6

Algèbre linéaire

Applications linéaires entre espaces vectoriels

Introduction...

Quiconque parle d'applications linéaires en dimension finie pense nécessairement au célèbre Théo-Raym Durrant (1843-2017, israelo-argentino-chinois), dont un très célèbre théorème porte son nom...
Sa contribution, tout comme celle de Izo Morfyssm (1917-2043, islando-arménien), fut considérable dans l'étude des applications linéaires. En effet, on leur doit un remarquable résultat sur le dual de l'espace vectoriel des classes d'équivalences des distributions tempérées modulo les formes quadratiques réelles : il est isomorphe au corps des matrices nilpotentes sur l'anneau $\mathbb{Z}/\pi\mathbb{Z}$. La démonstration de ce théorème repose, en partie, sur l'étude des formes modulaires définies sur la Lemniscate de Kolmogorov-Smirnov, à valeurs dans le demi-plan de Poincaré. Ce résultat, qui ne sera pas démontré dans ce cours (la marge étant trop étroite pour la contenir) pourrait en revanche faire l'objet d'un problème de "TOP3" : un grand classique donc.

Bref, nous commencerons modestement par l'étude des applications linéaires (les mêmes qu'en quatrième en fait)...

Pour bien démarrer...

1. Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.
   - **Définition :** f est injective lorsque $\forall (x,x') \in E^2,\ \left(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'\right)$
   - **Définition :** f est surjective lorsque $\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ / \ y = f(x)$
   - **Définition :** f est bijective lorsque $\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ / \ y = f(x)$
   - Caractérisations de la bijectivité de f :

     f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective
     si, et seulement si, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$

2. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel E lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n^n \in \mathbb{R}^n),\ \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k = \vec{0_E} \implies \forall k \in [\![1;n]\!],\ \lambda_k = 0 \right)$$

3. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E lorsque :

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$$

4. La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de l'espace vectoriel E lorsque :

$$\forall \vec{u} \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$$

5. La dimension d'un espace vectoriel est le cardinal commun à toutes ses bases.

6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation des bases.

   Une famille de E est une base si, et seulement si, elle est libre et génératrice
   si, et seulement si, elle est libre et de cardinal égal à $\dim(E)$
   si, et seulement si, elle est génératrice et de cardinal égal à $\dim(E)$

7. Soient E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. **Définition :** F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :
   - $F \subset E$;
   - $F \neq \varnothing$ (on vérifie que $\vec{0_E} \in F$) ;
   - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Dans tout ce chapitre, E et F sont des espaces vectoriels réels.

I Définition et premiers exemples

Définitions 1 — **Application linéaire**

D1 Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** lorsque :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

D2 Un **endomorphisme de E** est une application linéaire de E dans E.

D3 Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

D4 Un **automorphisme de E** est un endomorphisme de E bijectif.

> **En gros...**
> Une application linéaire est une application compatible avec les combinaisons linéaires !

> **Notation**
> On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; et $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,E)$ (l'ensemble des endomorphismes de E).

Viennent naturellement quelques propriétés immédiates :

Propriétés 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

P1 $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$

P2 $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in E,\ f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$; et en particulier : $\forall \vec{u} \in E,\ f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

P3 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i).$

> **♡ Astuce du chef ! ♡**
> Les deux premières propriétés peuvent aussi servir pour montrer qu'une application n'est pas linéaire...

Démonstration :

P1. Puisque f est une application linéaire, on a : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.
En prenant $\lambda = \mu = 0$ et $\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{0_E}$, on a

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \overrightarrow{0_E} \quad ; \quad \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_F}$$

Conclusion : $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.

P2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$. Puisque f est une application linéaire, on a : $\forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{v} \in E,\ f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$.
En prenant $\mu = 0$ et $\vec{v} = \overrightarrow{0_E}$, on a :

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda\vec{u} \quad ; \quad \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{u})$$

Conclusion : $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$. D'où le cas particulier, en prenant $\lambda = -1$.

P3. Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 1$: immédiat d'après **P2**.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons "$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i)$".

  Montrons "$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_{n+1} \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(\vec{u}_i)$".

  Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_{n+1} \in E$. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \vec{u}_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i + \lambda_{n+1}\vec{u}_{n+1}\right) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) + \lambda_{n+1} f(\vec{u}_{n+1}) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i) + \lambda_{n+1} f(\vec{u}_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(\vec{u}_i) \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_n \in E\ :\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\vec{u}_i).$

Exemples 1

E1 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{u}$ est un endomorphisme de E, et même un automorphisme de E : c'est l'**identité**, notée id_E.

E2 L'application $\vec{u} \in E \longmapsto \vec{0}_F$ est une application linéaire de E dans F : c'est l'application linéaire nulle.

E3 L'application $P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

E4 Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications $f : x \longmapsto ax$, avec $a \in \mathbb{R}$.

E5 L'application $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tA$ est une application linéaire.

E6 L'application qui, à une variable aléatoire, associe son espérance, est une application linéaire. En revanche, l'application qui, à une variable aléatoire, associe sa variance, n'est pas une application linéaire.

E7 Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque et f l'application définie sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$$

Montrons que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Puisque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a déjà : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ f(X) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrons que f est linéaire.
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrons que $f(\lambda X + \mu Y) = \lambda f(X) + \mu f(Y)$.
  On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y) \\ &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda f(X) + \mu f(Y) \end{aligned}$$

  Donc f est linéaire.

Conclusion : pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $X \longmapsto AX$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

E8 Notons φ l'application définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui à toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} tf(t)dt$. Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction $t \longmapsto tf(t)$ est un produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, elle est donc également continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $t \longmapsto tf(t)$ admet des primitives, qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons G l'une d'elles. On a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(f)(x) &= \int_1^{x^2} tf(t)dt \\ &= G(x^2) - G(1) \end{aligned}$$

  Or G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $x \longmapsto G(x^2)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  Par conséquent, la fonction $\varphi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$.
  Conclusion : φ est définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Montrons que φ est linéaire.
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$. Autrement dit, montrons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\big(\varphi(f) + \mu\varphi(g)\big)(x)$$

  On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_1^{x^2} t\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)dt \\ &= \lambda \int_1 x^2 tf(t)dt + \mu \int_1^{x^2} tg(t)dt \\ &= \lambda\varphi(x)f(x) + \mu\varphi(g)(x) \end{aligned}$$

  par linéarité de l'intégrale

  On a établi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$$

  D'où :

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

  Conclusion : φ est linéaire.

Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Petite remarque
Quel scoop... on sait ça depuis la quatrième !

Pourquoi ?
On sait que $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. Mais, de façon générale, $\mathbb{V}(aX + bY) \neq a\mathbb{V}(X) + b\mathbb{V}(Y)$...

Vocabulaire
On dira que f est l'application linéaire *canoniquement associée* à A.

À retenir...
Résultat qui peut être très utile en pratique...

Confusion d'objets !
$\varphi(f)$ est une fonction !

