Les Chartreux

4

Analyse

Comparaison de fonctions

Introduction...

La notion de limite (historiquement introduite par l'étude des suites et des séries) a nécessité un travail conséquent et a suscité d'importants débats au sein de la communauté mathématique... On pouvait déjà voir, autour du IIIème siècle avant Jésus-Christ : "*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*"

Nous sommes au XVIIIème siècle quand D'Alembert, Leibniz et Euler tentent une définition formelle de la notion de limite. Le calcul différentiel a déjà débuté, en lien avec l'astronomie et la mécanique, et les termes "infiniment petit", "infiniment grand", "infinitésimal" sont souvent utilisés de façon intuitive (via une approche visuelle ou géométrique) mais peu rigoureuse.
Le développement de l'analyse entraîne une volonté de rigueur mathématique sans précédent. Les récents travaux sur la géométrie prouvent qu'il n'est pas possible de construire les mathématiques sur une approche géométrique et intuitive. Par la suite, Cauchy donnera, au début du XIXème siècle, une définition plutôt satisfaisante de la limite ; mais la difficulté est ailleurs à cette époque : la définition même de l'ensemble des réels est imprécise et ne permet pas une définition parfaitement rigoureuse et unanime de limite. Quelques décennies plus tard, après le travail de Bernhard Bolzano (1781-1848, tchèque) resté dans l'ombre, les travaux de Karl Weierstrass (1815-18897, allemand) mettent le point final à la construction de $\mathbb{R}$ et fournissent ainsi une définition rigoureuse de continuité d'une fonction et de la limite, à l'aide des fameux epsilon (cette définition est sensiblement celle utilisée actuellement).

Définition de limite par Cauchy : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.*".

Pour bien démarrer...

1. Quelles méthodes peut-on mettre en œuvre pour étudier les variations d'une fonction ?
   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
   M1. Si f est dérivable, on peut dériver f...
   M2. On peut également utiliser les propriétés sur les sommes de fonctions monotones :
   - la somme de fonctions croissantes sur I est une fonction croissante sur I ;
   - la somme de fonctions décroissantes sur I est une fonction décroissante sur I.

   M3. Sinon, on revient à la définition :
   - f est croissante sur I lorsque : $\forall (x, y) \in I^2,\ \left(x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)\right)$
   - f est croissante sur I lorsque : $\forall (x, y) \in I^2,\ \left(x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)\right)$

2. Définition quantifiée de fonction f possédant une limite finie en $+\infty$.
   Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
   f possède une limite finie en $+\infty$ lorsque : $\exists \ell \in \mathbb{R}\ /\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ \left(x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$

★Subtil...★
Ne pas confondre "f possède une limite finie en $+\infty$" et f tend vers ℓ en $+\infty$"...

3. Définition quantifiée de fonction f tend vers un réel ℓ en un réel a.
   Soit f une fonction définie au voisinage de $+a$, sauf en a.
   f possède tend vers ℓ en a lorsque : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in I,\ \left(x \in [a - \delta; a + \delta] \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\right)$

4. Définition quantifiée de fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
   Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
   f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsque : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in I,\ \left(x \geqslant B \implies f(x) \geqslant A\right)$

5. Définition quantifiée de fonction f tend vers $+\infty$ en un réel a.
   Soit f une fonction définie au voisinage de a, sauf en a.
   f possède tend vers $+\infty$ en a lorsque : $\forall A_i n\mathbb{R},\ \exists \delta > 0\ /\ \forall x \in I,\ \left(x \in [a - \delta; a + \delta] \implies f(x) \geqslant A\right)$

6. Définition de suite négligeable devant une autre.
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
   On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

7. Définition de suites équivalentes.
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
   On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Définitions 1 — **Voisinages**

D1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Un **voisinage (fermé) de a** est un segment contenant a non réduit à $\{a\}$.

D2 Un **voisinage (fermé) de $+\infty$** (resp. $-\infty$) est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A]$), $A \in \mathbb{R}$.

I Négligeabilité de fonctions

Définition 2 — **Négligeabilité de fonctions**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).
On dit que **la fonction f est négligeable devant la fonction g en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notation
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Pour info...
De façon générale, f est négligeable devant g en a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction ε tels que :
- $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$,
- $\forall x \in V_a,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Notations — **de Landau**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).

N1 On note $\underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g en a.

N2 Par abus, on écrira $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ au lieu de $f \in \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$.
On lira "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque x tend vers a".

Petite remarque
Dans l'écriture "$f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$", le x est muet.

Exemples 1

E1 $x^2 = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $x^3 = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

E2 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Interprétons cette nouvelle notion dans trois cas classiques...

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$:
   Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ si, et seulement si, en a, f tend moins vite vers $+\infty$ que g.
2. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$:
   Dans ce cas, $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ si, et seulement si, en a, f tend plus vite vers 0 que g.
3. $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(1)$ si, et seulement si, f tend vers 0 en a.

En gros...
"Être négligeable devant" signifie "être très petit devant", comme en français !

Propriétés 1

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

P1 $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ *(linéarité)*

P2 $\left.\begin{array}{l} f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \\ g(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(h(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(h(x)\big)$ *(transitivité)*

P3 $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \Longrightarrow f(x)h(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)h(x)\big)$

P4 $\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g_1(x)\big) \\ f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g_2(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1(x)f_2(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$

P5 $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(\lambda g(x)\big)$

P6 Si f ne s'annule pas au voisinage de a : $f = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(g) \Longrightarrow \dfrac{1}{g} = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{f}\right)$

⋆ Démonstration : On adapte celles du chapitre 1... ⋆

Exemples 2

E1 On a : $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$, $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ et $1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$. D'où : $x^2+2x+1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$.

