

EXERCICES DU CHAPITRE 5

APPLICATIONS LINÉAIRES

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●○○ - Pas linéaire !

Dans chaque cas, justifier que l'application f donnée n'est pas un endomorphisme de E .

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $f : (x, y) \mapsto (x^2, x + y)$
2. $E = \mathbb{R}^3$ et $f : (x, y, z) \mapsto (z, y, x + 1)$
3. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto M^2$

EXERCICE 2 - ●○○

Dans chaque cas, montrer que f est une application linéaire (expliciter les espaces vectoriels de départ et d'arrivée), donner sa matrice canoniquement associée puis déterminer une base de son noyau et de son image, et préciser également si elle est injective/surjective/bijjective.

1. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$
2. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$
3. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x - y \end{pmatrix}$
4. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ y - 3z \\ 2z \end{pmatrix}$
5. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x - y + z$
6. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + z \\ y - z \end{pmatrix}$
7. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2z \\ 2x + y + z \\ 2y - z \end{pmatrix}$
8. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y + z \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$
9. $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 - ●●○

On note (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et on considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ telle que :

$$f(e_0) = e_1 ; \quad f(e_1) = e_2 ; \quad f(e_2) = e_0$$

1. Justifier que l'application f est bien entièrement définie et que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ et déterminer son automorphisme réciproque.

ENTRAÎNEMENT

EXERCICE 4 - ●○○

Soient $E = \mathbb{R}_2[x]$ et f l'application qui à $P \in E$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = P(x) - xP'(x)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 5 - ●○○

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AMA$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $f(A)$ puis en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Déterminer le noyau de f . Que peut-on en conclure ?
4. En procédant autrement, démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'expression de $f^{-1}(M)$ en fonction de M .
5. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

EXERCICE 6 - ●○○

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$. L'application f est-elle bijective ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E . On notera également $f^2 = f \circ f$.

EXERCICE 7 - ●○○

Démontrer que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$.

EXERCICE 8 - ●●○ - Projecteurs

On suppose que $f^2 = f$. Démontrer que, pour tout $y \in E : y \in \operatorname{Im}(f) \iff f(y) = y$.

EXERCICE 9 - ●●● - Endomorphisme nilpotent

On suppose que E est de dimension finie égale à n et qu'il existe $k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket$ tel que : $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire que $k \leq n$.

EXERCICE 10 - ●●● - Un peu théorique...

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
2. Montrer que $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.