Petite remarque
On veut établir une égalité de fonctions !

Petite remarque
Par linéarité de l'application $f \longmapsto f(x)$ (application **évaluation en x**), nous allons en fait établir : $\forall x \in \mathbb{R}$
$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$

E9 Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(3x-y,x+5y+1)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.
Remarquons que $f(0,0)\neq(0,0)$.

Conclusion : f n'est pas linéaire.

E10 Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P\in\mathbb{R}_n[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(P)(x)=P(x)^2+P'(x)$. Montrons que f n'est pas une application linéaire.
Considérons la fonction polynomiale $P : x\longmapsto x$.
On a ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$-f(P)(x)=-(x^2+1)\quad;\quad f(-P)(x)=x^2-1$$

Les fonctions polynomiales $x\longmapsto x^2-1$ et $x\longmapsto -(x^2+1)$ sont différentes. D'où :

$$f(-P)\neq -f(P)$$

Conclusion : f n'est pas linéaire.

Autrement dit : Une combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire... Et la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

PROPRIÉTÉS 2 — STRUCTURE DE $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E,F,G trois espaces vectoriels réels.

P1 $\big(\mathscr{L}(E,F),+,.\big)$ est un espace vectoriel réel.

P2 $\forall f\in\mathscr{L}(E,F),\forall g\in\mathscr{L}(F,G),\ g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$.

Conséquence Si $f\in\mathscr{L}(E)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^n\in\mathscr{L}(E)$, où f^n désigne $\underbrace{f\circ f\ldots\circ f}_{n \text{ fois}}$.

DÉMONSTRATION :

P1. Montrons que $\big(\mathscr{L}(E,F),+,.\big)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F.

- Par définition, $\mathscr{L}(E,F)$ est inclus dans l'espace vectoriel des applications de E dans F.
- L'application nulle est linéaire, donc $\mathscr{L}(E,F)$ est non vide.
- Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $f,g\in\mathscr{L}(E,F)$. Montrons que $\lambda f+\mu g\in\mathscr{L}(E,F)$.
  - ⋆ On sait déjà que $\lambda f+\mu g$ est une application définie sur E et à valeurs dans F, car f et g le sont.
  - ⋆ Montrons que $\lambda f+\mu g$ est linéaire.
    Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v}\in E$. Montrons que $(\lambda f+\mu g)(a\vec{u}+b\vec{v})=a(\lambda f+\mu g)(\vec{u})+b(\lambda f+\mu g)(\vec{v})$.
    On a, par linéarité de l'évaluation en $a\vec{u}+b\vec{v}$:

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)(a\vec{u}+b\vec{v})&=\lambda f(a\vec{u}+b\vec{v})+\mu g(a\vec{u}+b\vec{v})\\&=\lambda\big(af(\vec{u})+bf(\vec{v})\big)+\mu\big(ag(\vec{u})+bg(\vec{v})\big) && f \text{ et } g \text{ sont linéaires}\\&=a\big(\lambda f(\vec{u})+\mu g(\vec{u})\big)+b\big(\lambda f(\vec{u})+\mu g(\vec{u})\big)(\vec{v})\\&=a(\lambda f+\mu g)(\vec{u})+b(\lambda f+\mu g)(\vec{v}) && \text{linéarité des évaluations en } \vec{u} \text{ et } \vec{v}\end{aligned}$$

    Donc $\lambda f+\mu g$ est linéaire.

  Par conséquent :

$$\lambda f+\mu g\in\mathscr{L}(E,F)$$

Conclusion : $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de E dans F ; $\mathscr{L}(E,F)$ est donc un espace vectoriel.

P2. Soient $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$. Montrons que $g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$.

- L'application $g\circ f$ est bien définie sur E et à valeurs dans G.
- Montrons que $g\circ f$ est linéaire.
  Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v}\in E$. Montrons que $g\circ f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=\lambda g\circ f(\vec{u})+\mu g\circ f(\vec{v})$.
  On a :

$$\begin{aligned}g\circ f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})&=g\big(f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\big)\\&=g\big(\lambda f(\vec{u})+\mu f(\vec{v})\big) && \text{linéarité de } f\\&=\lambda g\big(f(\vec{u})\big)+\mu g\big(f(\vec{v})\big) && \text{linéarité de } g\\&=\lambda g\circ f(\vec{u})+\mu g\circ f(\vec{v})\end{aligned}$$

  Donc $g\circ f$ est linéaire.

Conclusion : $g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$.

Propriété 3

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

☞ Rappel...

Si f est une application bijective de A dans B, alors f^{-1} est bijective de B dans A ; et on a aussi :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \quad ; \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

⋆ Démonstration : Supposons que f est un isomorphisme de E dans F.

- Puisque f est bijective de E dans F, on sait que f^{-1} est bijective de F dans E.
- Montrer que f^{-1} est une application linéaire de F dans E.
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in F$.
  Puisque $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et que f est bijective de E dans F, il existe des uniques vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = f(\vec{x})$ et $\vec{v} = f(\vec{y})$.
  On a ainsi :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) &= f^{-1}\big(\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})\big) && \\ &= f^{-1}\big(f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\big) && \text{linéarité de } f \\ &= \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} && f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \\ &= \lambda f^{-1}(\vec{u}) + \mu f^{-1}(\vec{v}) && f(\vec{x}) = \vec{u} \text{ et } f(\vec{y}) = \vec{v}, \text{ donc } \vec{x} = f^{-1}(\vec{u}) \text{ et } \vec{y} = f^{-1}(\vec{v}) \end{aligned}$$

  L'application f^{-1} est donc linéaire.

Conclusion : f^{-1} est un isomorphisme de F dans E. ⋆

Pour finir sur cette première partie, un résultat parfois utile :

Propriété 4

Deux applications linéaires sur E sont égales si, et seulement si, elles coïncident sur une base de E.
Autrement dit, une application linéaire est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de départ.

⋆ Démonstration : QCl21 ⋆

II Noyau & image d'une application linéaire

Dans toute la suite, f désigne une application linéaire de E dans F.

Définition 2 — Noyau d'une application linéaire

Le **noyau** de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(f) = \left\{\vec{u} \in E \;/\; f(\vec{u}) = \vec{0}_F\right\}$$

Propriété 5

$\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

⋆ Démonstration : QCl22 ⋆

Un résultat très utile en pratique qui relie noyau et injectivité d'une application linéaire :

Propriété 6 — Injectivité et noyau

f est injective si, et seulement si, $\ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

✘ Attention !

Cela ne veut pas dire que $\ker(f)$ est vide (un espace vectoriel n'est jamais vide) : mais seulement qu'il est *réduit au vecteur nul.*

⋆ Démonstration : QCl23 ⋆

☞ Pour info...