E2 $x^4+x^2+2x+1+\underset{x\to+\infty}{o}(x^3) = x^4 + \underset{x\to+\infty}{o}(x^3)$.

En effet, puisque x^2+2x+1 est négligeable devant x^3 en $+\infty$, l'expression $x^4+x^2+2x+1+\underset{x\to+\infty}{o}(x^3)$ est en fait égale à x^4 + la somme de deux quantités négligeables devant x^3 en $+\infty$. Par conséquent, on a l'égalité énoncée...

E3 On peut réécrire les croissances comparées avec la notation ci-dessus :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \underset{x\to+\infty}{=} o(x^b)$$

$$\forall b,c \in \mathbb{R}_*^+,\ x^b \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{cx})$$

On les retient parfois ainsi :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \ll x^b \ll e^{cx}$$

Ainsi que :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+,\ \left(a<b \Longrightarrow x^b \underset{x\to 0}{=} o(x^a)\right)$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R}_*^+,\ \ln(x)^a \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{=} o\left(\frac{1}{x^b}\right)$$

E4 On sait que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$, donc : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

E5 On sait que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ et $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc : $\ln(x)e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

> **Vocabulaire**
> Le symbole "$\ll$" se lisant alors "est négligeable devant".

Parfois, on écrira $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}\big(h(x)\big)$ qui se lit "$f(x)$ égale $g(x)$ + un petit o de $h(x)$". Cette écriture est équivalente à dire qu'il existe une fonction φ, négligeable devant h en a, telle que : $\forall x \in [\ldots],\ f(x) = g(x) + \varphi(x)$.

II Équivalence de fonctions

Définition 3 — **Équivalence de fonctions**

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions définies au voisinage de a telles que g ne s'annule pas au voisinage de a (g peut s'annuler a).
On dit que **la fonction f est équivalente à la fonction g en a** (ou au voisinage de a) lorsque :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Dans ce cas, on écrira : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

> **Pour info...**
> De façon générale, f est équivalente à g en a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a et une fonction h tels que :
> - $\lim_{x\to a} h(x) = 1$,
> - $\forall x \in V_a,\ f(x) = g(x)h(x)$.

Exemples 3

E1 $x^2+2x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

E2 $x^2+2x+1 \underset{x\to 0}{\sim} 1$

E3 $e^x + x \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$

E4 $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

E5 $\cancel{e^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x}$

> **★ Classique ! ★**
> A savoir démontrer...

> **À retenir...**
> Exemple classique pour justifier que, de façon générale, on ne compose pas les équivalents !

Trouver une fonction g équivalente à f en a c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f au voisinage de a. Le but étant de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que celle de f...

Propriétés 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g, f_1, f_2, g_1, g_2, h$ sept fonctions définies au voisinage de a telles que g, g_1, g_2, h ne s'annulent pas au voisinage de a (elles peuvent s'annuler en a).

P1 $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(réflexivité)*

Important !
On peut donc dire "f et g sont équivalentes".

P2 $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ *(symétrie)*

P3 $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ *(transitivité)*

P4 $\forall \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

P5 $\forall \ell \in \mathbb{R}^*, \ \left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell\right)$

P6 $\left.\begin{array}{l} f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_1(x)$ *(compatibilité avec le produit)*

En particulier : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \ \lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.

P7 $\left.\begin{array}{l} f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ *(compatibilité avec le quotient)*

P8 $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ f \text{ et } g \text{ sont strictement positives au} \\ \text{voisinage de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$ *(compatibilité avec la puissance)*

P9 $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$ *(compatibilité avec la valeur absolue)*

P10 Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors il existe un voisinage de a tel que $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe sur ce voisinage.

P11 Deux choses parfois utiles :

P12.a $\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ f_1(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) + f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

P12.b $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(g(x)\big) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$

DÉMONSTRATION : On adapte celles du chapitre 1...

Trois choses importantes sur les équivalents :
1. Il est interdit de sommer des équivalents !
2. Il est interdit d'appliquer une fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence (autre que la valeur absolue et une puissance) !
3. Si un jour on arrive à écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$, on peut directement arrêter la prépa !

Pourquoi ?
D'une part, pour la définition que nous avons adoptée, l'écriture $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ n'est pas permise...
D'autre part, le seules fonctions équivalentes à la fonction nulle en a sont les fonctions nulles au voisinage de a.

THÉORÈME 1 — ÉQUIVALENTS USUELS

T1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels.
- La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est équivalente en $+\infty$ à son terme non nul de plus haut degré.
- La fonction $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est équivalente en 0 à son terme non nul de plus bas degré.

T2 Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

T3 On en déduit :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1 \ ; \ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \ ; \ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ ; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

Cas particulier
Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$:
$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$

T4 Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si
- ✓ h ne s'annule pas au voisinage de a,
- ✓ $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$;

alors :

$$\ln\big(1 + h(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \ ; \ e^{h(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} h(x) \ ; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \ \big(1 + h(x)\big)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha h(x)$$

DÉMONSTRATION : On adapte celles du chapitre 1...