5

Analyse

Intégrales impropres

Introduction...

L'objectif de ce chapitre est l'étude des intégrales impropres : autrement dit, des intégrales pour lesquelles l'intervalle d'intégration n'est pas un segment. Cette étude se détaille en deux parties :

- l'aspect calculatoire qui consistera à utiliser les techniques habituelles de calcul d'intégrales ;
- l'aspect théorique dont l'analogie avec les séries sera frappante !

Tout comme l'étude des séries était essentielle à l'étude des variables aléatoires discrètes, celle des intégrales impropres l'est pour ce qui sera étudié au chapitre 7 : les variables aléatoires à densité.

Pour bien démarrer...

1. Compléter :

Fonction	Une primitive
$x \longmapsto 0$	$x \longmapsto 43$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x}$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$
$x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\left(\lvert u\rvert\right)$
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

2. Rappeler le théorème fondamental de l'analyse.
   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I.
   Si f est continue sur I, alors la fonction $F : \int_a^x f(t)dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

   On a également : $F(a) = 0$.
   Autrement dit : F est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

3. Quelles sont les méthodes de calculs de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$?

   - En primitivant f "à vue" :
     Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors :
     $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
   - Par intégration par parties :
     Si u et v sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a;b]$, alors :
     $$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$
   - Par changement de variable :
     Si g est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha;\beta]$ tel que $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$, alors :
     $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta g'(t)f\big(g(t)\big)dt$$

I Définitions et propriétés

Définition 1 — **Intégrale impropre**

On dit qu'une intégrale est **impropre** lorsque l'intervalle d'intégration (sur lequel l'intégrande est définie et continue) n'est pas un segment.

Voici les différents types d'intégrales impropres :

$\displaystyle\int_{[a;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en $+\infty$	$\displaystyle\int_{]-\infty;b]} f(t)dt$ intégrale impropre en $-\infty$	$\displaystyle\int_{]a;b]} f(t)dt$ intégrale impropre en a	$\displaystyle\int_{[a;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en b
$\displaystyle\int_{]-\infty;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en $+\infty$ et $-\infty$	$\displaystyle\int_{]-\infty;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en $-\infty$ et b	$\displaystyle\int_{]a;+\infty[} f(t)dt$ intégrale impropre en a et $+\infty$	$\displaystyle\int_{]a;b[} f(t)dt$ intégrale impropre en a et b

✘ Attention !
En pratique, on ne notera pas $\int_{[a;b[} f(t)dt$, mais $\int_a^b f(t)dt$: la notation est la même que pour une intégrale sur un segment ! Il faudra donc déjà commencer par savoir si c'est une intégrale sur un segment ou une intégrale impropre…

♣ **Méthode 1** ♣ **Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On commence toujours l'étude de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par la continuité de l'intégrande, puis :**

- si f est continue sur le segment $[a;b]$, alors l'intégrale n'est pas impropre (cours de 1A),
- si f est continue sur $]a;b]$ (pas en a), alors l'intégrale est impropre en a et pas en b,
- si f est continue sur $[a;b[$ (pas en b), alors l'intégrale est impropre en b et pas en a,
- si f est continue sur $]a;b[$ (ni en a ni en b), alors l'intégrale est impropre en a et en b.

Important !
Une intégrale dont au moins une des bornes est $\pm\infty$ est toujours impropre !

Petite remarque
Souvent, la fonction ne sera même pas définie en la borne en laquelle l'intégrale est impropre…

Exemples 1

E1 La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est définie et continue sur $]0;1]$ (pas en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ est impropre en 0 seulement.

E2 La fonction $t \longmapsto e^{-t}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.

E3 La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est définie et continue sur $]0;1[$ (ni en 0 ni en 1), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t\ln(t)}$ est impropre en 0 et en 1.

E4 La fonction $t \longmapsto t\ln(t)$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$ (pas en 0), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ln(t)dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Dans la suite du cours on énoncera certaines propriétés sur les intégrales du type $\displaystyle\int_{[a;+\infty[} f(t)dt$, mais tout ce qui sera vu sera à adapter et/ou également valable pour les autres types d'intégrales impropres.

I.1 Convergence & divergence.

Définitions 2 — **Convergence / divergence d'une intégrale impropre**

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a;+\infty[$.

D1 On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **est convergente** lorsque la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

D2 Dans les autres cas (pas de limite ou limite infinie), on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **est divergente**.

