Exercices du chapitre 5
Coefficients binomiaux

Exercice 1 - ●○○ - Dénombrements avec coefficients binomiaux

Soit E l'ensemble à 10 éléments $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

1. Combien E possède-t-il de parties ?
2. Combien E possède-t-il de parties à 5 éléments ?
3. Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
   - 3.a. a et b ;
   - 3.b. a mais pas b ;
   - 3.c. b mais pas a ;
   - 3.d. ni a, ni b.

Exercice 2 - ●○○ - Podium !

Une compétition sportive oppose 10 concurrentes, dont Marie-Gertrude.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums dans lesquels Marie-Gertrude est première ?
3. Combien y a-t-il de podiums dont Marie-Gertrude fait partie ?

Exercice 3 - ●○○ - Code de carte bancaire

Le code d'une carte bancaire est composé de 4 chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes contenant exactement un 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes composés de quatre chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes composés d'au moins trois chiffres distincts ?

Exercice 4 - ●●○ - Calcul sur les coefficients binomiaux

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Démontrer la relation de Pascal en utilisant l'expression de $\dbinom{n}{k}$ avec les factorielles.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
3. 3.a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1; n]\!]$. Démontrer : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   - 3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
   - 3.c. Établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$
4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$. Démontrer : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 5 - ●●○ - Coefficients binomiaux et `Python`

Dans cet exercice, nous verrons différents programme permettant de calculer les coefficients binomiaux sur **`Python`**. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. 1.a. Écrire une fonction **`Python`** telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'exécution de **`facto(n)`** renvoie la valeur de $n!$.
   - 1.b. En déduire une fonction **`Python`** telle que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, l'exécution de **`coeff_binomial(n,k)`** renvoie la valeur de $\dbinom{n}{k}$.
2. En utilisant la relation de Pascal, compléter la fonction **`Python`** ci-dessous telle que l'exécution de **`triangle_Pascal(n))`** renvoie les lignes 0 à n du triangle de Pascal.

```python
import numpy as np
def triangle_Pascal(n):
    T=np.zeros([n+1,n+1])
    T[0,0]=...
    for i in range(1,n+1):
        T[i,0],T[i,i]=...,...
        for j in ...
            ...
    return T
```

3. 3.a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0;n]\!],\ \dbinom{n}{k} = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}$.

   3.b. En déduire une fonction **Python** telle que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, l'exécution de `coeff_binomial_2(n,k)` renvoie la valeur de $\dbinom{n}{k}$.

Exercice 6 – ●●● - Identité de Vandermonde

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un dénombrement sur l'expression développée de $(1+x)^{m+n}$, démontrer que pour tout $k \in [\![0; m+n]\!]$:

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}$$