Exercices du chapitre 4
Comparaison de fonctions

Technique

Exercice 1 - ●○○○ - Calculs de limites (rappels)
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{1}{(x-2)^2}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} \dfrac{x}{x-3}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} \dfrac{x}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+1}$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x^2+x}{x^2-3x+1}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^{-x}+1}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{x-3}{e^{-x}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)+x}{e^{-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{x^3}$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}$
11. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \big(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\big)$
12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} e^{-1/x^2}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} e^{-1/x^2}$

Exercice 2 - ●●○○ - Calculs de limites (rappels)
Déterminer les limites ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+7}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{2x^2+5}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\ln(x)-\ln(x+2)\big)$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-e^x}{x}$
7. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x<2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\ln(3x^2+1)-\ln(x+2)\big)$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\ln(3x^2+1)-\ln(e^x+2)\big)$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x}e^{1/x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \dfrac{1}{x}e^{1/x}$
11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2e^{1/x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^2e^{1/x}$
12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(e^x+1)-x$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$

Exercice 3 - ●○○○
Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+x}$ en $+\infty$ et en 0.
2. $x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}-1$ en $+\infty$.
3. $x \longmapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ et 0.
4. $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ en 0 et $+\infty$.

Exercice 4 - ●○○○ - Prolongement par continuité
Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^x-1}{\ln(1+x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^2}{x-1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_*^+$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1;+\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 5 - ●●○○

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ par $f(0)=1$ et : $\forall x \in]-\infty;1[\backslash\{0\},\ f(x)=\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

Démontrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.

Exercice 6 - ●●○○ - Avec des équivalents

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+x)^{\ln(x)}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\Big)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to0}\Big(\ln(\mathrm{e}+x)\Big)^{\frac{1}{x}}$

Entraînement

Exercice 7 - ●●○○ - Fonction ζ de Riemann

On considère la fonction $\zeta : s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Montrer que pour tout $s\in]1;+\infty[,\ \zeta(s)\geqslant 1$.
3. Étudier les variations de la fonction ζ sur $]1;+\infty[$.
4. 4.a. Démontrer : $\forall s\in]1;+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(n+1)^s}\leqslant\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^s}\leqslant\frac{1}{n^s}$.

   4.b. Établir alors : $\forall s\in]1;+\infty[,\ \dfrac{1}{s-1}\leqslant\zeta(s)\leqslant 1+\dfrac{1}{s-1}$.

   4.c. En déduire : $\zeta(s)\underset{s\to1}{\sim}\dfrac{1}{s-1}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{s\to+\infty}\zeta(s)$.

Dans le chapitre sur les développements limités, nous verrons comment il est parfois possible de procéder quand nous sommes coincés avec des sommes / différences et que les équivalents ne nous permettent alors pas de conclure (interdiction de sommer des équivalents).