✎ **Notation**
En cas de convergence, on note :
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)dt\right)$$
Pour les séries, on note $\sum_{n\geqslant} u_n$ la série ; et si convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa somme (la limite de la suite des sommes partielles). Pour les intégrales impropres, on utilise malheureusement la même notation pour l'intégrale impropre (CV ou DV) et son éventuelle valeur (si CV).

♣ **Méthode 2** ♣ **Pour étudier la nature (convergence ou divergence) d'une intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et, le cas échéant (si besoin), calculer sa valeur, on peut :**

- calculer, pour tout $x \in [a;+\infty[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$,
- puis étudier la limite de l'expression obtenue quand $x \to +\infty$.

Important !
Les calculs se font sur $\int_a^x f$ et f est continue sur le segment $[a;x]$: on se place donc dans le cadre de ce qui a été vu en 1A.
Par conséquent, méthodes habituelles de calculs d'intégrale :
- à vue,
- IPP
- changement de variable

La définition est à adapter dans le cas des autres types d'intégrales impropres... Parfois ce sera la borne du bas qui tendra vers $-\infty$, ou bien vers un nombre réel.

EXEMPLES 2

E1 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est définie et continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $x \in [1; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2} dt &= \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x \\ &= \frac{-1}{x} + 1\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} + 1 = 1$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente et vaut 1.

E2 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx$.

- La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est définie et continue sur $]0; 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \ln(x) dx$ est impropre en 0 seulement.
- Soit $A \in]0; 1]$. On a :

$$\begin{aligned}\int_A^1 \ln(x) dx &= \left[x \ln(x) - x\right]_A^1 \\ &= -1 - A\ln(A) + A\end{aligned}$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{A \to 0} A\ln(A) = 0$$

D'où :

$$\lim_{A \to 0} -1 - A\ln(A) + A = -1$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x) dx$ est convergente et vaut -1.

Petite remarque

Si la lettre x est déjà utilisée (comme variable d'intégration par exemple), alors on aime utilise A comme lettre pour faire varier la borne du bas ou B pour la borne du haut.

À retenir...

On retient que $x \longmapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
Si besoin, on la retrouve par IPP.

E3 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

- La fonction $x \longmapsto xe^{-x}$ est définie et continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $B \in [0; +\infty[$. Effectuons une intégration par parties sur $\displaystyle\int_0^B xe^{-x} dx$.

Posons : $\left|\begin{array}{l} u : x \longmapsto x \\ v : x \longmapsto -e^{-x}\end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0; B]$ et pour tout $x \in [0; B]$: $\left|\begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x}\end{array}\right.$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^B xe^{-x} dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^B - \int_0^B -e^{-x} dx \\ &= -Be^{-B} - \left[e^{-x}\right]_0^B \\ &= -Be^{-B} - e^{-B} + 1\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{B \to +\infty} e^{-B} = 0$$

et par croissance comparée :

$$\lim_{B\to+\infty} Be^{-B}=0$$

D'où :

$$\lim_{B\to+\infty} -Be^{-B}-e^{-B}+1=1$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ est convergente et vaut 1.

E4 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

- La fonction $x\longmapsto e^{-\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Soit $B\in[0;+\infty[$. Effectuons le changement de variable $t=\sqrt{x}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{B} e^{-\sqrt{x}}dx$:

$$\left|\begin{array}{lcl} t & = & \sqrt{x} \\ x & = & t^2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{lcl} dt & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ dx & = & 2tdt \end{array}\right. \quad ;$$

$x=$	0	B
$t=$	0	$\sqrt{B}$

Ce changement de variable est bien licite, puisque la fonction $t\longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0;\sqrt{B}]$. On a ainsi :

$$\int_0^B e^{-\sqrt{x}}dx=\int_0^{\sqrt{B}} 2te^{-t}dt$$
$$=2\int_0^{\sqrt{B}} te^{-t}dt$$

Or, d'après l'exemple précédent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ est convergente et vaut 1.

Par conséquent :

$$\lim_{B\to+\infty} 2\int_0^{\sqrt{B}} te^{-t}dt=2$$

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ est convergente et vaut 2.

★Subtil...★
Si x est la variable initiale et que l'on pose $t=h(x)$, alors h doit être bijective et c'est la fonction h^{-1} qui doit être $\mathscr{C}^1$ (regarder le théorème de changement de variable).
Pour ne pas se tromper, si x est la variable initiale, on devrait toujours poser $x=\ldots$ même si c'est parfois moins naturel !

