

EXERCICES DU CHAPITRE 5

RÉVISIONS SUR LES LIMITES DE FONCTIONS, COMPARAISON DE FONCTIONS

TECHNIQUE

EXERCICE 1 - ●●○ - Calculs de limites (rappels)

Déterminer les limites ci-dessous :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{(x-2)^2}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x}{x-3}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 - 3x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x-3}{e^{-x} - 1}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-3}{e^{-x} - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + x}{e^{-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x} + 1}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-1/x^2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^{-1/x^2}$

EXERCICE 2 - ●●○ - Calculs de limites (rappels)

Déterminer les limites ci-dessous :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 7}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{x})}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - \ln(x+2))$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - e^x}{x}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(x+2))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 1) - \ln(e^x + 2))$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} e^{1/x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} e^{1/x}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 e^{1/x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 e^{1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left[\frac{1}{x} \right]$

EXERCICE 3 - ●●○

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes aux points indiqués.

- $x \mapsto \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + x}$ en $+\infty$ et en 0.
- $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.
- $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$ et 0.
- $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ en 0 et $+\infty$.

EXERCICE 4 - ●●○ - Prolongement par continuité

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x^2)}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
- Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)^2}{x-1}$ est vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ et vérifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[-1; +\infty[$.
- Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$. Est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$?

EXERCICE 5 - ●●○

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(0) = 1$ et : $\forall x \in] -\infty; 1[\setminus\{0\}$, $f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

Démontrer que f est continue sur $] -\infty; 1[$.

EXERCICE 6 - ●●○ - Avec des équivalents

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$
 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$
 3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
 4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\ln(x)}$
 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(1 + e^{-x})\right)^{\frac{1}{x}}$
 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}}$
-

Dans le chapitre sur les développements limités, nous verrons comment il est parfois possible de procéder quand nous sommes coincés avec des sommes / différences et que les équivalents ne nous permettent alors pas de conclure (interdiction de sommer des équivalents).