On a, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$:

$$\begin{aligned} & f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \\ \iff & f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_F} \\ \iff & f(\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{0_F} \\ \iff & \vec{u} - \vec{v} \in \ker(f) \\ \iff & \exists \vec{w} \in \ker(f) \;/\; \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

On dit parfois que le noyau mesure *le défaut d'injectivité...*

Exemples 2

E1 L'application $f : P \in \mathbb{R}[x] \longmapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ (la linéarité découle de la linéarité de la dérivation). Et :

$$\ker(f) = \mathbb{R}_0[x] \neq \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$$

Conclusion : l'application f n'est pas injective.

E2 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'application f définie sur $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par : $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = AX$.
D'après Exemples 1 - E7, on sait que f est une application linéaire.
Et :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Déterminons son noyau. Qu'en dire ?

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f) &\iff f(X) = 0_{3,1} \\
&\iff AX = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = -z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases} \\
&\iff X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

✍ Rédaction
La question porte sur X, on termine donc avec $X = ...$

Conclusion : $\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; et puisque $\ker(f) \neq \{0_{3,1}\}$, l'application f n'est pas injective.

En dimension finie (ce qui sera, sauf cas très exceptionnels, toujours le cas), la recherche du noyau d'une application linéaire peut toujours se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène.

Définition 3 — Image d'une application linéaire

L'**image** de f, notée $\text{Im}(f)$, est l'ensemble défini par :

$$\text{Im}(f) = \left\{ \vec{v} \in F \ / \ \exists\, \vec{u} \in E,\ \vec{v} = f(\vec{u}) \right\} = \left\{ f(\vec{u}) \ / \ \vec{u} \in E \right\}$$

☞ Rappels...
• En fait : $\text{Im}(f) = f(E)$. C'est l'ensemble de toutes les images des vecteurs de E par f...
• On avait également vu que f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$. On ne peut pas faire mieux dans le cas des applications linéaires.

Voici une propriété que l'on utilisera pour déterminer l'image d'une application linéaire :

Propriété 7

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et même :

si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de E, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$

♣ Méthode !
En pratique, on prend presque toujours la base canonique de E...

⋆ Démonstration :

- QCI22 pour le fait que $\text{Im}(f)$ soit un espace vectoriel.

- Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille génératrice de E.
  Procédons par double inclusion.

  $\boxed{\supset}$ Par définition, on a :
  $$\forall k \in [\![1;n]\!],\ f(\vec{e}_k) \in \mathrm{Im}(f)$$
  Mais $\mathrm{Im}(f)$ est un espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire des $f(\vec{e}_1)$,...,$f(\vec{e}_n)$ appartient encore à $\mathrm{Im}(f)$.
  Autrement dit :
  $$\mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)\big) \subset \mathrm{Im}(f)$$

  $\boxed{\subset}$ Soit $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$.
  Dans ce cas, il existe $\vec{u} \in E$, que nous considérons ensuite, tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$.
  Mais $\vec{u} \in E$ et la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E, donc il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k$.
  Dans ce cas :
  $$\begin{aligned}\vec{v} &= f(\vec{u})\\ &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k\right) && \text{linéarité de } f\\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\vec{e}_k)\end{aligned}$$
  D'où :
  $$\vec{v} \in \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$$
  et ainsi :
  $$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$$

  Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\big)$.

Petite remarque

Il est possible de procéder de façon plus directe en démontrant les deux points simultanément :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \{f(x),\ x \in E\}\\ &= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{e}_k\right),\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\vec{e}_k),\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\big(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\big)\end{aligned}$$

Cette méthode a l'avantage d'être courte, mais est moins formatrice sur la rédaction.

$\star$

Exemple 3

Considérons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x-y \end{pmatrix}$. Montrons que f est une application linéaire et déterminons son image. Qu'en dire ?

- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on a : $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  Par conséquent, d'après Exemples 1 - E7, l'application f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- On sait que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, car c'en est même la base canonique. Donc :
  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
  Or
  $$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
  Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
- On remarque alors que $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2$, donc $\mathrm{Im}(f) \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  Conclusion : f n'est pas surjective.

Petite remarque

On pourrait également exhiber un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui n'a pas d'antécédent par f... $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient (et une infinité d'autres...).

Petite partie à la limite du programme : espaces vectoriels isomorphes et dimension

Soient E un espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n$ des vecteurs de E. On pose f l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \end{array} \right.$$

Petite remarque

Au passage, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^n$...

Sans difficulté, on vérifie que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, E)$. De surcroît :

- par définition, f est surjective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est génératrice de E ;
- par définition : $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est libre. D'après la propriété 6, f est donc injective si, et seulement si, la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots, \vec{e}_n)$ est libre.

On en déduit donc : f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans E si, et seulement si, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E. En particulier, si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = n$. On retient donc pour l'instant :

$$\boxed{\text{si } \mathbb{R}^n \text{ et } E \text{ sont isomorphes, alors } \dim(E) = n}$$

Vocabulaire

On dit que deux EV sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme entre les deux.

La réciproque de cette implication est-elle encore valable ? Oui, c'est bien le cas !

Supposons que $\dim(E) = n$, considérons $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et posons $f : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

D'après ce qui précède, puisque $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, f est un isomorphisme. D'où :

$$\boxed{\text{si } \dim(E) = n, \text{ alors } E \text{ est isomorphe à } \mathbb{R}^n}$$

On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 1 — Isomorphisme et dimension

$\dim(E) = n$ si, et seulement si, E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...)

☞ Pour info...

Et par conséquent : $\dim(E) = \dim(F)$ ssi E et F sont isomorphes.

L'impact est considérable : tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à un $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Autrement dit : tout vecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être vu comme une matrice ligne (ou colonne) : la matrice de ses coordonnées, une fois une base de E choisie.

Petite remarque

Ce résultat est à la fois puissant et décevant : tous les EV de dimension finie n ont la même tête que $\mathbb{R}^n$. C'est génial et peu original à la fois...

III Théorème du rang et conséquences

Définition 4 — Rang d'une application linéaire

Le **rang** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

On a immédiatement :

Propriétés 8

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

P1 $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min\big(\dim(E), \dim(F)\big)$

P2 f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$

Petite remarque

Par conséquent, si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective !

Démonstration :

P1. Voir QCI25.

P2. On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = F \iff \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Im}(f) = F \iff \mathrm{rg}(f) = \dim(F)$$

Mais, par définition, f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$...
Conclusion : f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Et voici le fameux théorème, un des plus importants d'algèbre linéaire en dimension finie :

Théorème 2 — Théorème du rang

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$$

✘ Attention !

C'est la dimension de l'espace de départ qui entre en jeu !

Démonstration : Allez voir en maths appro !

♣ **Méthode 1** ♣ **Pour déterminer noyau et image d'une application linéaire :**

1. on commence par celui qui nous semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier),
2. on utilise le théorème du rang pour avoir la dimension de l'autre, et le déterminer par ensuite.