Propriété 1 — **Relation de Chasles**

Soient $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $[a;+\infty[$.
Pour tout $c\in[a;+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ ont même nature ; et en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^{+\infty} f(t)dt$.

En gros...
Seule nous importe la borne d'impropreté.

★ Démonstration : En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales non impropres : on montre que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ également ; puis que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente, alors $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ l'est aussi. ★

I.2 Intégrales faussement impropres

Propriété 2 — **Intégrale faussement impropre**

Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur $]a;b]$.
Si f est prolongeable par continuité en a, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=\int_a^b \widetilde{f}(t)dt$, où $\widetilde{f}$ désigne le prolongement de f sur $[a;b]$.

☞ Rappel...
f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si, $\lim\limits_a f$ est finie.

Vocabulaire
Dans ce cas, on dit que l'intégrale est **faussement impropre** en a.

★ DÉMONSTRATION : Supposons que la fonction f est prolongeable par continuité en a. Notons alors $\widetilde{f}$ le prolongement de f sur $[a;b]$, défini par :

$$\widetilde{f}(a)=\lim_{t\to a} f(t) \quad ; \quad \forall t \in]a;b],\ \widetilde{f}(t)=f(t)$$

Soit $x \in]a;b]$. On a alors :

$$\int_x^b f(t)dt = \int_x^b \widetilde{f}(t)dt$$

Or f est continue sur $]a;b]$, donc la fonction $\widetilde{f}$ également ; et ainsi, la fonction $\widetilde{f}$ est continue sur le segment $[a;b]$. Elle admet donc des primitives $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$; notons $\widetilde{F}$ l'une d'elles.
On a ainsi :

$$\int_x^b \widetilde{f}(t)dt = \widetilde{F}(b)-\widetilde{F}(x)$$

Et donc :

$$\int_x^b f(t)dt = \widetilde{F}(b)-\widetilde{F}(x)$$

Or, $\widetilde{F}$ est continue en a, donc $\lim_{x\to a}\widetilde{F}(x)=\widetilde{F}(a)$. D'où :

$$\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$$

Conclusion : l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et vaut $\int_a^b \widetilde{f}(t)dt$. ★

EXEMPLE 3

Étudions la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$.

- La fonction $f : t \longmapsto \frac{e^t-1}{t}$ est définie et continue sur $]0;1]$ comme quotient de deux fonctions continues sur $]0;1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;1]$. L'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est impropre en 0 seulement.
- Or $e^t-1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc $f(t) \underset{t'0}{\sim} 1$ et ainsi :

$$\lim_{t\to 0} f(t)=1$$

Par conséquent, la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0)=1$).

Conclusion : l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$ est faussement impropre en 0 ; elle est donc convergente.

➠Réflexe !
Dans le cas d'une intégrale impropre en un réel a, on détermine rapidement $\lim_a f$ pour savoir si l'intégrale est faussement impropre ou non.

I.3 INTÉGRALES IMPROPRES EN LES DEUX BORNES

DÉFINITION 3 — CAS D'UNE INTÉGRALE IMPROPRE EN DEUX BORNES

Soient $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie et continue sur $]a;b[$.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **est convergente** lorsqu'il existe un réel $c\in]a;b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont toutes deux convergentes ; et en cas de convergence : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Petite remarque
S'il existe un tel réel c, alors (d'après la relation de Chasles) tous les réels de $]a;b[$ conviennent... et donc l'endroit du découpage n'importe pas !

Important !
Par conséquent, si l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ ou $\int_c^b f(t)dt$ est divergente, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est également divergente.

♣ MÉTHODE 3 ♣ **Pour étudier la nature d'une intégrale impropre en les deux bornes :** on découpe toujours en l'étude de deux intégrales impropres en une seule borne.

EXEMPLES 4

E1 Étudions la nature de $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

- La fonction $x\longmapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $]0;+\infty[$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est impropre en 0 et $+\infty$.
- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$?

Soit $B \in [1;+\infty[$. On a :

$$\int_1^B \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^B = 2\sqrt{B} - 1$$

Or :

$$\lim_{B\to+\infty} 2\sqrt{B} - 1 = +\infty$$

Conclusion : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est divergente.

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est divergente.

Petite remarque

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ est convergente... Mais il suffit que l'une des deux soit divergente pour conclure.

E2 Étudions la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$.

