Exercices du chapitre 5
Tout sur les intégrales

Technique

Exercice 1 - ●●○○

Étudier la convergence des intégrales suivantes et, le cas échéant, déterminer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 dx$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x} dx$
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+1}dx$
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$
12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx$
15. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$
16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}dx$
18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$
19. $\displaystyle\int_0^{1} x^k \ln(x)dx$, pour $k \in \mathbb{N}$

Exercice 2 - ●●○○

Étudier la nature de chaque intégrale ci-dessous.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt$ pour $k \in \mathbb{N}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\ln(t)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t+1}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+t}dt$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+\sqrt{t}}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{t^4}\right)dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}$
8. $\displaystyle\int_0^{1} t\ln(t)dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt$

Entraînement

Exercice 3 - ●○○○ - Suites d'intégrales

Considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. Conclure que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 - ●●○○ - Une intégrale classique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}dx$.

Exercice 5 - ●●○○ - Fonction définie par une intégrale

Considérons $F : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}dt$.

1. Justifier que F est définie sur $]0; +\infty[$.
2. Étudier le signe de $F(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
3. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
4. Déterminer les limites de F en 0 et en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations complet de F sur $]0; +\infty[$.

Exercice 6 – ●●○○ – Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $g : x \longmapsto \int_{-x}^{x} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction g est impaire.
3. Étudier le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
6. Justifier que g admet une limite en $+\infty$.
7. Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant \frac{e^x - e^{-x}}{1+x^2}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ puis $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Exercice 7 – ●●○○ – Fonction définie par une intégrale

On définit la fonction f sur $[0; 1]$ par : $f(0) = 0$, $f(1) = \ln(2)$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0; 1]$.
2. 2.a. Soit $x \in]0; 1[$. Calculer $\int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.
   2.b. En déduire que pour tout $x \in]0; 1[$: $x^2 \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x\ln(2)$.
   2.c. En déduire que f est continue sur $[0; 1]$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; 1[$ puis déterminer ses variations.

Exercice 8 – ●●○○ – Fonction Gamma

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels x de sorte que $\int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

Pour $x \in \mathscr{D}$, on pose alors $\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

2. Soit $x \in \mathscr{D}$. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ puis en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\Gamma(n)$.

Concours

Exercice 9 – ●●○○ – EDHEC 2004 E

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. 3.a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3.b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ln(2)$.
   3.c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. 4.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   4.b. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   4.c. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

5. 5.a. Justifier, pour tout $n \in [\![2; +\infty[\![$, la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   5.b. Montrer : $\forall n \in [\![2; +\infty[\![,\ 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n-1}$.
   5.c. En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Exercice 10 – ●●○○ – EDHEC 2003 E

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x, par : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. 1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   1.b. En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

3. 3.a. Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$.

   3.b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

   3.c. Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice 11 - ●●○○ - EDHEC 2019 E

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier : $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. 2.a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   2.b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   3.a. Déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

   3.b. Montrer que, pour tout réel t, on a : $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

   3.c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$. Puis donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n dt$ puis montrer : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire concernant la série de terme général u_n ?
5. 5.a. Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}(2n+2)(u_n - u_{n+1})$.

   5.b. En déduire l'égalité :
$$\forall n \in \mathbb{N},:\ u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

   5.c. On admet l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$
6. En utilisant le résultat de la question 5.a. écrire une fonction **Python** prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de u_n.

Exercice 12 - ●●○○ - ESC 2002 E

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}$$
On définit également la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$, sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_*^+$ et étudier leur signe.
2. 2.a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   2.b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ est convergente. On notera K sa valeur.
3. 3.a. Montrer, grâce au changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ que $K = -\displaystyle\int_0^1 h(t)dt$.

   3.b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|dx$ est convergente et égale à $2K$.

   3.c. En déduire également que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ est convergente et donner sa valeur.
4. 4.a. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.

   En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

   4.b. Montrer que pour tout réel x strictement positif :
$$h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}$$

4.c. En déduire successivement :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \big(h(x) - f_n(x)\big)dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

et

$$\frac{-K}{n+1} \leqslant \int_0^1 \big(h(x) - f_n(x)\big)dx \leqslant 0$$

4.d. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = 0$.

Exercice 13 - ●●○○ - Ecricome 1997 E

Dans tout l'exercice, α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(\alpha + k)}$$

1. Étude de la convergence de la suite $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 1.a. Montrer que la suite $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\big(u_{n+1}(\alpha) - u_n(\alpha)\big)$? On note $\ell(\alpha)$ la limite de $\big(u_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - 1.b. On suppose que $\ell(\alpha) \neq 0$. Démontrer que :

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}$$

   - 1.c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.
2. Dans cette question : $\alpha \in]0;1]$.
   - 2.a. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$

   - 2.b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}(1 - \mathrm{e}^{-t})^n dt$$

   - 3.a. Étudier la convergence de l'intégrale $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.
   - 3.b. Établir une relation simple entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$.
   - 3.c. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$$

4. Dans cette question : $\alpha > 1$.
   - 4.a. Montrer que pour tout entier naturel N, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

   - 4.b. En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente et donner, en fonction de α, la valeur de sa somme.