Conséquence importante du théorème du rang :

Propriété 9

Soient E et F deux espace vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{array}{ccc} f \text{ injective} & \longleftrightarrow & f \text{ surjective} \\ & \nwarrow\!\!\searrow \quad \swarrow\!\!\nearrow & \\ & f \text{ bijective} & \end{array}$$

Autrement dit, si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors :

$$\begin{array}{ccc} \ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} & \longleftrightarrow & \mathrm{rg}(f) = n \\ & \nwarrow\!\!\searrow \quad \swarrow\!\!\nearrow & \\ & f \text{ bijective} & \end{array}$$

Important ! Cas particulier important : cette propriété est vraie pour les endomorphismes en dimension finie.

★ Démonstration : Voir QCl24. ★

Exemple 4

Démontrons que l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

IV Lien application linéaire & matrice...

IV.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

On commence déjà par un premier résultat élémentaire : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} g(\lambda X_1 + \mu X_2) & = & A(\lambda X_1 + \mu X_2) \\ & = & \lambda A X_1 + \mu A X_2 \\ & = & \lambda g(X_1) + \mu g(X_2) \end{array}$$

✘ Attention ! Attention aux tailles des matrices... Puisque $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, X a p lignes ; donc la matrice A doit avoir p colonnes pour que le produit AX soit bien défini. Et on a bien $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, considérons E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$. Munissons E d'une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ et F d'une base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$. Soient également $g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\vec{u} \in E$. Manipulons un peu l'expression de $g(\vec{u})$...

Petite remarque En pratique, on travaille le plus souvent dans les bases canoniques de E et F, même s'il est parfois utile de changer de base !

- Puisque $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ est une base de E, il existe des uniques réels $x_1, x_2, \dots, x_p$, que nous considérons ensuite, tels que $\vec{u} = \sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j$.
  Par conséquent :

$$\begin{aligned} g(\vec{u}) &= g\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) \quad \text{par linéarité de } g \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j g(\vec{e}_j) \end{aligned}$$

- De plus, pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, puisque $g(\vec{e}_j) \in F$ et que $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ est une base de F, il existe des uniques réels $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$, que nous considérons ensuite tels que $g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f}_i$.

Petite remarque
• $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$.
• $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ sont les coordonnées de $\vec{e}_j$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ (il est donc normal que leur indexation dépende de j).

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
g(\vec{u}) &= \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{f_i} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_j a_{i,j} \vec{f_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_j a_{i,j} \vec{f_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \right) \vec{f_i}
\end{aligned}$$

permutation des deux sommes

Par conséquent, les coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ de $g(\vec{u})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ sont définies par :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \;\; y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \qquad (\star)$$

Et cela nous rappelle un produit matriciel ! Plus précisément, posons :

- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p})$;
- $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne des coordonnées de $g(\vec{u})$ (que l'on peut noter $\vec{v}$) dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$;
- $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice dont la colonne j contient les coordonnées de $g(\vec{e_j})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$.

On obtient ainsi :

$$(\star) \iff Y = AX$$

> Après avoir choisi une base de E et une base de F, la relation $\vec{v} = g(\vec{u})$ se traduit matriciellement par : $Y = AX$ (avec les notations définies ci-dessus). Autrement dit, toute application linéaire $g \in \mathscr{L}(E, F)$ peut être codée par une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et son action sur un vecteur $\vec{u} \in E$ se traduit simplement par le produit matriciel AX.

✎ Notation

Si $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base $\mathscr{B}$, on note parfois $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{u})$ la matrice colonne de ses coordonnées.

★Subtil...★

Puisque, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, les coordonnées de $g(\vec{e_j})$ dans la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ sont uniques, la matrice A ainsi définie est bien unique.

En gros...

En dimension finie : toutes les applications linéaires de E dans F se codent matriciellement sous la forme $X \longmapsto AX$! Là encore, c'est puissant et décevant à la fois...

Afin d'énoncer clairement ce que nous venons d'établir, commençons par une définition :

Définition 5 — Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Soit également $g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $\mathscr{B}_E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_p})$ est une base de E et $\mathscr{B}_F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n})$ une base de F.
On appelle **matrice représentative de g dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)$, dont **la j-ième colonne est constituée des coordonnées du vecteur $g(\vec{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_F$**.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\vec{e_1}) & \dots & g(\vec{e_p}) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \\ \vec{f_n} \end{array}$$

Petite remarque

- Si $\dim(E) = \dim(F)$, la matrice est carrée.
- Si $E = F$, φ est un endomorphisme ; et en prenant la même base en départ et en arrivée, on considère la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}}(g)$ que l'on notera simplement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

Résumons ce que nous venons de faire dans le théorème suivant :

Théorème 3

1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors l'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ est une application linéaire.
2. Avec les notations de la définition précédente, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in F$:
   - si X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}_E$,
   - si Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathscr{B}_F$,
   - si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)$,

♣ Méthode !

Cela fournit donc une autre méthode pour montrer rapidement qu'une application (de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est linéaire...

alors :

$$\vec{v} = g(\vec{u}) \iff Y = AX$$

Autrement dit :

$$\vec{v} = g(\vec{u}) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\vec{v}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\vec{u})$$

Exemples 5

E1 Considérons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix}$.

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on remarque que $f(X) = AX$.
  Par conséquent, f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$; et A est sa matrice canoniquement associée.

> **Pourquoi ?** Pourquoi canoniquement ? Parce-que X et $f(X)$ sont tous deux exprimés dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, que nous noterons $\mathscr{B}$, puis donnons la matrice de f dans cette base.

  ⋆ ◇ Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b+c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+2c=0 \\ -b+2c=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2b+2c=0 \\ 6c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

  Par conséquent : $a=b=c=0$, et donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

  ◇ Et $\mathrm{Card}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 3 = \dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

  Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

  ⋆ Donnons maintenant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On a :

  ◇ $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

  ◇ $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

  ◇ $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Conclusion : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

E2 Considérons l'application φ qui à toute fonction $P \in \mathbb{R}_2[x]$ associe la fonction $\varphi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = P(x) + (1-x)P'(x)$$

- Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
  - ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$. Montrons que $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$; autrement dit, montrons :

    $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)$$

    Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

    $$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x) + (1-x)(\lambda P + \mu Q)'(x) \\ &= \lambda P(x) + \mu Q(x) + (1-x)P'(x) + (1-x)Q'(x) \quad \text{linéarité de la dérivation et de l'évaluation en } x \\ &= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)\end{aligned}$$

    Conclusion : $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$, donc φ est une application linéaire.
  - ⋆ Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$.
    On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

    $$\begin{aligned}\varphi(P)(x) &= cx^2 + bx + a + (1-x)(2cx + b) \\ &= cx^2 + bx + a + 2cx + b - 2cx^2 - bx \\ &= -cx^2 + 2cx + b + a\end{aligned}$$

    Conclusion : $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$.

  Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

♣ Méthode !
Pour montrer $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[x]$, deux méthodes possibles :
- écrire $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$ puis calculer $\varphi(P)$...
- **justifier que $\varphi(P)$ est polynomiale** puis travailler sur les degrés pour établir que $\deg\left(\varphi(P)\right) \leqslant 2$.