- La fonction $x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$?
  Soit $B \in [0;+\infty[$. On a :

$$\int_0^B x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^B = \frac{B^2}{2}$$

Or :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{B^2}{2} = +\infty$$

Conclusion : l'intégrale $\int_0^{+\infty} x dx$ est divergente.

Conclusion : l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ est divergente.

✘ Attention !

Sur un segment, l'intégrale d'une fonction impaire est nulle. Dans le cas des intégrales impropres, la seule hypothèse d'imparité ne suffit pas.

Propriétés 3 — Étude des intégrales impropres à intégrande paire ou impaire (HP ?)

Soient $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et f une fonction définie et continue sur $]-a;a[$.

P1 Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f$ est convergente si, et seulement si, $\int_0^a f$ est convergente ; et, en cas de convergence : $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.

P2 Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f$ est convergente si, et seulement si, $\int_0^a f$ est convergente ; et, en cas de convergence : $\int_{-a}^{a} f = 0$.

⋆ Démonstration :

P1. Supposons que f est paire. Par définition, on a déjà :

$$\left(\int_{-a}^{a} f(t)dt \text{ est convergente}\right) \iff \left(\int_{-a}^{0} f(t)dt \text{ et } \int_0^a f(t)dt \text{ sont convergentes}\right)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Immédiat.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\int_0^a f(t)dt$ est convergente.

Soit $x \in]-a;0]$. Effectuons le changement de variable affine $u = -t$ dans $\int_{-a}^{0} f(t)dt$:

$$\left|\begin{array}{lcl} u & = & -t \\ t & = & -u \end{array}\right. \quad ; \quad \left|\begin{array}{lcl} du & = & -dt \\ dt & = & -du \end{array}\right. \quad ; \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t = & x & 0 \\ \hline u = & -x & 0 \\ \hline \end{array}$$

À retenir...

Les changements de variable affine conservent la nature des intégrales impropres. Ils peuvent donc :
- être effectués sans problème sur une intégrale impropre après en avoir justifié la convergence ;
- être effectués **sous réserve de convergence** pour étudier la nature d'une intégrale et la calculer.

Ce changement de variable est bien licite, puisqu'il est affine. Ainsi, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{0} f(t)dt &= \int_{a}^{0} f(-u)(-du)\\ &= -\int_{a}^{0} f(-u)du\\ &= -\int_{a}^{0} f(u)du \quad \text{f est paire}\\ &= \int_{0}^{a} f(u)du\end{aligned}$$

Or $\int_{0}^{a} f(u)du$ est convergente, donc l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(t)dt$ est convergente et :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

Conclusion : l'intégrale $\int_{-a}^{a} f(t)dt$ est convergente et par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)dt &= \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt\\ &= 2\int_{0}^{a} f(t)dt \quad \text{ce qui précède}\end{aligned}$$

P2. De même si f est impaire.

⋆

Exemple 5

Déterminons la nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$.

- La fonction $t \longmapsto te^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ st impropre en $-\infty$ et $+\infty$.
- Ensuite :
  - ⋆ La fonction $t \longmapsto te^{-t^2}$ est impaire.
  - ⋆ Soit $B \in [0; +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{B} te^{-t^2} dt &= \left[-e^{-t^2} \right]_0^B\\ &= 1 - e^{-B^2}\end{aligned}$$

Or par opération et composition :

$$\lim_{B \to +\infty} 1 - e^{-B^2} = 1$$

Conclusion : l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ est convergente.

Par imparité de f, on en déduit que $\int_{-\infty}^{0} te^{-t^2} dt$ est également convergente.

Conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt$ est convergente et vaut 0.

II Propriétés sur les intégrales impropres

Les propriétés suivantes vues pour les intégrales sur un segment sont encore valables et admises.

Petite remarque

Pour alléger le visuel, j'écrirai parfois $\int f$ et non $\int f(t)dt$.

Propriétés 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a; +\infty[$.

P1 **Linéarité.**

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente}\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) \text{ est convergente et :}\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g\end{array}\right)$$

P2 **Positivité.**

$$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a; +\infty[, \ f(t) \geqslant 0\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \geqslant 0$$

P3 **Croissance.**

$$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a; +\infty[, \ f(t) \geqslant g(t)\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f \text{ et } \int_a^{+\infty} g \text{ sont convergentes}\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \geqslant \int_a^{+\infty} g$$

P4 **Inégalité triangulaire sur les intégrales.**

$$\left(\int_a^{+\infty} |f| \text{ est convergente}\right) \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f \text{ est convergente et : } \left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f|\right)$$

✘ Attention !
Pour les séries : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ n'est valable que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes ; c'est pareil pour les intégrales !

