



5

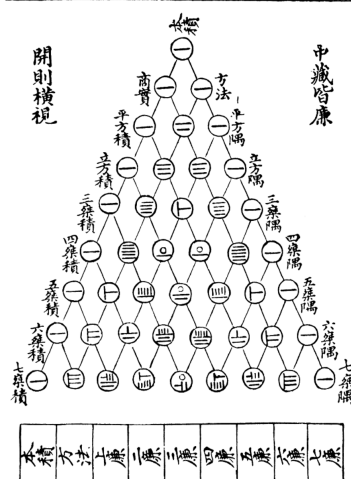
CALCUL COEFFICIENTS BINOMIAUX

INTRODUCTION...

Les coefficients binomiaux étaient déjà connus et utilisés autour des X^{ème} et XI^{ème} siècles en Orient et au Moyen-Orient. La plus ancienne illustration existante de leur représentation en triangle est due à Hui YANG (1238-1298, chinois). Ses travaux portaient sur les carrés magiques, ainsi que sur la recherche des racines carrées et des racines cubiques.

Ce triangle, dont on donne une représentation ci-dessous fut ensuite utilisé par des mathématiciens arabes dans les débuts de l'algèbre. À Blaise Pascal (1623-1662, français), nous devons leur étude complète ; et ce fameux triangle porte aujourd'hui son nom.

圖方藥七法古



POUR BIEN DÉMARRER...

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de $n!$.

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times \dots \times n \\ &= \prod_{k=1}^n k \end{aligned}$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une forme développée de : $(a + b)^3$.

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments.

- Rappeler la définition de $\mathcal{P}(E)$.
 $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E ; autrement dit, c'est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles possibles avec les éléments E .

- Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?
Puisque $\text{Card}(E) = n$, on a vu dans le chapitre 3 que

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

- Combien $\mathcal{P}(E)$ contient-il de singletons ?
Un singleton est un ensemble composé d'un unique élément.
Puisque E contient n éléments distincts, $\mathcal{P}(E)$ contient n singletons.

I COEFFICIENTS BINOMIAUX

DÉFINITIONS 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

D1 On appelle **partie de E à k éléments** un sous-ensemble de E constitué de k éléments.

D2 On note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties de E à k éléments.

Rappel...

On ne tient pas compte de l'ordre d'écriture des éléments dans un ensemble; et les éléments sont deux à deux distincts.

En gros...

Constituer une partie de E à k éléments c'est choisir k éléments distincts de E .

EXEMPLES 1

E1 Le nombre de paires de délégués possibles choisis au hasard dans une classe de 40 étudiants est égal à $\binom{40}{2}$.

E2 Pour calculer $\binom{3}{2}$, considérons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ à 3 éléments et déterminons le nombre de parties de E à 2 éléments.

Les parties de E à deux éléments sont :

$$\{a, b\} ; \{a, c\} ; \{b, c\}$$

$$\text{Conclusion : } \binom{3}{2} = 3$$

E3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un ensemble E à n éléments. On a :

- $\binom{n}{0} = 1$; en effet, $\mathcal{P}(E)$ contient une unique partie à 0 élément : l'ensemble vide.
- $\binom{n}{n} = 1$; en effet, $\mathcal{P}(E)$ contient une unique partie à n éléments : E .
- $\binom{n}{1} = n$; en effet, $\mathcal{P}(E)$ contient n singletons puisque E contient n éléments.

E4 Soient $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$ et E un ensemble à n éléments.

- Déterminons le nombre de couples (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$.
Choisir un tel couple (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$ c'est :
 - * choisir un élément pour x : n éléments possibles;
 - * choisir un élément pour y , dans E mais différent de x : $n - 1$ éléments possibles.Par conséquent, il y a $n(n - 1)$ couples (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$.
- En dénombrant autrement le nombre de couples (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$, déduisons-en la valeur de $\binom{n}{2}$.
Choisir un tel couple (x, y) avec $x, y \in E$ et $x \neq y$ c'est :
 - * choisir deux éléments distincts dans E : $\binom{n}{2}$ possibilités, par définition des coefficients binomiaux;
 - * les ordonner : 2 possibilités pour ordonner deux éléments.

Il y a donc $2 \binom{n}{2}$ couples (x, y) tels que $x, y \in E$ et $x \neq y$.

D'après la question précédente, on en déduit :

$$2 \binom{n}{2} = n(n - 1)$$

$$\text{Conclusion : } \binom{n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Pour info...

Par convention :

- $\binom{0}{0} = 1$
- si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Important !

Cet exemple et la démonstration de la propriété 1 doivent être bien travaillés pour mettre en place des raisonnements classiques sur du dénombrement.

Utilisons la méthode mise en place dans le dernier exemple pour obtenir une expression explicite des coefficients binomiaux...

PROPRIÉTÉ 1

EXPRESSION EXPLICITE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

Attention !

Nous n'avons pas défini $j!$ si j est négatif; cette relation n'a donc pas de sens que si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

★ **DÉMONSTRATION** : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

- Si $n = 0$:
On a alors nécessairement $k = 0$ et :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{0}{0} \\ &= 1 \\ &= \frac{0!}{0!0!} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{convention} \\ \swarrow \text{convention} \end{array}$$

- Si $n = 1$:
Alors $k \in \llbracket 0; 1 \rrbracket$ et on vérifie sans mal que la relation est bien valable dans ces deux cas...
- Si $n \geq 2$:
* Si $k = 0$:
On a déjà vu dans les exemples 1 :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \\ &= \frac{n!}{0!n!} \end{aligned}$$

- * Si $k \geq 1$:
Dénombrons de deux façons différentes les k -uplets d'éléments deux à deux distincts de E .