Même si la première méthode est plus calculatoire, elle a l'avantage de toujours aboutir, ce qui n'est pas le cas de la seconde. La première fournit aussi, sans calcul supplémentaire, la matrice canoniquement associée à g...

- Déterminons la matrice φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$, notée A.
  Notons (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que l'on a $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto x$ et $P_2 : x \longmapsto x^2$.
  Ainsi :
  - ⋆ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_0)(x) = 1 + (1-x) \times 0 = 1$, d'où :

    $$\varphi(P_0) = P_0$$
  - ⋆ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_1)(x) = x + (1-x) \times 1 = 1$, d'où :

    $$\varphi(P_1) = P_0$$
  - ⋆ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(P_2)(x) = x^2 + (1-x) \times 2x = -x^2 + 2x$, d'où :

    $$\varphi(P_2) = 2P_1 - P_2$$

  Conclusion : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminons maintenant, à l'aide des matrices, une base du noyau de φ.
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2$.

  Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$. On a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Par conséquent :

✘ Attention !
Attention à l'ordre des vecteurs dans une base !

$$\begin{aligned}P \in \ker(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = 0_{3,1} \\ &\iff A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0_{3,1} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2c = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -b \\ b = b \\ c = 0 \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a - ax\end{aligned}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a\big(P_0(x) - P_1(x)\big)$$
$$\iff P = a(P_0 - P_1)$$

Par conséquent : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(P_0 - P_1)$.
La famille $(P_0 - P_1)$ est ainsi :

✓ génératrice de $\ker(\varphi)$ par définition,
✓ libre car constituée d'une unique vecteur non nul.

Conclusion : la famille $(P_0 - P_1)$ est une base de $\ker(\varphi)$.

Rédaction
La question porte sur P, on termine donc avec $P = ...$

E3 Considérons $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi que $\varphi : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.
Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminons sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N)\\ &= \lambda AM + \mu AN\\ &= \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N)\end{aligned}$$

  Conclusion : φ est une application linéaire.
  ⋆ Ensuite, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

  Conclusion : φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Notons $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

  ⋆ $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,1} + E_{2,1}$

  ⋆ $\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_{1,2} + E_{2,2}$

  ⋆ $\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1}$

  ⋆ $\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}$

Conclusion : la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous venons d'établir qu'après avoir fixé des bases de E et F, chaque application linéaire $g \in \mathscr{L}(E,F)$ peut être représentée matriciellement par une unique matrice (c'est d'ailleurs ce qui permet de définir l'application Φ dans le théorème suivant). En fait, la réciproque est également vraie : une fois des bases de E et F choisies, chaque matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (où $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$) définit une unique application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$... On a même :

Théorème 4 — Isomorphisme de représentation

Soient E et F deux espaces vectoriels tels que $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Munissons E d'une base notée $\mathscr{B}_E$ et F d'une base notée $\mathscr{B}_F$.
L'application :

$$\Phi : \left|\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.
Par conséquent : $\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = np$.

Important !
Deux informations dans ce théorème :
• le caractère bijective : une fois des bases fixées, il y a correspondance unique entre une application linéaire et une matrice dans ces bases.
• le caractère linéaire : la matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires est la combinaison linéaire des matrices de chacune.

⋆ Démonstration :

- Écrivons $\mathscr{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$.

  ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $g, h \in \mathscr{L}(E,F)$.
  Montrons $\Phi(\lambda g + \mu g) = \lambda\Phi(g) + \mu\Phi(h)$; autrement dit, montrons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$.
  Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$. Notons :

  ◇ $a_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$
  ◇ $b_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$
  ◇ $c_{i,j}$ le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h)$

Par définition, on a :

$$g(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f}_i \quad ; \quad h(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\vec{f}_i \;\; ; \;\; (\lambda g + \mu h)(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}\ \vec{f}_i$$

Mais, on a également :

$$\begin{aligned}(\lambda g + \mu h)(\vec{e}_j) &= \lambda g(\vec{e}_j) + \mu h(\vec{e}_j)\\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f}_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\vec{f}_i \qquad \text{par linéarité de la somme}\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})\vec{f}_i\end{aligned}$$

Or, la famille $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de F, et par unicité de l'écriture d'un vecteur selon une base, on obtient :

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

On a ainsi démontré :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ \ c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$$

Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda g + \mu h) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(h)$$

Conclusion : l'application Φ est linéaire.

⋆ Puisque Φ est linéaire, montrons qu'elle est injective en déterminant son noyau.
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$\begin{aligned} g \in \ker(\Phi) &\iff \Phi(g) = 0_{n,p}\\ &\iff \forall j \in [\![1;p]\!],\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(g(\vec{e}_j)\big) = 0_{n,1} \qquad \text{une matrice est nulle ssi chacune de ses colonnes est nulle}\\ &\iff \forall j \in [\![1;p]\!],\ g(\vec{e}_j) = \overrightarrow{0_F}\end{aligned}$$

Or, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E et une application linéaire sur E est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E, on en déduit que φ est l'application linéaire nulle.
Ainsi :

$$g \in \ker(\Phi) \iff \varphi = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$$

Conclusion : $\ker(\Phi) = \{0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$, et Φ est donc injective.

⋆ Montrons que Φ est surjective, autrement dit, montrons : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \exists g \in \mathscr{L}(E,F)\ /\ \Phi(g) = A$.
Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Puisqu'une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ est entièrement définie par l'image qu'elle renvoie aux vecteurs d'une base de E et que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, considérons l'application linéaire φ définie par : $\forall j \in [\![1;p]\!],\ \ g(\vec{e}_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\vec{f}_i$.

De cette façon, on a :

$$g \in \mathscr{L}(E,F) \quad ; \quad \Phi(g) = A$$

Conclusion : Φ est surjective.

Conclusion : Φ est un isomorphisme.

- Puisque Φ est un isomorphisme, on a :

$$\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = \dim\big(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big)$$

Conclusion : $\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = np$.

⋆

Théorème 5

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Notons $q = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $n = \dim(G)$ et considérons $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, G.
On a déjà vu que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$; mais on a aussi :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Autrement dit, pour tous $\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in G$, si :

- X est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathscr{B}_E$
- Y est la matrice colonne des coordonnées de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}_G$
- A est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ ($A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$)
- B est la matrice de g dans les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ ($B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$)

alors :

$$\vec{v} = (g \circ f)(\vec{u}) \iff Y = BAX$$

En gros...
La composition d'applications linéaires se traduit par le produit matriciel.

Important !
En particulier, si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors A^2 est la matrice de $f \circ f$ dans $\mathscr{B}_E$; A^3 la matrice de $f \circ f \circ f$ dans $\mathscr{B}_E$...