✘ Attention !
On veille à l'ordre des bornes pour appliquer la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire.

Vocabulaire
On dit que $\displaystyle\int_I f$ est **absolument convergente** lorsque $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.
Et ainsi, P4 fournit en particulier que CVA $\Longrightarrow$ CV, la réciproque étant fausse (comme pour les séries).

III Intégrales impropres usuelles.

Théorème 1 — **Intégrales usuelles**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

T1 l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ *(intégrale de Riemann)*

T2 l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$ *(intégrale de Riemann)*

T3 l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$ *(intégrale exponentielle)*

Important !
En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente !

⋆ Démonstration :

T1.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est définie et continue sur $[1; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Distinguons trois cas :
  - ⋆ Si $\alpha = 1$:
    Soit $B \in [1; +\infty[$. On a ainsi :

$$\int_1^B \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^B \frac{1}{t} dt = \Big[\ln(|t|)\Big]_1^B = \ln(B)$$

    Or $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \ln(B) = +\infty$.
    Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente.
  - ⋆ Si $\alpha < 1$:
    Soit $B \in [1; +\infty[$. On a ainsi :

$$\int_1^B \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^B t^{-\alpha} dt \underset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right] = \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha} - 1)$$

♡ Astuce du chef ! ♡
On passe par les exposants négatifs pour primitiver, mais on veille à bien avoir des exposants positifs au moment des passages à la limite (le risque d'erreur est trop important sinon).

Or $\alpha < 1$, donc $1-\alpha > 0$. Ainsi : $\lim\limits_{B\to+\infty} \dfrac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha}-1)B^{1-\alpha} = +\infty$ et par opérations :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha}-1) = +\infty$$

Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente.

⋆ Si $\alpha > 1$:
Soit $B \in [1;+\infty[$. On a ainsi de la même façon :

$$\begin{aligned}\int_1^B \frac{1}{t^\alpha} dt &= \frac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha}-1)\\ &= \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{B^{\alpha-1}}\right)\end{aligned}$$

Or $\alpha > 1$, donc $\alpha - 1 > 0$. Ainsi : $\lim\limits_{B\to+\infty} \dfrac{1}{B^{\alpha-1}} = 0$ et par opérations :

$$\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{B^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}$$

Par conséquent : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$

T2. On procède de la même façon.

T3. Immédiat...

⋆

IV Critères sur les intégrales à intégrande positive

Les résultats ci-dessous sont énoncés dans le cas d'intégrales du type $\displaystyle\int_{[a;+\infty[}$. Ils sont valables de la même façon pour les intégrales du type $\displaystyle\int_{]-\infty;b[}$, $\displaystyle\int_{[a;b[}$ et $\displaystyle\int_{]a;b]}$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

T1 Si f est définie, continue et positive sur $[a;+\infty[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.

T2 Si f est définie, continue et positive sur $]-\infty;b]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ est majorée.

Petite remarque
Résultats encore valables sur des intégrales impropres du type $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ et $\displaystyle\int_{]a;b]} f$.

⋆ Démonstration : Immédiat d'après le théorème de limite monotone sur les fonctions. ⋆

Petite remarque
Les trois critères qui suivent sont les analogues de ceux vus dans le cas des séries à termes généraux positifs. Les démonstrations sont analogues à celles vues dans le Chapitre 1 et ne sont donc pas détaillées.

Théorème 3 — Critère de comparaison par inégalité sur les intégrales à intégrandes positives

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

T1 $$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$$

T2 $$\left.\begin{array}{l}\forall t \in [a;+\infty[,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)\\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$$

On en déduit le suivant :

Théorème 4 — Critère de comparaison par négligeabilité sur les intégrales à intégrandes positives

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

T1 $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est convergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right)$

T2 $\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big) \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est divergente}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ est divergente}\right)$

★ Classique ! ★
On utilise souvent le premier point dans le cas où $\int_a^{+\infty} g$ est une intégrale usuelle convergente (fréquemment intégrale de Riemann).
Autrement dit, si f est positive et qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, alors on pourra conclure sur la convergence de $\int_1^{+\infty} f$.