- × Choisir un k -uplet d'éléments deux à deux distincts de E c'est :
 - choisir un premier élément de E : n choix possibles ;
 - choisir un second élément de E différent du premier : $n - 1$ choix possibles ;
 - ...
 - choisir un dernier élément de E différent des $k - 1$ déjà choisis : $n - (k - 1)$ choix possibles.

Conclusion : il y a $n(n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$ tels k -uplets.

- × D'une autre façon, choisir un k -uplet d'éléments deux à deux distincts de E c'est :
 - choisir k éléments distincts de E : $\binom{n}{k}$ choix possibles par définitions de $\binom{n}{k}$;
 - ordonner ces k éléments : $k!$ ordres possibles.

Conclusion : il y a $k! \binom{n}{k}$ tels k -uplets.

Par conséquent :

$$n(n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = k! \binom{n}{k}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n(n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)(n - k)(n - k - 1) \times \dots \times 1}{k!(n - k)(n - k - 1) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{n!}{k!(n - k)!} \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.

Remarque

On a au passage :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n - i)}{\prod_{j=1}^k j} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^k (n - j + 1)}{\prod_{j=1}^k j} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{n - j + 1}{j} \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2

SYMÉTRIE DES COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tous $n \in \mathbb{N}, k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$$

★ **DÉMONSTRATION** : Donnons deux démonstrations de ce résultat : une calculatoire en utilisant la propriété 1 ; et une autre combinatoire.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

1. D'après la propriété 1, licite car $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, donc $n - k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{n - k} &= \frac{n!}{(n - k)!(n - (n - k))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n - k)!} \end{aligned} \quad \swarrow \text{propriété 1}$$

$$= \binom{n}{k}$$

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. Considérons E un ensemble à n éléments.

L'objectif est alors de montrer qu'il y a autant de parties de E à k éléments que de parties à $n-k$ éléments.

C'est le cas, puisqu'à chaque partie de E à k éléments, on peut associer une unique partie de E à $n-k$ éléments : son complémentaire. Il y a donc autant de parties de E à k éléments que de parties de E à $n-k$ éléments.

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

★

PROPRIÉTÉ 3

RELATION DE PASCAL

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

★ **DÉMONSTRATION** : Là encore, donnons deux démonstrations de ce résultat : une calculatoire en utilisant la propriété 1 ; et une autre combinatoire.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

1. On a, d'après la propriété 1, licite car $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et donc $k+1 \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

2. Considérons E un ensemble à $n+1$ éléments et notons E_{k+1} l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments et fixons a un élément de E . L'ensemble E_{k+1} peut alors se décomposer en deux sous-ensembles disjoints de la sorte :

$$E_{k+1} = A_{k+1} \cup B_{k+1}$$

où A_{k+1} est l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments qui contiennent a ; et B_{k+1} l'ensemble des parties de E à $k+1$ éléments qui ne contiennent pas a .

Naturellement, l'union est disjointe puisqu'un ensemble ne peut à la fois contenir a et ne pas le contenir. Ainsi :

$$\text{Card}(E_{k+1}) = \text{Card}(A_{k+1}) + \text{Card}(B_{k+1})$$

Or :

- $\text{Card}(E_{k+1}) = \binom{n+1}{k+1}$;
- Puisque les parties appartenant à A_{k+1} contiennent a , constituer une partie appartenant à A_{k+1} équivaut à ne choisir plus que k éléments de E distincts de a ; ce qui équivaut à choisir k éléments dans $E \setminus \{a\}$, qui est un ensemble à n éléments. Il y a donc $\binom{n}{k}$ telles parties possibles.

$$\text{Autrement dit : } \text{Card}(A_{k+1}) = \binom{n}{k}.$$

- Puisque les parties appartenant à B_{k+1} ne contiennent pas a , constituer une partie appartenant à B_{k+1} équivaut à choisir $k+1$ éléments de E distincts de a ; ce qui équivaut à choisir $k+1$ éléments dans $E \setminus \{a\}$, qui est un ensemble à n éléments. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ telles parties possibles.

$$\text{Autrement dit : } \text{Card}(B_{k+1}) = \binom{n}{k+1}.$$

Conclusion : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

★

Rappel...

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$j! = j \times (j-1)!$$

APPLICATION : TRIANGLE DE PASCAL

À l'aide de la relation de Pascal, on complète le tableau ci-dessous, appelé **triangle de Pascal** dans lequel chaque cas contient une valeur de $\binom{n}{k}$:

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Remarque

Les cases bleues traduisent un cas particulier de la relation de Pascal :

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$$

II FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Voyons maintenant une formule qui fait apparaître les coefficients binomiaux... Formule qui généralise la très fameuse identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$.

THÉORÈME 1

FORMULE DU BINÔME DE NEWTON

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

À retenir...

Puisque $(a + b)^n = (b + a)^n$, on a également :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

★ **DÉMONSTRATION** : Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Procédons par récurrence.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
D'une part :

$$(a + b)^0 = 1$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} &= \binom{0}{0} a^0 b^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

L'initialisation est ainsi vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ et montrons que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

On a :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && i = k + 1 \text{ dans la première somme} \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \text{relation de Charles, licite car } n \geq 0 \text{ (si } n = 0, \text{ alors les deux sommes sont indexées sur un ensemble vide, donc nulles)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} && \text{relation de Pascal} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} && \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1} \text{ et } \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : par récurrence, on a ainsi démontré : $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

★

EXEMPLES 2

Avec la formule du binôme de Newton et le triangle de Pascal :

E1 avec la ligne $n = 2$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

E2 avec la ligne $n = 3$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

E3 avec la ligne $n = 4$:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$