⋆ Démonstration : Il suffit d'appliquer deux fois le second point du théorème 3 : une fois pour f, une fois pour g. ⋆

Et voici une conséquence immédiate de ce théorème, très utile en pratique :

PROPRIÉTÉ 10 — **ISOMORPHISMES ET MATRICES**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Munissons E d'une base $\mathscr{B}_E$ et F d'une base $\mathscr{B}_F$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On a :

$$f \text{ est bijective si, et seulement si, } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}$$

Et, si f est bijective, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}$.

> **☞ Rappel...**
> Pour le cas général, voir 1A – Chapitre 11 – Propriétés 2 – P2 ; et on sait alors que si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ d'après Propriété 3.

⋆ DÉMONSTRATION : Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(f \text{ est bijective}\right) &\iff \exists g \in \mathscr{L}(F, E) \ / \ g \circ f = \mathrm{id}_E \text{ ET } f \circ g = \mathrm{id}_F \\
&\iff \exists g \in \mathscr{L}(F, E) \ / \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(g \circ f) = I_n \text{ ET } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f \circ g) = I_n && \text{isomorphisme de représentation} \\
&\iff \exists g \in \mathscr{L}(F, E) \ / \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) = I_n \text{ ET } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(g) = I_n && \text{théorème 5} \\
&\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ B \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \times B = I_n \\
&\iff \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}\right)
\end{aligned}$$

Et, le cas échéant, on a avec ce qui précède : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}$. ⋆

EXEMPLE 6

Exemples 5 – E2 : nous avions obtenu la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice possède deux colonnes identiques, elle n'est donc pas inversible.

Conclusion : l'endomorphisme φ, défini dans Exemples 5 – E2, n'est pas bijectif.

> **Petite remarque**
> Nous avions déterminé le noyau, qui nous avait déjà permis de conclure. Nous venons d'en voir une autre méthode.

IV.2 NOYAU, IMAGE ET RANG D'UNE MATRICE

> **Vocabulaire**
> Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$ est l'application linéaire **canoniquement associée à** A.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. D'après ce qui a été fait précédemment, et en notant $f_A : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$, on a :

$$\ker(f_A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$$

puis, si $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}\left(f_A(E_1), f_A(E_2), \ldots, f_A(E_p)\right)$.
Mais, en notant, pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, C_j la j-ième colonne de A, on a par produit matriciel : $f_A(E_j) = C_j$. D'où :

$$\mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right)$$

et enfin

$$\mathrm{rg}(f_A) = \dim\left(\mathrm{Im}(f_A)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)\right)$$

Ceci justifie les définitions suivantes :

DÉFINITIONS 6 — **NOYAU, IMAGE, RANG D'UNE MATRICE**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

D1 Le **noyau** de A, noté $\ker(A)$, est l'ensemble défini par :

$$\ker(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right\}$$

D2 L'**image** de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right)$$

où, pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, C_j représente la j-ième colonne de A.

D3 Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.

> **Petite remarque**
> Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.

Version matricielle du théorème du rang :

THÉORÈME 6 — **THÉORÈME DU RANG (VERSION MATRICIELLE)**

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :

$$p = \dim\left(\ker(A)\right) + \mathrm{rg}(A)$$

⋆ DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer le théorème du rang (version application linéaire) à l'application linéaire $f_A : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longmapsto AX$... ⋆

Et de la même façon :

Propriété 11 — **Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{tikzcd}
\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \mathrm{rg}(A) = n \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& A \text{ inversible} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Immédiat, d'après les propriétés 9 et 10 (même si on l'a déjà démontrée dans le chapitre 3...)

Exemples 7

E1 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 0$. Que dire de A ?

E2 La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

E3 La matrice $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

E4 Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Puisque A contient deux colonnes non colinéaires, on a déjà $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Ensuite, remarquons que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$.

  Par conséquent, $\dim\big(\ker(A)\big) \geqslant 1$.
- Or, d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim\big(\ker(A)\big) + \mathrm{rg}(A)$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(A) = 2$; $\dim\big(\ker(A)\big) = 1$.

E5 La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, elle est donc de rang 3. Par conséquent, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3. On en déduit :

- A est inversible ;
- $\ker(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$.

E6 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

E7 Donnons quelques matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V Changement de bases et matrices semblables

V.1 Matrices de passage et formules de changements de base

Voyons maintenant comment relier les différentes matrices d'une même application linéaire lorsqu'elles sont exprimées dans des bases différentes...

Définition 7 — **Matrice de passage**

Soient $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{B}' = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n)$ deux bases de E.
La **matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$**, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, est la matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de $\vec{e}\,'_j$ dans la base $\mathscr{B}$. Autrement dit :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{e}\,'_1 & \dots & \vec{e}\,'_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & (\bigstar) & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{matrix}$$

Petite remarque
En fait :
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$$

Exemple 8

Notons $P_0 : x \longmapsto 1$, $P_1 : x \longmapsto 1 + x$ et $P_2 : x \longmapsto 1 + x + x^2$. Justifions que la famille $\mathscr{B}' = \left(P_0, P_1, P_2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donnons la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathscr{B}'$.

La famille $\left(P_0, P_1, P_2\right)$ est une famille de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est :

- ✓ libre car constituée de fonctions polynomiales échelonnées en degré,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathbb{R}_2[x]\right)$.

Conclusion : la famille (P_0, P_1, P_2) est une famille base de $\mathbb{R}_2[x]$ et :

$$P_{bc,\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 12

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$.

⋆ Démonstration : On a remarqué que : $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$.
Or, id est bijectif, donc d'après la propriété 10, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})$ est inversible et

$$\begin{aligned} P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id})^{-1} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}^{-1}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \qquad \mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \end{aligned}$$

⋆

Et on a même :

Propriété 13

Une matrice carrée est une matrice de passage si, et seulement si, elle est inversible.

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Une matrice de passage est inversible, d'après la propriété précédente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que A est inversible.
D'après la propriété 11, on a alors :

$$\mathrm{rg}(A) = n$$

Autrement dit, la famille $(C_1, \dots, C_n)$ (où, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, C_i désigne la i-ème colonne de A) est de rang n.
Par conséquent, cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Conclusion : la matrice A est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vers la base $(C_1, \dots C_n)$.

⋆

Propriétés 14 — **Formules de changement de base**

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

P1 Pour tout $x \in E$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

P2 Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}^{-1}\end{aligned}$$

$\star$ Démonstration :

P1. Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\mathrm{id}(x)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) && \text{théorème 3} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)\end{aligned}$$

P2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}) && \text{théorème 5} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} && \text{propriété 10}\end{aligned}$$

$\star$

Exemple 9

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On admet que la famille $\mathscr{B}' = \big((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donnons la matrice de f dans $\mathscr{B}'$, notée T, puis écrivons une égalité reliant A et T.

- Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers la base $\mathscr{B}'$. On a ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :
  - $\star$ $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$, donc $f(1,0,1) = (2,0,2) = 2(1,0,1)$;
  - $\star$ $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $f(-1,1,0) = (-1,1,0)$;
  - $\star$ $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, donc $f(1,1,1) = (0,2,1) = (-1,1,0) + (1,1,1)$.