♡ Astuce du chef ! ♡
Le second point ne sert pas souvent..

Qui entraîne le dernier :

Théorème 5 — Critère de comparaison par équivalence sur les intégrales à intégrandes positives

Soient $a \in \mathbb{R}$ ainsi que f et g deux fonctions définies et continues sur $[a;+\infty[$.

$\left.\begin{array}{l} f \text{ et } g \text{ sont positives sur } [a;+\infty[\\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ ont même nature}\right)$

♡ Astuce du chef ! ♡
En fait, puisque $f \underset{+\infty}{\sim} g$, il suffit que g soit positive sur $[a;+\infty[$ pour que f le soit au voisinage de $+\infty$... et on peut donc appliquer le critère.

Exemples 6

E1 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+t}dt$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3+t}$ est définie et continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+t}dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Ensuite :
  - ⋆ $\dfrac{1}{t^3+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$,
  - ⋆ $\forall t \in [1;+\infty[$, $\dfrac{1}{t^3+t} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{t^3} \geqslant 0$,
  - ⋆ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 3, donc convergente (car $3 > 1$).

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+t}dt$ est convergente.

E2 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^3+t}dt$.

- La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3+t}$ est définie et continue sur $]0;1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^3+t}dt$ est impropre en 0 seulement.
- Ensuite :
  - ⋆ $\dfrac{1}{t^3+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$,
  - ⋆ $\forall t \in]0;1]$, $\dfrac{1}{t^3+t} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{t} \geqslant 0$,
  - ⋆ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 0 d'exposant 1, donc divergente.

Conclusion : par critère de comparaison (par équivalence) sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^3+t}dt$ est divergente.

☞ Rappel...
Une fonction polynômiale est équivalente en 0 à son monôme non nul de plus bas degré.

E3 Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

- La fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est impropre en $+\infty$ seulement.
- Ensuite :
  - ⋆ Par croissance comparée et composition :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$$

    Autrement dit :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$$

    D'où :

$$e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  - ⋆ $\forall t \in [1;+\infty[,\ e^{-t^2} \geqslant 0,\ \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0,$
  - ⋆ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 2, donc convergente (car $2 > 1$).

  Conclusion : par critère de comparaison (par négligeabilité) sur les intégrales impropres à intégrandes positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

> **Conclusion** : puisque $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ n'est pas impropre, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

♣ **Méthode 4** ♣ **Pour étudier $\displaystyle\int_I f$:**

1. **Si l'on sait primitiver f :** on met en place la méthode 2 (calcul de l'intégrale sur un segment, puis passage à la limite).
2. **Si l'on ne sait pas primitiver f :**
   - **méthode pouvant aboutir à la valeur si convergence :**
     - ⋆ on procède par **IPP sur un segment**, puis passage à la limite ;
     - ⋆ on met en place un changement de variable :
       - ◇ changement de variable affine possible sur les intégrales impropres,
       - ◇ changement de variable non affine : souvent donné dans l'énoncé et travail obligatoire sur un segment puis passage à la limite.
   - **méthode ne pouvant pas aboutir à la valeur si convergence :**
     - ⋆ si f est positive : on peut utiliser un des trois critères ci-dessus (en comparant avec l'intégrande d'une intégrale usuelle par exemple),
     - ⋆ si f est négative : on utilise le fait que $-\displaystyle\int f = \int -f$ et que les intégrales $-\displaystyle\int f$ et $\displaystyle\int f$ ont même nature, puis on se ramène au cas précédent,
     - ⋆ si f change de signe : on peut étudier la convergence absolue : si $\displaystyle\int_I |f|$ CV, alors $\displaystyle\int_I f$ CV. Si $\displaystyle\int_I |f|$ DV, alors on ne peut pas conclure.

Dans tous les cas, on regarde si l'énoncé fournit des pistes...

✘ Attention !
Si l'intégrale est impropre en les 2 bornes, on découpe arbitrairement l'intervalle d'intégration pour étudier la nature de 2 intégrales impropres en 1 borne.

★Subtil...★
L'étude de la nature d'une intégrale est une notion *locale* (c'est l'étude de l'existence d'une limite). Quand on veut appliquer un critère pour étudier la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, nul besoin que f soit positive sur tout $[a;+\infty[$: si f est positive après c, on met en place un critère sur $\displaystyle\int_c^{+\infty} f$ et on dit que $\displaystyle\int_a^c f$ est une intégrale sur un segment, donc convergente.