probabilité p ($p \in]0; 1[$).

On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, nombre de PILE obtenus et nombre de FACE obtenus.

1. 1.a. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[N=j]}([X = i])$.
 - 1.b. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp .
2. Sans aucun calcul, mais en justifiant, donner la loi de Y .
3. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
4. 4.a. Démontrer : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\text{Cov}(N, X)$.
 - 4.b. En déduire $\text{Cov}(N, X)$.