  D'où :

$$\begin{aligned}T &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Par formule de changement de base :

$$\mathrm{Mat}_{bc}(f) = P_{bc,\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',bc}$$

  Enfin, P est inversible comme matrice de passage et :

$$A = PTP^{-1}$$

Conclusion : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$.

Petite remarque

Bien évidemment, cette formule de changement de base peut également servir pour déterminer la matrice d'une application linéaire dans une certaine base ; mais pour cela, il faut déjà avoir inversé la matrice de passage.

V.2 Matrices semblables

Pour conclure cette partie, une dernière définition suivie d'une propriété assez théorique, mais utile.

Définition 8 — Matrices semblables

Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que les matrices M et N sont **semblables** lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PNP^{-1}$$

Petite remarque
Cette définition est bien symétrique (on dit que M et N sont semblables, pas seulement que M est semblable à N...) puisque :
$M{=}PNP^{-1} \Longleftrightarrow N{=}P^{-1}M\left(P^{-1}\right)^{-1}$

Propriété 15 — Caractérisation des matrices semblables

Deux matrices (différentes) sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (différentes).

⋆ Démonstration : Raisonnons par double implication...

$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat d'après Propriétés 14 - P2.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que M et N sont semblables. Il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que nous considérons ensuite, telle que : $M = PNP^{-1}$.
Montrons qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ telles que M et N représentent toutes deux f.
Notons $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Par isomorphisme de représentation, il existe un unique endomorphisme de E noté f, que nous considérons ensuite, tel que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on pose : $\vec{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\vec{e}_i$ (où $p_{i,j}$ désigne le coefficient (i,j) de la matrice P). Ainsi, en notant $\mathscr{B}' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$, on a alors : $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.
L'égalité $M = PNP^{-1}$ s'écrit donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}NP_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} N &= P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}^{-1}MP_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}^{-1} \\ &= P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}MP_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \end{aligned}$$

formule de changement de base

Par conséquent, M et N représentent toutes deux le même endomorphisme f. ⋆

VI Travail sur le rang...

Commençons par ces premiers résultats, puis voyons-en trois conséquences :

Propriétés 16 — Rang et composition d'AL

P1 Soient E, F, G trois espaces vectoriels ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$ et $h \in \mathscr{L}(G,E)$.
- Si g est bijective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.
- Si h est bijective, alors $\mathrm{rg}(f \circ h) = \mathrm{rg}(f)$.

Autrement dit : le rang est invariant par composition à droite et/ou à gauche par un isomorphisme.

P2 D'un point de vue matriciel : soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- Si B est inversible, alors $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(A)$.
- Si C est inversible, alors $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$.

Autrement dit : le rang est invariant par multiplication à droite et/ou à gauche par une matrice inversible.

⋆ Démonstration : En exercice... ⋆

Propriété 17 — Rang et transposition

Pour toute matrice A, on a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

♡ Astuce du chef ! ♡
On peut donc trouver le rang d'une matrice en raisonnant sur la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses lignes...

⋆ Démonstration : En exercice... ⋆

Propriétés 18 — Invariance du rang par opérations élémentaires

P1 On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes et/ou sur ses colonnes.
En particulier : l'inversibilité ou la non inversibilité d'une matrice est conservée par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

P2 Le rang d'une réduite de Gauss est égal au nombre de lignes non nulles de cette matrice.

♣ Méthode !
On peut donc déterminer le rang d'une matrice en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener au rang d'une matrice triangulaire.

⋆ Démonstration :

P1. D'après les propriétés précédentes, le rang est inchangé par multiplication par une matrice inversible. Pour démontrer le résultat, il suffit de démontrer que les opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes peuvent se traduire matricielle ment par une multiplication (à gauche ou à droite) par une matrice inversible.
Soient $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Échange de lignes / colonnes.
  - ⋆ Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$. Échanger les lignes L_i et L_j de M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
    - ◇ pour tous $k \notin \{i, j\}$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées) ;
    - ◇ $a_{j,i} = 1$ et $a_{i,j} = 1$ (la ligne L_i passe en ligne j et la ligne L_j passe en ligne i) ;
    - ◇ $a_{i,i} = 0$ et $a_{j,j} = 0$;
    - ◇ tous les autres coefficients étant nuls.

    Cette matrice est inversible puisqu'en effectuant eux fois de suite cet échange de lignes, on retrouve la matrice initiale... Autrement dit :
    $$A^2M = M$$
    En prenant le cas particulier $n = p$ et $M = I_n$, on obtient $A^2 = I_n$, donc A est inversible d'inverse A^{-1}.
  - ⋆ Soient $i, j \in [\![1; p]\!]$. Échanger les colonnes C_i et C_j de M équivaut à multiplier M à droite par cette même matrice A...
- Combinaison linéaire de lignes / colonnes.
  - ⋆ Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$. Remplacer la ligne L_i par la ligne $aL_i + bL_j$ d'une matrice M équivaut à multiplier M à gauche par la matrice A définie par :
    - ◇ pour tous $k \neq i$, $a_{k,k} = 1$ (les autres lignes sont inchangées) ;
    - ◇ $a_{i,i} = a$ (la ligne L_i est multipliée par a) et $a_{i,j} = b$ (la ligne L_j est multipliée par b et sera ajoutée à la ligne L_i) ;
    - ◇ tous les autres coefficients étant nuls.

    Cette matrice est triangulaire (supérieure si $j > i$, inférieure si $j < i$) avec des 1 partout sur la diagonale sauf le coefficient (i, i), égal à a, qui est non nul. Ainsi, A est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls ; elle est donc inversible.
  - ⋆ Soient $i, j \in [\![1; p]\!]$. Remplacer la colonne C_i par la colonne $aC_i + bC_j$ équivaut à multiplier M à droite par cette même matrice A...

Conclusion : les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes se traduisent en multiplication matricielle par une matrice inversible ; ainsi, d'après les propriétés précédentes, les opérations élémentaires sur les lignes et colonne laissent invariant le rang.

Petite remarque
Ce qu'il faut retenir de cette démonstration, c'est essentiellement le recul que demande l'interprétation des opérations élémentaires en multiplications matricielles. Réussir cette étape prouve une bonne compréhension du produit matriciel !

P2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la réduite de Gauss d'une matrice. Supposons que A possède m lignes nulles (avec $m \in [\![0; n]\!]$).

- Si $m = n$: alors $A = 0_{n,n}$ et donc $\mathrm{rg}(A) = 0$.
- Si $m \neq n$:
  D'après la propriété précédente :
  $$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$
  Mais, puisque A est une réduite de Gauss, elle est triangulaire supérieure, donc ${}^tA$ est triangulaire inférieure comportant m colonnes nulles. Par conséquent, $\mathrm{Im}({}^tA)$ est engendrée par les $n - m$ autres colonnes non nulles de ${}^tA$ (et il y en a bien au moins une, car $m \neq n$).
  Or, A est échelonnée, donc les $n - m$ colonnes non nulles de ${}^tA$ sont échelonnées et forment donc une famille libre. Ces $n - m$ colonnes forment donc une base de $\mathrm{Im}({}^tA)$.
  D'où :
  $$\mathrm{rg}({}^tA) = n - m$$
  Conclusion : le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A.

