



5

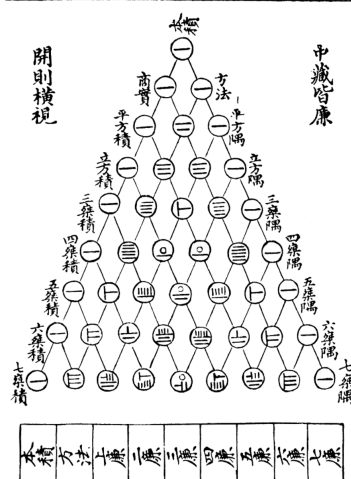
CALCUL COEFFICIENTS BINOMIAUX

INTRODUCTION...

Les coefficients binomiaux étaient déjà connus et utilisés autour des $X^{\text{ème}}$ et $XI^{\text{ème}}$ siècles en Orient et au Moyen-Orient. La plus ancienne illustration existante de leur représentation en triangle est due à Hui YANG (1238-1298, chinois). Ses travaux portaient sur les carrés magiques, ainsi que sur la recherche des racines carrées et des racines cubiques.

Ce triangle, dont on donne une représentation ci-dessous fut ensuite utilisé par des mathématiciens arabes dans les débuts de l'algèbre. À Blaise Pascal (1623-1662, français), nous devons leur étude complète ; et ce fameux triangle porte aujourd'hui son nom.

圖方藥七法古



POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de $n!$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une forme développée de $(a + b)^3$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments.
 - Rappeler la définition de $\mathcal{P}(E)$.
 - Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
 - Combien $\mathcal{P}(E)$ contient-il de singletons ?

I COEFFICIENTS BINOMIAUX

DÉFINITIONS 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

D1 On appelle **partie de E à k éléments** un sous-ensemble de E constitué de k éléments.

D2 On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de E à k éléments.

Rappel...

On ne tient pas compte de l'ordre d'écriture des éléments dans un ensemble ; et les éléments sont deux à deux distincts.

En gros...

Constituer une partie de E à k éléments c'est *choisir* k éléments distincts de E .

EXEMPLES 1

E1 Le nombre de paires de délégués possibles choisis au hasard dans une classe de 40 étudiants est égal à $\binom{40}{2}$.

E2 Pour calculer $\binom{3}{2}$, considérons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ à 3 éléments et déterminons le nombre de parties de E à 2 éléments.
Les parties de E à deux éléments sont :

E3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble E à n éléments. On a :

- $\binom{n}{0} = 1$; en effet,
- $\binom{n}{n} = 1$; en effet,
- $\binom{n}{1} = n$; en effet,

E4 Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et E un ensemble à n éléments.

- Déterminons le nombre de couples (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$.
- En dénombrant autrement le nombre de couples (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$, déduisons-en la valeur de $\binom{n}{2}$.

Pour info...

Par convention :

- $\binom{0}{0} = 1$
- si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Important !

Cet exemple et la démonstration de la propriété 1 doivent être bien travaillés pour mettre en place des raisonnements classiques sur du dénombrement.

Utilisons la méthode mise en place dans le dernier exemple pour obtenir une expression explicite des coefficients binomiaux...

PROPRIÉTÉ 1

EXPRESSION EXPLICITE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Attention !

Nous n'avons pas défini $j!$ si j est négatif ; cette relation n'a donc pas de sens que si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

★ DÉMONSTRATION :

★

PROPRIÉTÉ 2

SYMÉTRIE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

★ DÉMONSTRATION : Donnons deux démonstrations de ce résultat : une calculatoire en utilisant la propriété 1 ; et une autre combinatoire.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

1.

2.

★

PROPRIÉTÉ 3	RELATION DE PASCAL
Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$:	
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$	

★ DÉMONSTRATION : Là encore, donnons deux démonstrations de ce résultat : une calculatoire en utilisant la propriété 1 ; et une autre combinatoire.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

1.

2.

★

APPLICATION : TRIANGLE DE PASCAL

À l'aide de la relation de Pascal, on complète le tableau ci-dessous, appelé **triangle de Pascal** dans lequel chaque cas contient une valeur de $\binom{n}{k}$:

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash k \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Remarque

Les cases bleues traduisent un cas particulier de la relation de Pascal :

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

II FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Voyons maintenant une formule qui fait apparaître les coefficients binomiaux... Formule qui généralise la très fameuse identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$.

THÉORÈME 1

FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

À retenir...

Puisque $(a + b)^n = (b + a)^n$, on a également :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

★ DÉMONSTRATION :

EXEMPLES 2

Avec la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal :

E1 avec la ligne $n = 2$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

E2 avec la ligne $n = 3$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

E3 avec la ligne $n = 4$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$