⋆

Exemple 10

Déterminons les valeurs du réel λ de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

On a déjà :

$$\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible.}\right) \iff \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3$$

Or :

$$\begin{aligned}
\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) &\underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3+(1-\lambda)L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2+\lambda & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, elle est donc non inversible si, et seulement si $\begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ 4-4\lambda+\lambda^2 = 0 \end{cases}$, si et seulement si, $\lambda = 2$.

Conclusion : le seul réel λ tel que la matrice $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible est 2.

Rédaction

On pourrait se contenter de raisonner sur l'inversibilité de la matrice, sans travailler sur le rang. Mais le travail sur le rang a un intérêt tout de même... Nous en ferons la remarque en fin d'exemple.

Petite remarque

Et, d'après la dernière étape de la manipulation sur le rang, on remarque que si $\lambda = 2$, alors la matrice étudiée est de rang 2 (oui, on le voit directement à partir de la matrice initiale... mais imaginez si l'on travaille sur des matrices plus grandes) ; donc son noyau est de dimension 1 (théorème du rang). Ceci nous sera utile dans le chapitre sur la diagonalisation des matrices.

On a aussi :

Propriétés 19

P1 Si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même rang.

P2 Soient $g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.
Alors :
$$\text{rg}(g) = \text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\right)$$
Autrement dit : le rang de g est égal au rang de toutes les matrices représentant g dans toutes les bases de E et F.

Pour info...

On dit parfois que le rang est invariant par changement de base.

★ Démonstration :

P1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que M et N sont semblables. Il existe ainsi une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, que nous considérons ensuite, telle que $M = PNP^{-1}$.
Ainsi :
$$\begin{aligned}
\text{rg}(M) &= \text{rg}(PNP^{-1}) && \text{propriétés 16 - P2} \\
&= \text{rg}(NP^{-1}) && \text{propriétés 16 - P2} \\
&= \text{rg}(N)
\end{aligned}$$
Conclusion : si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même rang.

P2. Notons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$ et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\mathscr{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$. Par définition :
$$\begin{aligned}
\text{rg}(g) &= \dim\left(\text{Im}(g)\right) \\
&= \dim\left(\text{Vect}\left(g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_p)\right)\right) && (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p) \text{ est une base de } E\text{, donc en est une famille génératrice}
\end{aligned}$$
Ensuite, remarquons que $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de $\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)$. Par définition :
$$\text{rg}\left(\text{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\right) = \dim\left(\text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)\right)$$

Considérons l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & F \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1\vec{f}_1 + \ldots + x_n\vec{f}_n \end{array} \right.$$

- Sans difficulté, φ est linéaire.
- Puisque $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ est une base de F, on obtient que φ est bijective.

L'application φ est donc un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans F.
Par conséquent, sa restriction à $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$, notée $\varphi_{|\mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_p)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ dans $\mathrm{Im}(\varphi_{|\mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_p)})$.
Or, par définition, $(C_1, \ldots, C_p)$ est génératrice de $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\varphi_{|\mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_p)}) &= \mathrm{Vect}\big(\varphi(C_1), \ldots, \varphi(C_p)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_p)\big) \end{aligned}$$

par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$: $\forall j \in [\![1;p]\!],\ \varphi(C_j) = g(\vec{e}_j)$

L'application $\varphi_{|\mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_p)}$ est donc un isomorphisme de $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ dans $\mathrm{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_p)\big)$.
Conclusion : les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ et $\mathrm{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_p)\big)$ ont même dimension ; autrement dit :

$$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)\big)$$

⋆

♣ L'idée !
Trouver un isomorphisme entre $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$ et $\mathrm{Vect}\big(g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_p)\big)$.

Exemple 11

Considérons l'application f qui, à toute fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}_3[x]$ associe la fonction $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

- Justifions que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$, puis déterminons sa matrice canoniquement associée.
  - ⋆ Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$. Démontrons $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$.
    Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

    $$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) \\ &= \lambda\big(P(x+1) - P(x)\big) + \mu\big(Q(x+1) - Q(x)\big) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x) \end{aligned}$$

    linéarité de l'évaluation en $x+1$ et en x

    On a ainsi établi :
    $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x)$$
    Autrement dit :
    $$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$
    Conclusion : f est une application linéaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.
  - ⋆ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P : x \longmapsto a + bx + cx^2 + dx$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

    $$\begin{aligned} f(P)(x) &= a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 - (a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= a + b(x+1) + c(x^2 + 2x + 1) + d(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &= b + c + d + (2c + 3d)x + 3dx^2 \end{aligned}$$

    Par conséquent : $f(P) \in \mathbb{R}_3[x]$.
    Conclusion : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
  - ⋆ Ensuite, en notant (P_0, P_1, P_2, P_3) la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, et en utilisant la calcul fait ci-dessus, on obtient immédiatement :

    $$f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \quad ; \quad f(P_1) = P_0 \quad ; \quad f(P_2) = P_0 + 2P_1 \quad ; \quad f(P_3) = P_0 + 3P1 + 3P_2$$

    D'où la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$, que nous noterons A :

    $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déduisons-en une base du noyau et de l'image de f ainsi que son rang.
  - ⋆ On remarque alors que $\mathrm{rg}(A) = 3$... Donc :
    $$\mathrm{rg}(f) = 3$$
  - ⋆ Ainsi, par théorème du rang :
    $$\dim\big(\ker(f)\big) = 1$$
    Or $P_0 \in \ker(f)$... Donc la famille (P_0) est une famille de $\ker(f)$ qui est :

Confusion d'objets !
$f(P)$ est une fonction...

✘ Attention !
Il s'agit d'une égalité de fonctions...

Petite remarque
On pourrait également dire que $f(P)$ est une fonction polynomiale de degré inférieure ou égal à 3, comme différence de deux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3...

✓ libre car constituée d'un unique vecteur non nul,

✓ de cardinal 1, égal à la dimension de $\ker(f)$.

Conclusion : (P_0) est une base de $\ker(f)$.

⋆ Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix}\right) \\
&\underset{C_3 \leftarrow 2C_3 - 3C_1}{=} \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \mathbb{R}_2[x]$.

♣ Méthode !

C ... iétés 3 ... qui engendre $\mathrm{Im}(A)$...

Petites remarques

• Volontairement, j'ai choisi de travailler sur la matrice associée pour bien mettre en évidence que la recherche de noyau, d'image et de rang peut toujours être faite par la matrice ; à condition, **pour le noyau et l'image, de conclure avec les bons objets !**

• A partir du calcul générique de $f(P)(x)$ qui précède, on peut dire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[x]$... et $\mathrm{rg}(f) = 3 = \dim\left(R_2[x]\right)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[x]$.